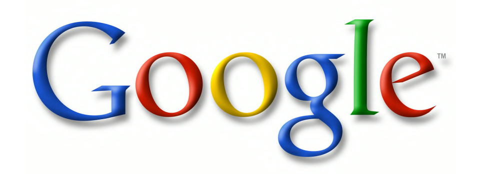






DIE

ELASTISCHEN BOGENTRÄGER

IHRE

THEORIE UND BERECHNUNG

ENTSPRECHEND DEN BEDÜRFNISSEN DER PRAXIS

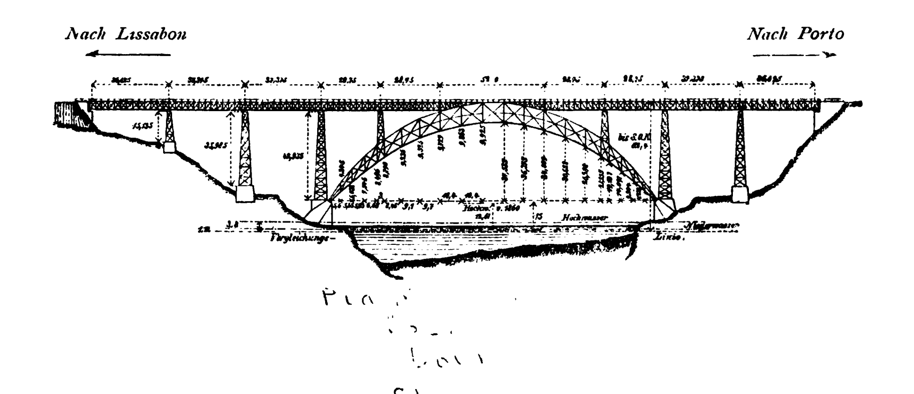
MIT BERÜCKSICHTIGUNG VON GEWÖLBEN UND BOGENFACHWERKEN

VON

Dr. JAKOB J. WEYRAUCH

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN STUTTGART

ZWEITE VOLLSTÄNDIG NEU BEARBEITETE UND MIT ZAHLREICHEN BEISPIELEN VERSEHENE AUFLAGE



MÜNCHEN

THEODOR ACKERMANN

KÖNIGLICHER HOF-BUCHHANDLER

1897.

Vorwort.

Die Anwendung von Bogenträgern hat in neuerer Zeit ausserordentlich zugenommen. Es rührt dies zum Theil daher, dass ästhetische Gesichtspunkte bei Ingenieurkonstruktionen überhaupt mehr Berücksichtigung finden. Sodann ist infolge der mannigfaltigeren Bedürfnisse eine Manigfaltigkeit der Anordnungen entstanden, durch welche der Bogen, sei es allein, sei es in Verbindung mit dem Balken, sehr verschiedenen Verhältnissen angepasst werden kann. Man braucht in dieser Beziehung nur an die Dourobrücken und ihre zahlreichen Nachahmungen, an neuere Brückenkonkurrenzen und an bedeutendere Bahnhofshallen zu erinnern. Dass der Materialverbrauch für Bogen im Allgemeinen geringer als für Balken ist, hat ebenfalls mehr und mehr Beachtung gefunden.

Die Nothwendigkeit, sich mit der Theorie elastischer Bogenträger zu befassen, tritt also heute an viele Ingenieure heran. Schon die üblichen Belastungsproben mit Berechnung von Einsenkungen setzen eine gewisse Kenntniss derselben voraus. Die Ausbildung der Gewölbe und ihre Verwendung bis zu immer grösseren Spannweiten drängen auf deren Berechnung als elastische Bogenträger, nachdem auch die verdienstvollen Versuche des Oesterreichischen Ingenieur- und Architektenvereins (S. 129) zu dem Schlusse geführt haben, dass die erprobten Gewölbe sich im Allgemeinen wie elastische Bogenträger verhielten, und es daher zutreffend sein werde, Gewölbe mit ähnlicher Gestalt und gleicher Ausführung wie die Versuchsgewölbe als elastische Bogenträger zu berechnen.

Die vorliegende zweite Auflage meiner elastischen Bogenträger dürfte demnach zu gelegener Zeit erscheinen. Allerdings musste das Werk eine vollständige Neubearbeitung erfahren, da es in der ersten Auflage von 1879 zunächst nur auf die Durchführung einer genügend vollständigen Theorie ankam. Von Weiterbildungen derselben in dieser Ausgabe sei hier nur auf die genaueren Formeln für den Horizontalschub und die Endmomente, die Berücksichtigung von Bogen mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten, von Bogen mit Zugstange und kontinuirlichen Bogen, die Formeln für die Einsenkungen, die Beziehungen für künstliche Ueberhöhung der Bogen und die Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur hingewiesen (erstmals ausgeführt bei der

Cannstatter Neckarbrücke 1893, vergl. S. 290). Durch mühsame Kontrollrechnungen ist die Zulässigkeit vereinfachender Annahmen geprüft, wobei sich mitunter wesentliche Abweichungen gegen bisherige Meinungen ergaben (§ 36).

Der Verfasser war bestrebt, durch geeignete Beispiele aus der Praxis die wichtigsten Berechnungen soweit zu zeigen, dass man auch ohne Verfolgung der allgemeinen Entwicklungen in ähnlichen Fällen danach vorgehen kann. Es genügt meist, den einschlagenden Paragraphen des II. Abschnittes vorzunehmen, wo die häufigst gebrauchten Formeln nothwendige Verweisungen und für die Hauptfälle eine Anzahl Beispiele gegeben sind, während im Uebrigen das vollständige Inhaltsverzeichniss und die am Schlusse des Werkes angefügten Wort- und Buchstabenregister (in mancher Hinsicht auch § 36) die Orientirung erleichtern können. Wenn für einzelne der berücksichtigten Konstruktionen überkaupt keine Beispiele aufgenommen wurden, so handelt es sich um Berechnungsmethoden, welche nicht speziell elastische Bogenträger betreffen und demgemäss anderwärts ausführliche Behandlung finden, oder um Bogen, für welche schon die gegebenen Beispiele ausreichen (Bogen mit Zugstange) oder schliesslich um Bogenarten, welche zunächst höchstens von solchen Ingenieuren angewandt werden, die keiner Beispiele mehr bedürfen (statisch unbestimmte kontinuirliche Bogen). Hier durfte also die Rücksicht auf den Umfang des Buches massgebend bleiben. Andrerseits ist den Wiener Bogenversuchen angesichts der bleibenden Bedeutung derselben besondere Aufmerksamkeit zugewandt worden (§§ 5, 19, Beispiele 33—37, 43, 44, auch 1, 27—29, Hauptresultate der Berechnung für ein Gewölbe in den Tabellen S. 151, 154, 156).

Den Studirenden ist zu empfehlen, in erster Linie die zwei ersten Abschnitte und den Anfangsparagraphen des III. Abschnitts nebst möglichst viel Beispielen zu verfolgen. Beziehungen, welche selten oder nur unter gewissen Voraussetzungen nöthig werden, sind vielfach in Form von Aufgaben vorgeführt, die alsdann auch Gelegenheit zur Selbstthätigkeit bieten. Auf die mathematischen Ableitungen mit Begründung von Vereinfachungen des III. Abschnitts einzugehen, mag bis zum Eintritt des Bedürfnisses verschoben werden. Eine Durchsicht des IV. Abschnitts (Berechnung der Cannstatter Neckarbrücke) kann ausser weiteren Beispielen vorläufigen Einblick gewähren, wie umfassend und vielgestaltig die für praktische Zwecke erforderlichen Berechnungen unter Umständen ausfallen können. Daneben ist das Augenmerk auf die Reihenfolge der Ermittelungen und die Anordnung der Resultate zu richten, da je nach deren Wahl zahlreiche Fehler vermieden, bereits entstandene erkannt und der Zeitaufwand für die Berechnung bedeutend herabgesetzt werden können.

Schliesslich ersuche ich den Leser, vor der Benützung des Buches die am Schlusse desselben angeführten Fehler berichtigen zu wollen.

Bei Beachtung der erwähnten Gesichtspunkte darf ich hoffen, dass das Gebotene sich möglichst vielseitig nützlich erweisen und auf einem schwierigen Gebiete praktischer Berechnungen die erwünschte weitere Klärung und Erleichterung schaffen werde.

Stuttgart, im Dezember 1896.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

II. Abschnitt.

Besondere Bogenarten.

III. Abschnitt.

Ableitung statisch unbestimmter Grössen.

IV. Abschnitt.

Berechnung der König-Karls-Brücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt.

Einleitung.

Als materielles System bezeichnet man die Gesammtheit beliebiger verbundener oder getrennter Theile der Materie, welche als Ganzes der Betrachtung unterworfen werden. Zwischen den Theilen des Systems unter sich können Kräfte wirken, sie heissen innere Kräfte; es können aber auch Kräfte zwischen Theilen des Systems und nicht zum letzteren gehörigen Ausgangspunkten wirken, diese werden äussere Kräfte genannt. Alle bei Untersuchung eines materiellen Systems auftretenden Kräfte sind also entweder innere Kräfte oder äussere Kräfte.

Jeder Theil s eines materiellen Systems S lässt sich als neues System betrachten, in welchem Falle alle Kräfte, welche von dem Reste $S—s$ des ursprünglichen Systems auf das Theilsystem s wirken, in Bezug auf dieses äussere Kräfte darstellen, während sie in Hinsicht S innere Kräfte waren. In Fig. 1 sind für das ganze System S die im Schnitte angedeuteten Kräfte innere Kräfte (sie wirken zwischen Theilen des Systems), alle übrigen äussere Kräfte. Für das Theilsystem s sind die durchkreuzten und für das Theilsystem $S—s$ die nichtdurchkreuzten Kräfte als äussere Kräfte anzusehen.

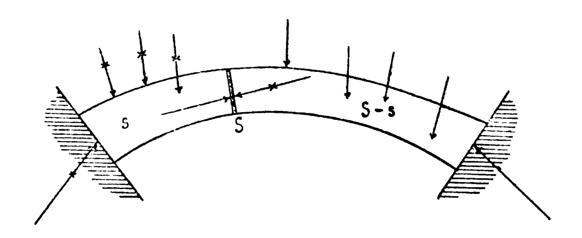
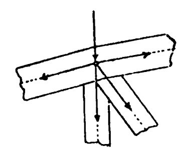


Fig. 1.

Ist ein materielles System in sich und hinsichtlich seiner Umgebung in Ruhe, so müssen die in jedem Systempunkte angreifenden äusseren und inneren Kräfte (Fig. 2) im Gleichgewichte sein, und in jedem beliebig geformten Schnitte durch das System irgend welchen von einer Seite her angreifenden Kräften von der andern Seite her genau gleich grosse Kräfte von entgegengesetzter Richtung widerstehen (Fig. 1). Zu voller Bestimmtheit der Schnittkräfte ist also stets anzugeben, von welcher Seite des Schnittes her dieselben wirken, auf welche der beiden im Schnitte zusammenhängenden Flächen sie bezogen sind. Sodann müssen im Falle der Ruhe die am ganzen Systeme oder irgend einem Theilsysteme angreifenden äusseren Kräfte für sich im Gleichgewichte sein. Dies folgt


Fig. 2.

daraus, dass beim Ansatze der Bedingungsgleichungen für alle äusseren und inneren Kräfte des fraglichen Systems die inneren Kräfte wegen doppelten Auftretens in entgegengesetzten Richtungen (Fig. 1) ausfallen.

Ein Träger ist ein materielles System, welches zur Uebertragung von Lasten und anderen äusseren Kräften auf ausserhalb desselben gelegene Stützen dient. Unter dem Einflusse jener zunächst angreifenden Kräfte (Aktivkräfte) und andrer Ursachen (Wärme) entstehen bei allen Trägern innere Kräfte und als weitere äussere Kräfte Stützenreaktionen. Die inneren Kräfte wirken auf gegenseitige Verschiebung der Systempunkte und in beliebigen Schnitten zusammenhängenden Flächenelemente hin. Die Beanspruchungen per Quadrateinheit hierbei werden Spannungen genannt. Da man sich jede auf ein Flächenelement oder eine ebene Fläche wirkende Kraft in eine Normalkraft (normal der Fläche) und eine Tangentialkraft (tangential der Fläche) zerlegt denken kann (Fig. 3), so pflegt auch von Normalspannungen und Tangentialspannungen die Rede zu sein. Die Normalkräfte suchen die im Schnitte zusammenhängenden Flächen auseinander zu reissen oder gegen einander zu drücken, und werden deshalb in Zugkräfte und Druckkräfte unterschieden; die Tangentialkräfte streben die erwähnten Flächen längs einander zu verschieben und werden daher auch Schubkräfte genannt. Per Flächeneinheit haben wir Zugspannungen, Druckspannungen und Schubspannungen.

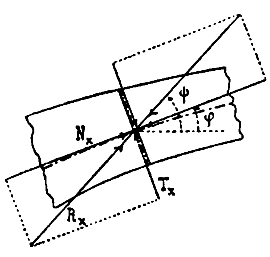


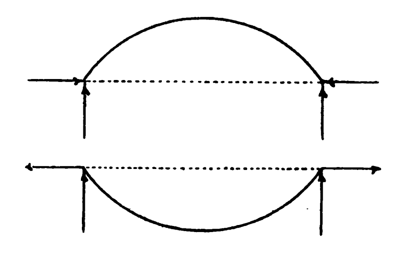
Fig. 3.

Ein ebener Träger ist dadurch charakterisirt, dass alle äusseren Kräfte und die mit ihnen ins Gleichgewicht tretenden Resultanten der inneren Kräfte (z. B. die Stabkräfte eines Fachwerkes) beständig in der gleichen Ebene wirken. Alle Untersuchungen lassen sich dann aut diese Trägerebene beschränken, welche bei Auftreten von Lasten unter den äusseren Kräften, also z. B. schon bei Berücksichtigung des Eigengewichtes, nur eine Vertikalebene sein kann. In diesem Falle heissen die Horizontalabstände zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Stützpunkten Spannweiten oder Oeffnungen, die Zwischenstützen Pfeiler, die Endstützen Widerlager. Der Träger ist ein einfacher Träger oder ein kontinuirlicher Träger, je nachdem er sich ununterbrochen nur über eine oder aber über 2 bis ∞ viele Oeffnungen erstreckt.

Balkenträger oder kurz Balken nennt man solche ebene Träger, bei welchen durch Lasten und andere vertikale Aktivkräfte nur vertikale Stützenreaktionen entstehen; bei Bogenträgern oder Bogen kommen im gleichen Falle auch horizontale Stützenreaktionen hinzu. Einfache Balken und einfache Bogen haben nur eine Oeffnung, kontinuirliche Balken und kontinuirliche Bogen erstrecken sich ohne Unterbrechung über zwei und mehr Oeffnungen. Die Endauflager eines Bogens heissen Kämpfer und ihre Reaktionen Kämpferreaktionen. Diese Gegendrücke der Kämpfer sind von gleicher Grösse aber entgegengesetzter Richtung wie die Drücke des Bogens auf die Kämpfer (Kämpferdrücke). Je nachdem die Horizontalkomponenten der Kämpfer-

reaktionen bei Einwirkung von Lasten nach innen oder nach aussen wirken (Fig. 4 u. 5), je nachdem sie die Bogenenden zu nähern oder zu entfernen suchen, hat man es mit einem Sprengbogen oder mit einem Hängebogen zu thun.

Vielfach werden an den Bogenenden Gelenke angeordnet, sodass dieselben, abgesehen von der Reibung, frei drehbar sind. Man bezweckt durch solche Kämpfergelenke, die Kämpferdrücke an möglichst unveränderlichen Stellen auf die Kämpfer zu übertragen, die Berechnung dadurch einfacher und zuverlässiger zu gestalten, sowie günstigere Beanspruchungen zu erreichen.


Fig. 4 u. 5.

Mitunter werden im Interesse jener Zuverlässigkeit und zur Fernhaltung gewisser zusätzlicher Beanspruchungen (durch Temperaturänderungen und kleine Aenderungen der Spannweite) auch Gelenke in den Oeffnungsmitten eingeschaltet (Zwischengelenke, Scheitelgelenke). Wir haben also einfache Bogen ohne Gelenke, mit zwei Gelenken und mit drei Gelenken zu unterscheiden. Die vollkommene Kette ist als ein Bogen mit stetig aufeinander folgenden Gelenken aufzufassen, wonach die Gleichungen beliebiger Kettenlinien aus dem allgemeinen Formeln für stabförmige Bogen erhalten werden können.

Als elastische Bogenträger pflegt man solche Bogenträger zu bezeichnen, deren Stützenreaktionen oder deren innere Kräfte mittelst der technischen Biegungstheorie, welche einen Theil der Elasticitätslehre bildet, abgeleitet werden. Es gehören hierher in erster Linie die stabförmigen Sprengbogen, doch hat man bisher meist auch die Stützenreaktionen von Fachwerkbogen und Gitterbogen mit ausgesprochener Axe bis zu den Stützpunkten auf Grund der Formeln für elastische Bogenträger berechnet. Andere Fälle von Bogenfachwerken werden wir ebenfalls berücksichtigen.

I. Abschnitt.

Allgemeine Beziehungen.

Die in diesem Abschnitte abzuleitenden Formeln betreffen beliebige stabförmige Bogenträger, deren Axe immer in einer vertikalen Ebene, der Trägerebene, bleibt, während diese zugleich Symmetrieebene des Bogens ist. Als Stabaxe ist dabei diejenige Linie bezeichnet, welche im spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur die Schwerpunkte aller senkrecht zu ihr gedachten ebenen Schitte durch den Bogen, d. h. aller Querschnitte, enthält. Die Trägerebene wird auch Bogenebene oder, weil die Biegungen der Bogenaxe in ihr erfolgen, Biegungsebene genannt. Eine Faserschicht durch die Axe senkrecht zur Biegungsebene heisst Axschicht. Als Trägerlänge oder Bogenlänge s zwischen zwei Querschnitten gilt die Axlänge zwischen denselben (Fig. 6). Die Formänderungen werden so klein vorausgesetzt, dass die Aenderungen der Stababmessungen gegen deren anfängliche, dem spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur entsprechende Werthe vernachlässigt werden dürfen.

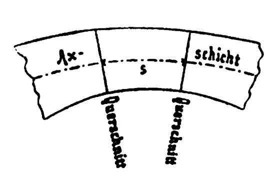


Fig. 6.

§ 1. Schnittkräfte. Schnittmomente.

Wir betrachten einen Stababschnitt zwischen zwei aufeinander folgenden Stützpunkten, welcher bei einfachen Bogen den ganzen Stab darstellt. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit horizontaler x-Axe und vertikaler y-Axe sei in der Trägerebene in fester Lage gegen die dem spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur entsprechende Gruppirung der Stabpunkte angenommen. Ursprung der Koordinaten im Axpunkte des einen Endquerschnittes; die Querschnitte werden nach den anfänglichen Abscissen x ihrer Axpunkte bezeichnet. Für den Axpunkt des zweiten Endquerschnittes seien $x = l,\ y = k;$ l heisst die Spannweite. Bei gleicher Höhenlage der Endquerschnitte, also insbesondere in dem gewöhnlichen Falle, dass der Träger zur Vertikalen durch die Mitte der Spannweite symmetrisch angeordnet ist, wäre $k = 0$. φ bezeichne den Winkel der Stabaxe bei x mit der positiven Richtung der x-Axe.

Der Stab werde in der Trägerebene beliebig belastet und durch Wärme beeinflusst. Der Gesammtbelastung wird nur durch die Gegendrücke R, R' der Stützen und etwa angrenzender Stababschnitte (kontinuirliche Bogen) das Gleichgewicht gehalten (Fig. 7). Wir wollen der Kürze halber R, R' hier allgemein als Kämpferreaktionen be-

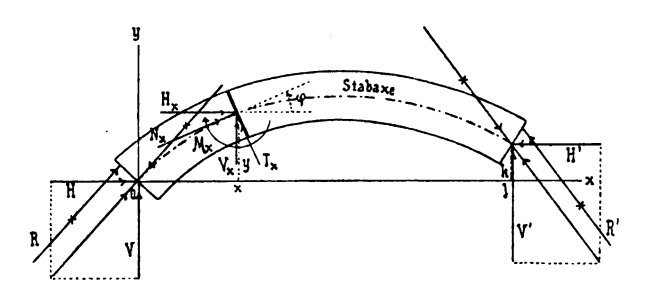


Fig. 7.

zeichnen, die Horizontalreaktion eines Kämpfers heisst der Horizontalschub daselbst. Lage, Grösse und Richtung der Kämpferreaktionen sind zunächst unbekannt. Denkt man sich jedoch im Schwerpunkt des Querschnittes 0 parallel der Kämpferreaktion R deren Grösse zweimal, in entgegengesetzten Richtungen, angetragen, wodurch am Gleichgewichte nichts geändert wird, so erkennt man, dass sich R immer ersetzen lässt durch eine im Axpunkte 0 angreifende Horizontalkraft H, eine ebendaselbst angreifende Vertikalkraft V, und ein Moment M (durchkreuztes Kräftepaar in Fig. 7) in Hinsicht des Axpunktes 0. Ebenso lässt sich die Kämpferreaktion R' ersetzen durch eine im Axpunkte l angreifende Horizontalkraft H', einer ebendaselbst angreifenden Vertikalkraft V' und ein Moment $-M'$ in Hinsicht des Axpunktes l.

Zwischen den Querschnitten 0 und x mögen bei Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ beliebige Lasten $P_1 P_2, \ldots$ auf den Träger kommen (Fig. 8), wobei die P und Differenzen der a auch unendlich klein sein dürfen (stetig vertheilte Lasten). Die

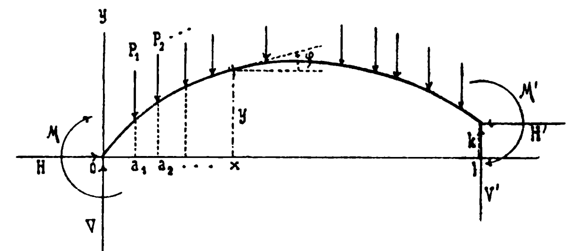


Fig. 8.

resultirende Kraft, mit welcher der Trägertheil links des Querschnittes x auf den Trägertheil rechts von x wirkt, sei R_x. Dieselbe kann man in eine Normalkraft N_x (normal dem anfänglichen Querschnitt bei x) und eine Transversalkraft T_x (transversal der anfängliche Axe bei x) oder auch in eine Horizontalkraft H_x und eine Vertikalkraft V_x zerlegen. Die Formänderungen werden so klein vorausgesetzt, dass N_x, T_x auch nach denselben als normal dem Querschnitt und der Axe gelten können (§ 7). Denken wir uns parallel der resultirenden Schnittkraft R_x deren Grösse zweimal entgegengesetzt im Axpunkte x angetragen (Fig. 8, 9), so lässt sich R_x ersetzen durch ein Moment M_x in Hinsicht des Axpunktes und zwei in letzterem angreifende Kräfte H_x, V_x oder N_x. T_x, wobei die längs der Axe wirkende Kraft

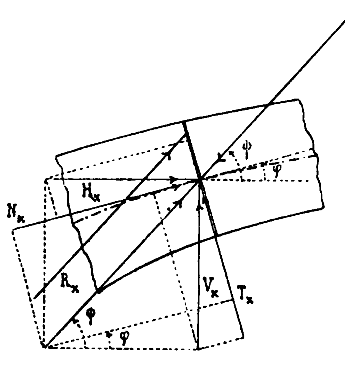


Fig. 9.

N_x auch **Axialkraft** genannt wird. Die positiven Richtungen von x, y, φ, H, H', V, V', M_x, H_x, V_x, N_x, T_x sind in Fig. 7 angedeutet, die von der Fläche rechts von x her wirkenden Kräfte sind von gleichen Grössen, aber entgegengesetzten Richtungen wie die angeführten Schnittkräfte, sodass z. B. für $x = l$, $V_l = -V'$, $H_l = H'$, $M_l = M'$.

Da H_x gleich der Summe aller äusseren Horizontalkräfte, V_x gleich der Summe aller äusseren Vertikalkräfte und M_x gleich der Summe der Momente aller äusseren Kräfte des Trägers links vom Schnitte x in Hinsicht des Axpunktes x, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$H_x = H, \qquad 1)$$

$$V_x = V - \sum_0^x P, \qquad 2)$$

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P\,(x-a). \qquad 3)$$

Nach 1) ist **die resultirende Horizontalkraft für alle Querschnitte eines beliebig belasteten Bogenträgers von gleichem Werth**, nämlich gleich dem Horizontalschub H. Man hat also auch $H_x = H' = H$. Gleichung 3) lautet für $x = l$:

$$M' = M + Vl - Hk - \sum_0^l P\,(l-a),$$

woraus die Vertikalreaktion bei 0:

$$V = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hk + \sum_0^l P(l-a)\right] = V_0. \qquad 4)$$

Substituirt man diesen Werth in 2), so folgt mit $x = l$ wegen $V_l = -V'$ die Vertikalreaktion bei l:

$$V' = \frac{1}{l}\left[M - M' - Hk + \sum_0^l Pa\right] = -V_l. \qquad 5)$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$V + V' = \sum_0^l P = V_0 - V_l \qquad 6)$$

wonach die Summe der Vertikalreaktionen gegen einen Bogenabschnitt gleich der Belastungen ist desselben ist. Mit 4) folgen aus 2), 3):

$$V_x = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hk - \sum_0^l Pa + \sum_x^l P(l-a)\right] \qquad 7)$$

$$M_x = \frac{l-x}{l}\left[M + \sum_0^x Pa\right] + \frac{x}{l}\left[M' + \sum_x^l P(l-a)\right] - \left(y - \frac{k}{l}x\right) H \qquad 8)$$

Durch Zerlegen von V_x und $H_x = H$ in Komponenten parallel und senkrecht der Stabaxe (Fig. 9) erhält man:

$$N_x = V_x \sin\varphi + H \cos\varphi, \qquad 9)$$

$$T_x = V_x \cos\varphi - H \sin\varphi. \qquad 10)$$

Für den Richtungswinkel der resultirenden Schnittkraft mit der positiven Richtung der x-Axe hat man:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{V_x}{H}, \qquad 11)$$

und ihren Absolutwerth bestimmt:

$$R_x = \sqrt{H^2 + V_x^2} = \sqrt{N_x^2 + T_x^2}. \qquad 12)$$

Denken wir uns vom Schnitte x um die Axlänge ds entfernt vor dem folgenden P einen zweiten Querschnitt $x + dx$ geführt, so ver-

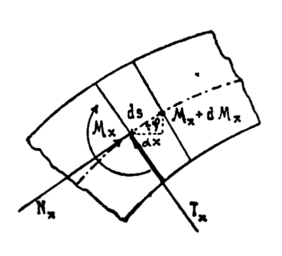


Fig. 10.

langt das Gleichgewicht (Fig. 10):

$$M_x + T_x ds = M_x + dM_x,$$

woraus

$$\frac{dM_x}{ds} = T_x, \qquad 13)$$

und wegen $dx = ds \cos\varphi$ mit Rücksicht auf Gleichung 10):

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x - H \operatorname{tg}\varphi, \qquad 14)$$

wonach für mathematische Maxima und Minima von M_x:

$$T_x = 0, \qquad V_x = H \operatorname{tg}\varphi,$$

es wirkt an den betreffenden Stellen R_x normal dem Querschnitt.

In 2) bis 8) bedeuten die Grenzen der Summen Σ Querschnitte, nicht Abscissen von Axpunkten, zwischen welchen die Lasten P auf den Träger kommen; nur bei Vertikalschnitten ist es gleichgültig, ob man die Querschnitte oder Abscissen darunter versteht. In letzterem Falle ergibt sich 14) und sodann 13) auch aus 3) durch unmittelbare Differentiation. Ueber spezielle Ausdrücke der Summenwerthe Σ für gleichmässig vertheilte Lasten siehe § 14. Alle abgeleiteten Gleichungen gelten auch für Balken, in welchem Falle darin $H = 0$ zu setzen ist.

Aufgabe 1. Schnittkräfte und Schnittmomente bei beliebigen Richtungen der angreifenden Kräfte.

Die in § 1 ausgedrückten Grössen für den Fall abzuleiten, dass nicht nur Lasten (vertikale Aktivkräfte), sondern beliebig gerichtete äussere Aktivkäfte in der Trägerebene am Träger wirken.

Die äusseren Aktivkräfte $R_1, R_2, \ldots$, deren wirklichen, nicht nothwendig in der Bogenaxe liegenden Angriffspunkten die Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ und Ordinaten b_1. $b_2, \ldots$ entsprechen, mögen Vertikalkomponenten $P_1, P_2, \ldots$ und Horizontalkomponenten $Q_1, Q_2, \ldots$ erzeugen. Positive Richtungen derselben denjenigen der Reaktionen V, H entgegengesetzt (Fig. 11). Ganz wie in § 1 ergeben sich die Horizontalkraft, Vertikalkraft uud das Moment in einen beliebigen Querschnitt x:

$$H_x = H - \sum_0^x Q, \qquad 1)$$

$$V_x = V - \sum_0^x P, \qquad 2)$$

Fig. 11.

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) + \sum_0^x Q(y-b), \qquad 3)$$

wobei die Grenzen der Summen wie oben Σ Querschnitte, nicht Axpunkte oder Abscissen, bedeuten.

Gleichung 3) liefert für $x = l$:

$$M' = M + Vl - Hk - \sum_0^l P(l-a) + \sum_0^l Q(k-b),$$

woraus die Vertikalreaktion bei 0:

$$V = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hk + \sum_0^l P(l-a) - \sum_0^l Q(k-b)\right] = V_0. \qquad 4)$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in 2) folgt mit $x = l$ die Vertikalreaktion $V' = -V_1$ bei l:

$$V' = \frac{1}{l}\left[M - M' - Hk + \sum_0^1 Pa + \sum_0^1 Q\,(k-b)\right] = -V_1 \qquad 5)$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$V + V' = \sum_0^1 P = V_0 - V_1, \qquad 6)$$

wonach auch hier, wie selbstverständlich, die Summe der Vertikalreaktionen gegen einen Trägerabschnitt gleich der Summe der vertikalen Aktivkräfte an demselben ist. Gleichung 1) ergibt mit $x = l$ wegen $H' = H_1$ analog 6):

$$H - H' = \sum_0^1 Q = H_0 - H_1 \qquad 7)$$

Durch Zerlegung von V_x und H_x in Komponenten parallel und senkrecht der Stabaxe bei x folgen die Normalkraft und Transversalkraft daselbst (Fig. 9):

$$N_x = V_x \sin\varphi + H_x \cos\varphi, \qquad 8)$$

$$T_x = V_x \cos\varphi - H_x \sin\varphi, \qquad 9)$$

während der Richtungswinkel der resultirenden Schnittkraft mit der positiven Richtung der x-Axe und der Absolutwerth der Schnittkraft bestimmt sind durch:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{V_x}{H_x}, \qquad 10)$$

$$R_x = \sqrt{H_x^2 + V_x^2} = \sqrt{N_x^2 + T_x^2}. \qquad 11)$$

Schliesslich erhält man wie in § 1 durch Betrachtung eines Trägerstücks von der Axlänge ds zwischen zwei aufeinander folgenden Aktivkräften R:

$$\frac{dM_x}{ds} = T_x, \qquad \frac{dM_x}{dx} = V_x - H_x \operatorname{tg}\varphi, \qquad 12)$$

wonach für mathematische Maxima und Minima von M_x:

$$T_x = 0, \qquad V_x = H_x \operatorname{tg}\varphi.$$

§ 2. Schnittlinie und Umhüllungslinie der Kämpferdrücke.

Auf einen beliebigen einfachen Bogenträger (über kontinuirliche Bogen siehe § 21) wirke eine Einzellast P. Hierdurch werden gewisse Reaktionen R, R' der Kämpfer hervorgerufen, welche sich mit P ins Gleichgewicht setzen, sodass P, R, R' durch einen Punkt S gehen (Fig. 12). Die Abscisse a des Schnittpunkts S ist diejenige des Angriffspunkts von P, die Ordinate b findet sich wie folgt. In Bezug auf S ist das Moment von R gleich 0. Da aber R durch H, V und M ersetzt wird (§ 1), so hat man:

$$M + Va - Hb = 0,$$

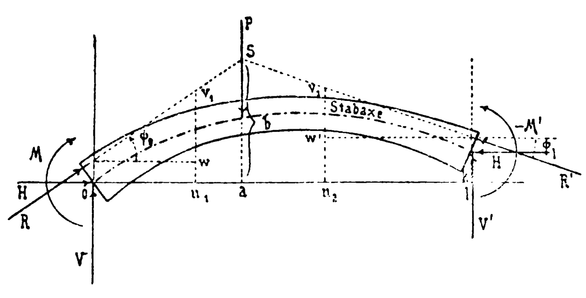


Fig. 12.

woraus:

$$b = \frac{M + Va}{H}. \qquad 1)$$

Mit der Abscisse a der Last P ändert sich auch die Lage des Schnittpunktes S. Lässt man P nach einander alle Lagen von $a = 0$ bis $a = l$

durchlaufen, so beschreibt der Punkt S eine Linie S, welche Schnittlinie der Kämpferdrücke oder Kämpferdrucklinie heisst.

Die Ordinaten derjenigen Punkte, in welchen die von der Einzellast P herrührenden Kämpferdrücke R, R' die Vertikalen bei 0 und l schneiden, seien w, w' (Fig. 12). Da in Bezug auf den ersten dieser Schnittpunkte das Moment von R, in Bezug auf den zweiten das Moment von R' gleich 0 ist, während R durch H, V, M und R' durch $H' = H$, V', $-M'$ ersetzt wird (§ 1), so folgen:

$$M - Hw = 0, \qquad -M' + H(w' - k) = 0,$$

und hieraus:

$$w = \frac{M}{H}, \qquad w' = k + \frac{M'}{H}. \tag{2}$$

Für den Winkel, welchen die resultirende Schnittkraft R_x bei beliebigem x mit der positiven Richtung der x-Axe einschliesst, liefert § 1, 11):

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{V_x}{H},$$

Demnach hat man in unserem Falle für die entsprechenden Winkel bei 0 und l mit $V_0 = V$, $V_l = -V'$:

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \frac{V}{H}, \qquad \operatorname{tg}\psi_l = -\frac{V'}{H}. \tag{3}$$

Die zweite Gleichung gilt auch für den Winkel der Richtung von R' mit der negativen Richtung der x-Axe.

Mit der Aenderung des Angriffspunktes der Last P ändert nicht nur der Schnittpunkt S seinen Ort, sondern es gerathen auch die Richtungslinien der Kämpferreaktionen R, R' in andere Lagen. Lässt man von irgend einer Lage a aus die Abscisse a um da wachsen, so ändern auch die erwähnten Richtungslinien ihre Lagen nur um unendlich wenig, wobei sich aber doch die vorige R-Linie und die neue R-Linie in einem Punkte u, v schneiden (Fig. 13), und ebenso die vorige R'-Linie und die neue R'-Linie in einem Punkte u', v'. Gehen wir wieder um da weiter, so wird die zweite R-Linie von der dritten R-Linie, die zweite R'-Linie von der dritten R'-Linie geschnitten. Fährt man so fort, dann entsteht in der Verbindungslinie der Schnittpunkte aller aufeinander folgender R-Linien eine Umhüllungslinie der Kämpferdrücke R. Ebenso erhält man als Verbindungslinie der Schnittpunkte stetig aufeinander folgender R'-Linien eine Umhüllungslinie der Kämpferdrücke R'. Wir wollen die erste auch kurz Linie U, die zweite Linie U', die Kämpferdrucklinie Linie S nennen. Für Träger, welche zur Vertikalen durch

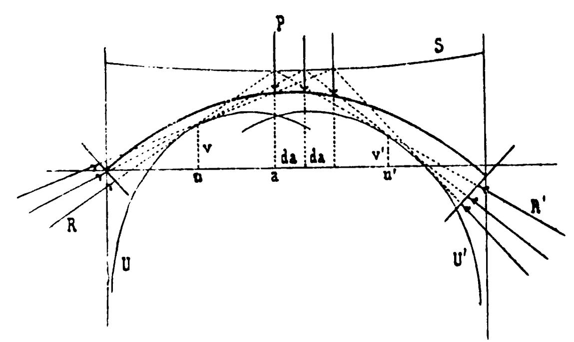


Fig. 13.

ihre Mitte vollständig symmetrisch angeordnet sind, liegen auch diese Linie zur Mitte symmetrisch, sodass es dann genügt, die Linie U zu bestimmen.

Es sollen nun für eine beliebige Lage a der Last P die Koordinaten des Schnittpunktes der zwei unendlich benachbarten R-Linien abgeleitet werden. Sind u_1, v_1 die laufenden Koordinaten der R-Linie für jene Lage (Fig. 12), so ist die Gleichung dieser Linie:

$$v_1 = w + u_1 \operatorname{tg} \psi_0.$$

Gehen wir nun mit P um da weiter, so ändert sich w um dw, $\operatorname{tg} \psi_0$ um $d\, tg \psi_0$, und die Gleichung der neuen R-Linie lautet, wenn u_2, v_2 ihre laufenden Koordinaten:

$$v_2 = w + dw + u_2 (\operatorname{tg} \psi_0 + d \operatorname{tg} \psi_0).$$

Für den Durchschnitt beider Linien sind $u_1 = u_2 = u$, $v_1 = v_2 = v$, also durch Subtraktion:

$$0 = dw + u\, d \operatorname{tg} \psi_0,$$

woraus:

$$u = -\frac{dw}{d \operatorname{tg} \psi_0}$$

und damit nach der Gleichung für v_1:

$$v = w - \operatorname{tg} \psi_0 \frac{dw}{d \operatorname{tg} \psi_0}.$$

Substituirt man in die beiden letzten Formeln die durch 2) 3) bestimmten Ausdrücke von w, $\operatorname{tg} \psi$ und

$$dw = \frac{H dM - M dH}{H^2}, \qquad d \operatorname{tg} \psi_0 = \frac{H dV - V dH}{H^2},$$

so folgen:

$$u = \frac{H dM - M dH}{V dH - H dV}, \tag{4}$$

$$v = \frac{V dM - M dV}{V dH - H dV}, \tag{5}$$

worin H, V, M einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen und die Differentiale sich auf ein variables a beziehen.

Sind die Ausdrücke von H, V, M, bekannt, so kann man dieselben nach a differentiren und aus 4), 5) die Koordinaten des Schnittpunktes je zweier aufeinander folgenden R-Linien erhalten. Wird dann mittelst einer der beiden Gleichungen a aus der andern eliminirt, so erhält man in der entstehenden Beziehung zwischen v und u die Gleichung der Umhüllungslinie U (vergl. § 17). Es lassen sich jedoch H, V, M erst dann entsprechend ausdrücken, wenn Näheres über die Anordnung des Trägers bekannt ist.

Zur Ableitung der selten nöthigen Beziehungen für die Umhüllungslinie U' haben wir die Gleichung der R'-Linie für den Angriffspunkt a der Last (bei Beachtung, dass in Fig. 11 ψ_1 einen negativen Winkel darstellt):

$$v_1 = w' - (l - u_1) \operatorname{tg} \psi_1,$$

und für den Angriffspunkt $a + da$:

$$v_2 = w' + dw' - (l - u_2)(\operatorname{tg} \psi_1 + d \operatorname{tg} \psi_1).$$

Für den Durchschnitt beider Linien erhält man wegen $u_1 = u_2 = u'$ und $v_1 = v_2 = v'$ durch Subtraktion:

$$0 = d\,w' - (l - u')\,d\,\mathrm{tg}\,\psi_1,$$

woraus und womit:

$$l - u' = \frac{d\,w'}{d\,\mathrm{tg}\,\psi_1},$$

$$v' = w' - \mathrm{tg}\,\psi_1\,\frac{d\,w'}{d\,\mathrm{tg}\,\psi_1},$$

Substituirt man in diese Gleichungen w', $\mathrm{tg}\,\psi_1$ nach 2), 3) und

$$d\,w' = \frac{H\,dM' - M'dH}{H^2}, \qquad d\,\mathrm{tg}\,\psi_1 = -\frac{H\,d\,V' - V'd\,H}{H^2},$$

so ergeben sich die Koordinaten des Durchschnitts der zwei benachbarten R'-Linien für die Lage a der Last, d. h. die Koordinaten eines Punktes der Umhüllungslinie U':

$$u' = l - \frac{H\,d\,M' - M'\,d\,H}{V'\,d\,H - H\,d\,V'}, \tag{6}$$

$$v' = k + \frac{V'\,d\,M' - M'\,d\,V'}{V'\,d\,H - H\,d\,V'}, \tag{7}$$

worin sich wieder H, V', M' auf eine bei a angreifende Einzellast P und die Differentiale auf ein variables a beziehen. Bezüglich der Elimination von a und der damit entstehenden Beziehung zwischen u', v' als Gleichung der Umhüllungslinie U' gilt Analoges wie für die Umhüllungslinie U.

Sind für einen Bogen die Linien S, U, U' bestimmt, so ist es leicht, die von einer Last P an beliebiger Stelle a herrührenden R, R', V, V' H graphisch zu ermitteln, wie dies in Fig. 14 angedeutet ist. Die entsprechenden M, M' ergeben sich aus 2).

Es mag schon jetzt erwähnt werden, dass für frei drehbare Bogenenden (Bogen mit Kämpfergelenken in der Axe bei Vernachlässigung der Reibungen) wegen $M = M' = 0$, $d\,M = d\,M' = 0$ nach 4)—7)

$$u = 0, \qquad v = 0,$$
$$u' = l, \qquad v' = k,$$

die Umhüllungslinien der Kämpferdrücke sind dann Punkte, die Kämpferdrücke R, R' gehen stets durch die Gelenkmittelpunkte bei 0 und l.

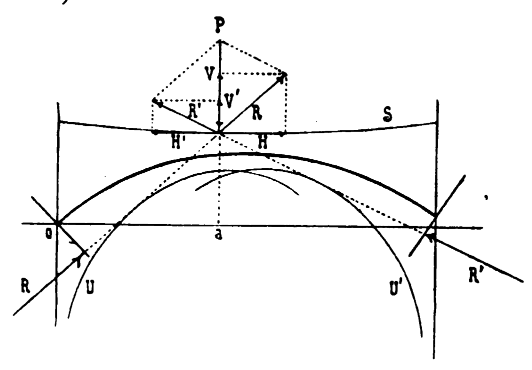


Fig. 14.

Aufgabe 2. Kämpferdrucklinie des Halbkreisbogens mit zwei Gelenken.

Für einen Halbkreisbogen konstanten Querschnitts mit Kämpfergelenken in gleicher Höhe entstehen durch beliebige Belastung (vergl. Aufgabe 14);

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P\,(l - a), \qquad H = \frac{4}{\pi\,l^2}\,Pa\,(l - a). \tag{1}$$

Die Schnittlinie S der Kämpferdrücke zu bestimmen.

Da im vorliegenden Falle $M = 0$ und für eine Einzellast P bei a nach 1):

$$V = P\,\frac{l - a}{l}, \qquad H = \frac{4\,P}{\pi\,l^2}\,a\,(l - a), \tag{2}$$

so liefert § 2, 1) die Gleichung der Linie S:

$$b = \frac{\pi}{4} l = 0{,}7854\ l. \qquad 2)$$

Die Kämpferdrucklinie ist also eine in der Höhe b über den Gelenkpunkten liegende Horizontale. Weitere Anwendungen obiger Beziehungen siehe u. a. §§ 15 bis 17.

Beispiel 1. Kämpferdrucklinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke eines Bogens ohne Gelenke von beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das im II. Abschnitte behandelte symmetrische Versuchsgewölbe des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins von $l = 23{,}758$ m Spannweite und $f = 4{,}502$ m Pfeil der Axe erzeugten Einzellasten P bei den in der unten folgenden Tabelle angeführten Abscissen a die in den Kolumnen 2—5 beigesetzten Werthe des Horizontalschubs H, der Vertikalreaktion V des Kämpfers 0 und der Endmomente M, M'. Die Schnittlinie und Umhüllungslinie der Kämpferdrücke zu bestimmen.

Für die Schnittlinie S der Kämpferdrücke ist nach § 2, 1) die Ordinate b bei Abscisse a:

$$b = \frac{M + Va}{H}, \qquad 1)$$

worin M, V, H einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen. Wir erhalten demnach mit den in der Tabelle gegebenen Werthen z. B. für $a = 0{,}629$ m:

$$b = \frac{-0{,}5789 + 0{,}9988 \cdot 0{,}629}{0{,}0092} = 5{,}364 \text{ m}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen unten angeführten b berechnet. Da S symmetrisch zur Trägermitte liegt, so genügt die Berechnung für die erste Trägerhälfte.

Um die Umhüllungslinie U der Kämpferdrücke R verzeichnen zu können, genügt es, eine Anzahl R für geeignete Lagen der Einzellast P aufzutragen. Einen Punkt jedes dieser R hat man in dem Durchschnitt der betreffenden Last P mit der Schnittlinie S, man braucht also nur noch je einen zweiten Punkt der R zu ermitteln. Nach § 2, 2) ist die Ordinate des Durchschnitts von R mit der Ordinatenaxe bei 0:

$$w = \frac{M}{H}, \qquad 2)$$

also beispielsweise für $a = 0{,}629$ m:

$$w = -\frac{0{,}5789}{0{,}0092} = -62{,}924 \text{ m},$$

und für $l - a = 0{,}629$ m oder $a = 23{,}129$ m:

$$w = \frac{0{,}0221}{0{,}0092} = 2{,}402 \text{ m}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen angeführten w berechnet.

Man sieht, dass für kleine a die w so grosse negative Werthe annehmen können, dass die Durchschnittspunkte der R mit der Ordinatenaxe nicht mehr auf den Zeichenbogen fallen. Für solche Fälle kann man berücksichtigen, dass für die Abscisse z des Durchschnitts von R mit der Abscissenaxe die Beziehung besteht (analog 2) in § 2): $M + Vz = 0$, woraus:

$$z = -\frac{M}{V}. \qquad 3)$$

Beispielsweise erhalten wir für $a = 0{,}629$ m:

$$z = \frac{0{,}5789}{0{,}9988} = 0{,}580 \text{ m}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen z der folgenden Tabelle berechnet.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle I.

für a in m	$\frac{H}{P}$	$\frac{V}{P}$	$\frac{M}{P}$ in m	$\frac{M'}{P}$ in m	b in m	w in m	z in m	für $l-a$ in m	w in m
0,629	0,0092	0,9988	−0,5789	0,0221	5,364	−62,924	0.580	0,629	2,402
2,879	0,1818	0,9754	−1,8346	0,4131	5,322	−10,093	1,885	2,879	2,272
5,129	0,5242	0,9101	−1,8990	1,0952	5,282	− 3,623	2,087	5,129	2,089
7,379	0,9322	0,8052	−1,0391	1,7116	5,259	− 1,115	1,290	7,379	1,836
9,626	1,2652	0,6634	0,2450	1,8768	5,243	0,194	−0,369	9,629	1,483
11,879	1,3956	0,5000	1,3629	1,3629	5,232	0,977	−2,726	11,879	0,977

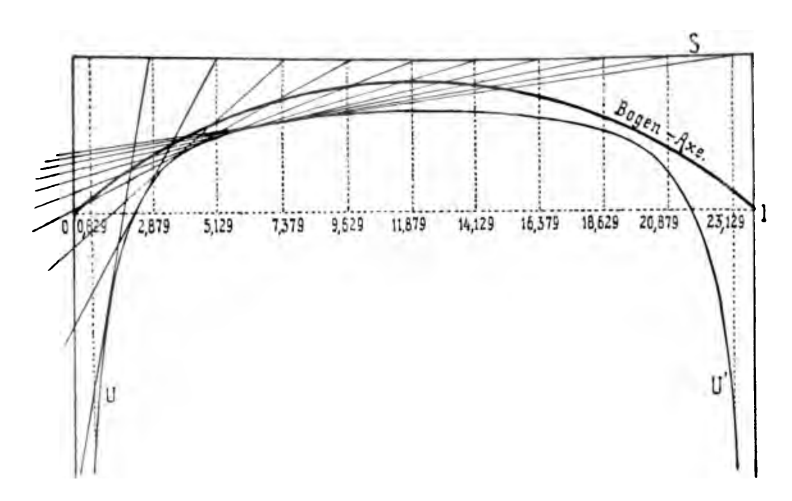


Fig. 15.

Die Kämpferdrucklinie S konnte hiernach in Fig. 15 verzeichnet werden und ebenso genügend genau die Umhüllungslinie U, soweit sie interessirt (der Theil nach etwa dem ersten Viertel kommt nicht zur Verwendung, weil daselbst keine R berühren), während die Umhüllungslinie U' bezüglich einer Vertikalen durch die Trägermitte symmetrisch zur Linie U liegt. Die Linien S, U, U' weichen im vorliegenden Falle nicht sehr bedeutend von den für den parabolischen Bogen ohne Gelenke giltigen ab. So wäre S für letzteren eine horizontale Gerade der Ordinate $b = \frac{6}{5} f = 5{,}402$ m, während die obigen b zwischen 5,359 und 5,232 m variiren.

§ 3. Biegungsformeln.

In den bisherigen Gleichungen kommen als Horizontalschub H und Endmomente M, M' drei Grössen vor, welche im Allgemeinen weder unmittelbar gegeben sind, noch in allen Fällen aus den gegebenen Grössen allein auf rein statische Weise bestimmt werden können. Ihre Werthe sind alsdann von den Eigenschaften des Materials abhängig und auf Grund von Anschauungen und Erfahrungen der Elastizitätslehre zu ermitteln. Aber auch wenn sämmtliche in jenen Formeln auftretenden Grössen gegeben oder durch die gegebenen Verhältnisse statisch bestimmt sind, ist es nöthig, auf die Eigenschaften des Materials Rücksicht zu nehmen, sofern die Beanspruchungen des Stabes in den verschiedenen Elementen der Querschnitte und sonstigen Schnitte durch den Träger in Frage kommen.

Ein Stab mit einfach gekrümmter Axe werde durch irgendwelche Kräfte und Temperaturänderungen so deformirt, dass die Stabaxe in einer Ebene bleibt und in jeder Senkrechten zu dieser Biegungsebene überall gleiche Biegungs- und Beanspruchungsverhältnisse bestehen, sodass es genügt, die Untersuchung derselben in der Ebene der Stabaxe durchzuführen. Von den Annahmen und Bezeichnungen der §§ 1, 2 wird zunächst abgesehen. Wir gehen von folgenden in der technischen Biegungstheorie üblichen Voraussetzungen aus, durch welche die Gültigkeit der entstehenden Beziehungen gewisse Beschränkungen erleidet:

a) Die Flächenelemente, welche vor der Biegung auf einem ebenen Querschnitte lagen, bilden auch nach der Biegung eine zur Stabaxe senkrechte Ebene.

b) Für die Biegung kommen nur die Längenänderungen der zur Axe parallelen Fasern und für diese neben Temperaturänderungen nur die Zug- und Druckkräfte an den Querschnittselementen in Betracht.

c) Die Elastizitätsmoduln für Zug und Druck sind innerhalb der Biegungsgrenzen für alle unter *b*) erwähnten Fasern als gleich und konstant anzusehen.

Wir denken uns im spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur zwei Querschnitte geführt, den einen, welcher x heissen soll, um die Axlänge s von einem gewählten Ausgangspunkte entfernt, an der Stelle, wo r den Krümmungsradius der Stabaxe und φ den Winkel derselben mit einer von der Axschicht aus auf Seiten des Krümmungsmittelpunktes gegebenen Richtung bedeuten, den andern um die Axlänge ds weiter (Fig. 16 u. 17). Dann hat man:

$$ds = r(-d\varphi), r = -\frac{ds,}{d\varphi} \quad 1)$$

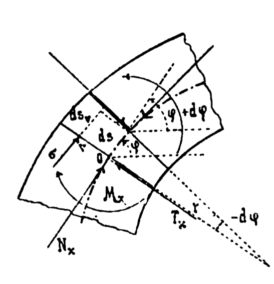


Fig. 16.

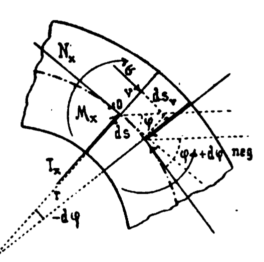


Fig. 17.

und die Länge der Fasern parallel der Stabaxe in Entfernung v von der letzteren, wobei die v nach der dem Krümmungscentrum entgegengesetzten Seite als positiv gelten:

$$ds_v = ds + v(-d\varphi) = ds\left(1 + \frac{v}{r}\right) \quad 2)$$

Wirken nun äussere Kräfte ein und finden Temperaturänderungen statt, so ändern sich s, φ, s_v um Δs, $\Delta\varphi$, Δs_v und wir haben nach dem Taylor'schen Lehrsatze mit $\Delta s = f(s)$ die Aenderung der Entfernung $s + ds$ des zweiten Querschnitts von dem gewählten Ausgangspunkte:

$$f(s + \Delta s) = \Delta s + \frac{d\Delta s}{ds} ds + \frac{d^2\Delta s}{ds^2} \frac{ds^2}{1 \cdot 2} + \cdots,$$

oder bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter und höherer Ordnung gegen solche erster Ordnung:

$$f(s + ds) = \Delta s + d\Delta s.$$

Die schliessliche Länge der Fasern in der Axschicht zwischen den angenommenen Querschnitten ist also:

$$s + ds + \Delta s + d\Delta s - (s + \Delta s) = d(s + \Delta s).$$

In ganz analoger Weise ergibt sich die schliessliche Faserlänge bei v (anstatt der anfänglichen Faserlänge ds_v):

$$d(s_v + \Delta s_v),$$

und die schliessliche Differenz der Richtungswinkel φ bei den zwei Querschnitten (anstatt der anfänglichen Differenz $d\varphi$):

$$d(\varphi + \Delta\varphi).$$

Da aber die Querschnitte zufolge der Voraussetzung a) auch nach der Biegung als Ebenen gelten sollen, so hat man analog dem Ausdrucke 2):

$$d\,(s_v + \Delta s_v) = d\,(s + \Delta s) - (v + \Delta v)\,d\,(\varphi + \Delta\varphi),$$

und durch Subtraktion jenes Ausdruckes unter Vernachlässigung von $\Delta v\, d\Delta\varphi$:

$$d\Delta s_v = d\,\Delta s - v\,d\Delta\varphi - \Delta v\,d\varphi. \qquad 3)$$

Aenderungen Δv wurden früher überhaupt nicht in Betracht gezogen, doch können sich alsdann bei steilen Bogen (Halbkreisbogen etc.) Ungereimtheiten bezüglich des Einflusses der Temperaturänderungen ergeben. Berücksichtigen wir letztere mit Müller-Breslau, indem wir unter Vernachlässigung sonstiger Aenderungen von v setzen, $\Delta v = \alpha\tau v$, worin α den linearen Ausdehnungskoefficienten, τ die Temperaturänderung bedeuten, so wird aus der letzten Gleichung:

$$d\Delta s_v = d\Delta s - v\,d\Delta\varphi - \alpha\tau v\,d\varphi. \qquad 4)$$

Wenn die Längenänderungen der Fasern bei v nur von Spannungen σ parallel der Stabaxe herrührten, und diese als positiv angesehen werden, wenn sie Druck bedeuten, so hätte man:

$$\frac{d\Delta s_v}{ds_v} = -\frac{\sigma}{E},$$

unter E den Elasticitätsmodul verstanden. Wenn dagegen nur eine Temperaturänderung τ eingetreten wäre, so würde sein:

$$\frac{d\Delta s_v}{ds_v} = \alpha\tau.$$

Beim Zusammenwirken beider Ursachen haben wir:

$$\frac{d\Delta s_v}{ds_v} = \alpha\tau - \frac{\sigma}{E}, \qquad 5)$$

und nach Einsetzen von 2), 4):

$$\sigma = E\left(v\frac{d\Delta\varphi}{ds} - \frac{d\Delta s}{ds} + \alpha\tau\right)\frac{r}{r+v}. \qquad 6)$$

Dies ist die Normalspannung bei v im Querschnitt x, das heisst auch die Zug- oder Druckkraft längs einer Faser vom Querschnitt 1 parallel der Stabaxe bei x, v. Einer Faser vom Querschnitt dF entspricht eine dF-mal so grosse Kraft, und für sämmtliche Fasern, welche im Querschnitt x von der Grösse F endigen, hat man die Resultate dieser Kräfte, das heisst die ganze Normalkraft im Querschnitte x:

$$N_x = \int\sigma\,dF = E\left[\frac{d\Delta\varphi}{ds}\int\frac{rv}{r+v}\,dF - \left(\frac{d\Delta s}{ds} - \alpha\tau\right)\int\frac{r}{r+v}\,dF\right], \qquad (7$$

wobei angenommen ist, dass wie E auch $\alpha\tau$ bei allen Elementen des Querschnitts als gleich gelten soll.

Jede ein Flächenelement dF afficirende Kraft σdF erzeugt hinsichtlich der Axschicht ein Moment $\sigma dF.v$, und da die in der Ebene des Querschnittes wirkenden Kräfte kein Moment in Bezug auf die Axschicht des letzteren ergeben, so ist das resultirende Angriffsmoment bei x:

$$M_x = \int\sigma\,dF.v = E\left[\frac{d\Delta\varphi}{ds}\int\frac{rv^2}{r+v}\,dF - \left(\frac{d\Delta s}{ds} - \alpha\tau\right)\int\frac{rv}{r+v}\,dF\right] \qquad 8)$$

Dasselbe ist hierach als positiv angenommen, wenn es die ursprüngliche Krümmung zu vermindern strebt.

Die drei letzten Gleichungen wollen wir etwas umformen. Man hat:

$$\frac{rv}{r+v} = v - \frac{v^2}{r+v},$$

$$\frac{r}{r+v} = 1 - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{v^2}{r+v},$$

und damit nach 7), 8):

$$\frac{N_x}{E} = \frac{d\Delta\varphi}{ds}\left(\int v\,dF - \int\frac{v^2}{r+v}dF\right) - \left(\frac{d\Delta s}{ds} - \alpha\tau\right)\left(\int dF - \frac{1}{r}\int v\,dF + \frac{1}{r}\int\frac{v^2}{r+v}dF\right)$$

$$\frac{M_x}{E} = \frac{d\Delta\varphi}{ds}\,r\int\frac{v^2}{r+v}\,dF - \left(\frac{d\Delta s}{ds} - \alpha\tau\right)\left(\int v\,dF - \int\frac{v^2}{r+v}\,dF\right),$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$K = r\int\frac{v^2}{r+v}\,dF \tag{9}$$

gesetzt und

$$\int dF = F, \qquad \int v\,dF = 0$$

berücksichtigt werden:

$$\frac{N_x}{E} = -\frac{d\Delta\varphi}{ds}\frac{K}{r} - \left(\frac{d\Delta s}{ds} - \alpha\tau\right)\left(\frac{K}{r^2} + F\right) \tag{10}$$

$$\frac{M_x}{E} = \frac{d\Delta\varphi}{ds}K + \left(\frac{d\Delta s}{ds} - \alpha\tau\right)\frac{K}{r}, \tag{11}$$

woraus:

$$\frac{d\Delta s}{ds} = \alpha\tau - \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{1}{EF} = Y, \tag{12}$$

$$\frac{d\Delta\varphi}{ds} = \frac{M_x}{EK} + \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{1}{EFr} = Z, \tag{13}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in 6):

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{M_x}{EK}\frac{rv}{r+v}. \tag{14}$$

Vereinfachungen dieser Formeln siehe § 6.

§ 4. Bemerkungen zu den Biegungsformeln.

Die im vorigen Paragraphen angeführten Voraussetzungen der technischen Biegungstheorie nebst den darauf beruhenden Beziehungen haben sich in einzelnen Fällen auch nach der allgemeinen Elasticitätstheorie isotroper fester Körper als annähernd gültig erwiesen, und mancherlei Versuche und Beobachtungen wie Jahrzehnte alte Erfahrungen mit den auf Grund jener Beziehungen berechneten Trägern scheinen für ihre Zulässigkeit bei zahlreichen Ermittelungen über Balken und Bogen von rationeller Anordnung zu sprechen. In manchen Fällen jedoch genügte die gewöhnliche Biegungstheorie nicht. So konnten bei gebogenen Gusseisenstäben wesentliche Abweichungen gegen dieselbe festgestellt werden, was begreiflich ist, da für Gusseisen die Voraussetzung *c*), gleiche und konstante Elasticitätsmoduln für Zug und Druck, auch nicht annähernd erfüllt zu sein pflegt. Bei gewissen Ableitungen, z. B. bei Bestimmung des Elasticitätsmoduls aus Biegungsversuchen mit eisernen Balken, musste der Einfluss der Schubkräfte in den Querschnittselementen auf die Biegung berücksichtigt werden, welcher im vorigen § durch die Voraussetzung *b*) ausgeschlossen wurde,

u. s. w.* Indessen werden elastische Bogenträger nicht aus Gusseisen, sondern stets aus Schweisseisen, Flusseisen oder Stahl hergestellt (über Gewölbe s. § 18, 19), und es kommt bei ihnen fast ausschliesslich der Elasticitätsmodul für Druck in Betracht (s. z. B. die Tabelle in Abschnitt IV J), während die Schubkräfte im Allgemeinen weit kleiner als bei horizontalen Balkenträgern sind, sodass sie bei der Berechnung vollwandiger Bogen gewöhnlich überhaupt nicht berücksichtigt wurden.**

Auch bezüglich der Biegungsfestigkeit scheinen die Verhältnisse für Bogenträger nicht ungünstiger als für Balkenträger zu liegen. Auf Biegung beanspruchte Balken brachen bei den sorgfältigsten der bisherigen Versuche meist infolge Nachgebens auf der Zugseite, oder sie verloren ihre Tragfähigkeit durch Strecken und Ausbiegen***, wobei die gewöhnlichen Biegungsgleichungen schon wegen Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze nicht mehr zu gelten brauchen. Setzt man gleichwohl die grösste aus diesen Formeln folgende Normalspannung im Augenblicke des Nachgebens $\sigma = \beta z$, unter z die durch Zerreissversuche ermittelte Zugfestigkeit des Gurtmaterials verstanden, so lässt sich vorläufig etwa setzen: für gewalzte Balken aus Flusseisen und Schweisseisen $\beta = 1$, für genietete Blechbalken aus Schweisseisen $\beta = 0{,}9$, für ebensolche aus weichem Flusseisen $\beta = 0{,}8$, wobei selbstverständlich nur bestes Material in Betracht gezogen ist. Bei Berechnung der σ, aus welchen vorstehende nicht zu günstige β entnommen wurden, kam das Trägheitsmoment oder Widerstandsmoment mit Rücksicht auf Nietverschwächung zur Verwendung. Dem Nachgeben der Balken auf der Zugseite gegenüber könnte es als günstig erscheinen, dass bei Bogen keine oder nur geringe Zugspannungen σ aufzutreten pflegen. Doch hat man umsomehr für gehörige Sicherheit gegen Einknickungen und seitliche Ausbiegungen zu sorgen, wie ja eine Reihe ungünstiger Erfahrungen bei eisernen Brücken in neuerer Zeit auf mangelhafte Druckglieder und ungenügende Querversteifungen zurückzuführen waren.

In § 3 wurde vorausgesetzt, dass in jeder Senkrechten zur Trägerebene gleiche Biegungs- und Beanspruchungsverhältnisse bestehen. Für den dabei angenommenen und soweit möglich zu realisirenden Fall, dass alle äusseren Kräfte in der Trägerebene wirken, folgt hieraus eine Bedingung für die Anordnung der Querschnitte. Da das Moment sämmtlicher Normalkräfte eines Querschnitts in Hinsicht der Trägerebene 0 sein muss, so hat man:

$$\int \sigma \, dF \cdot u = 0,$$

* Näheres über die hier angedeuteten Fragen nebst entsprechender Literatur siehe Lueger, Lexikon der gesammten Technik, Artikel Biegung, Biegungselasticität, Biegungsfestigkeit, Blechträger, Elasticitätsmodul. Stuttgart 1895.

** Am konsequentesten berücksichtigt ihren Einfluss Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications, Turin 1880. S. 141, 264, 418, 433 (deutsch von Hauff, Wien 1886, S. 135, 261, 419, 434), wobei aber ebenfalls für praktische Zwecke Vernachlässigungen nöthig werden.

*** Vergl. Tetmajers Mittheilungen, Heft IV, Zürich 1890, S. 82, 268; Tetmajer, Die Baumechanik, II. Theil, 1. Hälfte, Zürich 1889, S. 256.

unter u die positive oder negative Entfernung eines Querschnittselements dF von der Trägerebene verstanden. Durch Substitution des Ausdrucks § 3, 14) folgt

$$\frac{N_x}{F}\int u\,dF + \frac{M_x}{Fr}\int u\,dF + \frac{rM_x}{K}\int \frac{uv}{r+v}\,dF = 0,$$

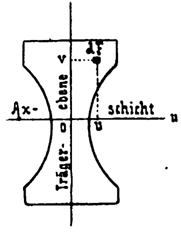


Fig. 18.

oder weil in Hinsicht der v-Axe als Schwerlinie des Querschnitts das statische Moment $\int u\,dF = 0$:

$$\int \frac{uv}{r+v}\,dF = 0. \qquad 1)$$

Dieser Bedingung wird z. B. genügt, wenn der Querschnitt symmetrisch zur Trägerebene angeordnet ist (Fig. 18). Werden alle v gegen r vernachlässigt, so liefert 1):

$$\int uv\,dF = 0, \qquad 2)$$

das Centrifugalmoment des Querschnitts hinsichtlich der Axen u, v soll verschwinden, diese müssen also die Hauptträgheitsaxen des Querschnitts sein, was ebenfalls zutrifft, wenn die v-Axe Symmetrielinie desselben ist. Selbstverständlich wird man den Querschnitt stets symmetrisch anordnen und danach trachten, dass auch die Schwerlinien anschliessender Glieder in der Symmetrieebene liegen (Vertikalen, Füllungsstäbe) oder darin zum Schnitte kommen (horizontale und vertikale Querverbände), entsprechend der allgemeinen Konstruktionsregel, dass sich die Schwerlinien zusammentreffender Stäbe in einem Punkte schneiden sollen, eine Regel, welche z. B. bei der Mönchensteiner Brücke bezüglich der Gurtungen und Füllungsglieder unberücksichtigt geblieben war.

§ 5. Wiener Versuche mit einem elastischen Bogen.

In neuester Zeit wurden von einem durch den Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Verein zur Prüfung von Gewölben gewählten Ausschuss (vergl. § 19) Versuche mit einem Bogen aus Martinflusseisen angestellt.* Das Eisen zeigte bei Zugversuchen mit 6 Probestäben aus Winkeleisen, Stehblechen und Gurtlamellen (je 2) folgende Eigenschaften: Elasticitätsmodul 2 080 000 bis 2 200 000, im Mittel 2 145 000 kg per qcm; Proportionalitätsgrenze 1 720 bis 1 840, im Mittel 1 770 kg; Zugfestigkeit 3 760 bis 4 210, im Mittel 4 040 kg; Bruchdehnung 19,5 bis 27,0, im Mittel 24,2 %; Kontraktion 0,51 bis 0,60, im Mittel 0,55 %. Der Bogen bestand aus zwei Bogenträgern mit Kämpfergelenken, ohne Scheitelgelenk, von $l = 23$ m Spannweite und $f = 4{,}556$ m Pfeil der Axe, in Entfernung von 1,8 m, welche durch kräftige Querverbindungen vereinigt waren. Die Bogenaxe war einem Parabelbogen von den erwähnten l, f eingeschrieben und zwar so, dass die auf einer Bogenhälfte angeordneten Vertikalen (ohne Diagonalen) bei der Mitte beginnend, in Ent

* Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895. S. 1, 17, 37, 43, 70, 89, 98.

fernungen von 2,25 m auf die Bogenecken trafen. Bogenhöhe nur 0,36 m. Als Belastung neben dem Eigengewicht von etwa $g = 270$ kg per Meter Träger wurden über jenen Vertikalen Eisenbahnschienen bis zur Bogenmitte aufgebracht. Die Querschnitte beider Bogenträger bestanden aus einer Vertikalplatte von 30/1 cm, vier Winkeleisen von 8/8/1 cm, und 1 bis 3 Horizontalplatten von 20/0,8 cm für jede Gurtung, derart, dass bei einer einseitigen Verkehrslast von $p = 1500$ kg per Meter Träger, einschliesslich der Vertikalen etc., rechnungsmässige Normalspannungen von ca. 750 kg per qcm entstehen und die Träger beim Aufbringen der verfügbaren Schienen von $2p = 18000$ kg per m sicher zerstört werden sollten.

Die Versuche ergaben:

	Proportionalitätsgrenze	Stauchgrenze	seitliches Ausknicken
für $p =$	4350,	6410,	7640 kg per m,

entsprechend grössten Normalspannungen nach der üblichen Berechnung, jedoch ohne den Beitrag des verhältnissmässig geringen Eigengewichts und ohne Rücksicht auf Nietverschwächungen:

$\sigma =$	1730,	2550,	3030 kg per qcm,

wobei Zugspannungen bis zu $^4/_5$ der Druckspannungen auftraten. Die genauen Erhebungen ergaben, dass der Bogen an keiner Stelle gerissen und keine Niete abgescheert war. Man würde also etwa, wie in § 4 für Balken aus weichem Flusseisen $\beta = 0,8$ setzen können.

Da nur die ganzen Formänderungen (elastische plus bleibende) gemessen wurden, so konnte der Elasticitätsmodul nicht berechnet werden. Bei Anwendung von Formeln für elastische Formänderungen auf die innerhalb der Proportionalitätsgrenze erhaltenen ganzen Formänderungen ergaben die vertikalen Verschiebungen $E = 1\,860\,000$ kg, die horizontalen $E = 1\,793\,000$ kg, beide zusammen im Mittel $E = 1\,826\,500$ kg per qcm. Nach dem Berichte waren die bleibenden Verschiebungen gross genug, um die Differenz dieses Werthes gegen den durch Zugversuche erhaltenen Elasticitätsmodul $E = 2\,145\,000$ zu erklären.

Die Schlussfolgerungen aus den Versuchen fasst Professor Brick als einer der Berichterstatter wie folgt zusammen:

„1. Die durch unmittelbare Messungen erhobenen Verschiebungen einzelner Punkte der Bogenaxe erwiesen für die ersten Belastungsstufen die Giltigkeit des Proportionalitätsgesetzes zwischen Belastung und Verschiebung und bestätigen die auf Grund der Theorie des „elastischen Bogenträgers mit Kämpfergelenken" berechneten diesbezüglichen Ergebnisse.

2. Die aus den Diagrammen der Verschiebungen entnommenen Belastungen für die Proportionalitätsgrenze ergaben für die berechneten grössten Randspannungen in den gefährlichen Querschnitten Werthe, welche mit den Ergebnissen der Festigkeitsuntersuchung an Probestäben aus dem Materiale der Träger in guter Uebereinstimmung stehen.

3. Das Widerstandsvermögen der Versuchsträger wurde durch eine Belastung erschöpft, für welche die berechneten grössten Randspannungen der gefährlichen Querschnitte rund 3000 kg per qcm betrugen. Hierbei gaben die Untergurte der unbelasteten Seite durch seitliches

Ausknicken nach; die Gurtlamellen daselbst zeigten insbesondere zwischen den Nieten an den einspringenden Polygonecken, zunächst dem gefährlichen Querschnitte, starke Faltenbildung.

Durch diese Ergebnisse finden die auf Grund der Theorie des „elastischen Bogenträgers mit Kämpfergelenken“ berechneten Resultate eine praktische Bestätigung, womit der beabsichtigte Zweck des Versuches erreicht worden ist.“

§ 6. Krümmungsmoment und Trägheitsmoment. Vereinfachungen. Biegungsarbeit.

Wir bleiben bei den Bezeichnungen des § 3. Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die Axschicht, bekanntlich definirt durch

$$J = \int v^2 dF, \qquad 1)$$

ist lediglich vom Querschnitte selbst abhängig, während die durch § 3, 9) eingeführte Grösse

$$K = r \int \frac{v^2}{r+v} dF \qquad 2)$$

auch vom Krümmungsradius der Stabaxe beim fraglichen Querschnitte abhängt und deshalb kurz Krümmungsmoment heissen soll. Für gerade Stäbe ist wegen $r = \infty$ das Krümmungsmoment gleich dem Trägheitsmoment.

Mit Rücksicht auf die Reihe

$$\frac{r}{r+v} = \frac{1}{1+\frac{v}{r}} = 1 - \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} - \frac{v^3}{r^3} + \cdots$$

können wir nach 2) das Krümmungsmoment auch ausdrücken:

$$K = \int v^2 \left(1 - \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} - \frac{v^3}{r^3} + \cdots\right) dF, \qquad 3)$$

und speciell für den gewöhnlichen Fall zur Axschicht symmetrischer Querschnitte, weil die v auf beiden Seiten der Axschicht von verschiedenen Vorzeichen sind:

$$K = \int v^2 \left(1 + \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^4}{r^4} + \cdots\right) dF. \qquad 4)$$

Setzen wir allgemein

$$K = \varphi J, \qquad 5)$$

und bezeichnet in der folgenden Zusammenstellung h die ganze Höhe eines Querschnittes (Fig. 19), so ergeben sich beispielsweise die folgenden φ (siehe die Berechnung in Aufgabe 2—4):

für $\frac{r}{h}$	Kreis und Ellipse	Quadrat und Rechteck	I-Querschnitt mit $b_1 = 0,9\ b,\ h_1 = 0,9\ h$
1	1,1452	1,1833	1,2614
2	1,0325	1,0393	1,0541
3	1,0141	1,0170	1,0233
4	1,0079	1,0095	1,0129
5	1,0050	1,0060	1,0082
6	1,0035	1,0042	1,0057
7	1,0026	1,0031	1,0042
8	1,0020	1,0023	1,0032
9	1,0015	1,0018	1,0025
10	1,0012	1,0015	1,0021
15	1,0006	1,0007	1,0009
20	1,0003	1,0004	1,0005
50	1,0000	1,0001	1,0001

Bei Bogenträgern für eiserne Brücken und Dächer pflegt $r:h$ noch grösser als 50 zu sein, sodass dann jedenfalls J an Stelle von K gesetzt werden kann. Damit vernachlässigt man in 2) alle v gegen r. Geschieht dies auch in Gleichung 14) des § 3, so treten an Stelle der dortigen Gleichungen 12)—14) die folgenden:

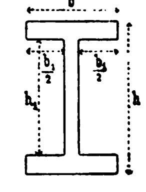


Fig. 19.

$$Y = \frac{d\Delta s}{ds} = \alpha\tau - \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{1}{EF}, \tag{5}$$

$$Z = \frac{d\Delta\varphi}{ds} = \frac{M_x}{EJ} + \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{1}{EFr}, \tag{6}$$

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{M_x}{J}\,v. \tag{7}$$

Vielfach werden in diesen Gleichungen noch die Glieder mit r im Nenner gegen die übrigen vernachlässigt, womit entstehen:

$$Y = \frac{d\Delta s}{ds} = \alpha\tau - \frac{N_x}{EF}, \tag{8}$$

$$Z = \frac{d\Delta\varphi}{ds} = \frac{M_x}{EJ}, \tag{9}$$

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J}\,v, \tag{10}$$

doch beabsichtigen wir von den beiden ersten Formeln im Folgenden keinen Gebrauch zu machen, während die Zulässigkeit der letzteren mit Rücksicht auf praktische Fälle zu beurtheilen ist (vergl. Beisp. 5, S. 30).

Biegungsarbeit. Als Biegungsarbeit bezeichnet man diejenige Arbeit, welche zur Ueberwindung der inneren Kräfte während elastischer Biegungen nöthig ist. Da wir von derselben keinen Gebrauch machen werden, so genüge es, ihren Ausdruck für den Fall anzugeben, dass wie in 8)—10) alle v gegen r und die Glieder mit r im Nenner gegen die übrigen vernachlässigt werden, wie dies bis jetzt bei Verwendung der Biegungsarbeit stets geschehen ist. Man hat dann für ein Stabstück zwischen zwei beliebigen Querschnitten 0 und x:

$$B = \int_0^x \left(\frac{M_x^2}{2EJ} + \frac{N_x^2}{2EF} + \frac{kT_x^2}{2GF} + \alpha \int_0^\tau N_x d\tau \right) ds, \qquad 11)$$

worin G der Schubelasticitätsmodul, k ein vom Querschnitt abhängiger Koefficient, welcher für Quadrat und Rechteck $^6/_5$, für Kreis und Ellipse $^{10}/_9$, für den I-Querschnitt und zur Axschicht symmetrische Blechträgerquerschnitte näherungsweise:

$$k = \frac{F}{hd},$$

unter h die ganze Trägerhöhe, unter d die Dicke der Vertikalplatte verstanden.* Die virtuelle Biegungsarbeit ist die Biegungsarbeit, welche sich ergeben würde, wenn die erwähnten Verschiebungswiderstände konstant wie am Ende der Verschiebungen wären. Sie drückt sich im oben erwähnten Falle aus:

$$\mathfrak{B} = \int_0^x \left(\frac{M_x^2}{EJ} + \frac{N_x^2}{EF} + \frac{kT_x^2}{GF} + \alpha \tau N_x \right) ds, \qquad 12)$$

wonach für $N_x = 0$ (horizontale Balkenträger) oder $\tau = 0$:

$$\mathfrak{B} = 2B.$$

Meist blieben bisher in 11), 12) die von der Transversalkraft T_x herrührenden Glieder unberücksichtigt, womit auch der Koefficient der Schubwirkung k überflüssig wurde.**

Aufgabe 3 mit Beispiel 2. Trägheitsmoment und Krümmungsmoment des Rechtecks.

Es sollen J, K und das Verhältniss $K:J$ für den rechteckigen Querschnitt der Seiten b, h berechnet werden, wenn die Axschicht parallel der Seite b liegt.

Wählen wir $dF = b\,dv$ (Fig. 20), so hat man nach § 5, 1), 2) mit $e = \frac{h}{2}$ das Trägheitsmoment:

$$J = b = \int_{-e}^{e} v^2\, dv,$$

und das Krümmungsmoment:

$$K = b\,r \int_{-e}^{e} \frac{v^2}{r+v}\, dv = b\,r \int_{-e}^{e} \left(v - r + \frac{r}{r+v} \right) dv.$$

Fig. 20.

Die Ausführung der Integrationen ergibt:

$$J = \frac{b\,e^3}{3} = \frac{b\,h^3}{12}, \qquad 1)$$

$$K = b\,r \left[\frac{v^2}{2} - r\,v + r^2 \operatorname{logn} (v + r) \right]_{-e}^{e},$$

$$K = b\,r^3 \left(\operatorname{logn} \frac{r+e}{r-e} - \frac{2e}{r} \right). \qquad 2)$$

Mit Rücksicht auf die bekannte Reihe

* Weiteres über k siehe: Lueger, Lexikon der gesammten Technik, Artikel Biegung I, Stuttgart 1895.

** Ueber die Biegungsarbeit und ihre Anwendung siehe: Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques etc., Turin 1880, pag. 141 (deutsche Ausgabe S. 135); Weyrauch, Aufgaben zur Theorie elastischer Körper, Leipzig 1885, S. 204—225, 247—253; Müller-Breslau, die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1893, S. 70.

$$\text{logn}\,\frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}} = 2\left[\frac{e}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^5 + \cdots\right]$$

kann man auch schreiben:

$$K = \frac{b\,e^3}{3}\left[1 + \frac{3}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{3}{9}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \cdots\right], \qquad 3)$$

sodass wegen 1):

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{3}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{3}{9}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \cdots, \qquad 4)$$

oder auch mit $e = \frac{h}{2}$:

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{3}{20}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{3}{112}\left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{1}{192}\left(\frac{h}{r}\right)^6 + \frac{3}{2816}\left(\frac{h}{r}\right)^8 + \frac{3}{13312}\left(\frac{h}{r}\right)^{10} + \cdots \qquad 5)$$

Nach dieser Gleichung erhalten wir z. B. für $\frac{r}{h} = 3$:

$$\frac{K}{J} = 1 + 0{,}016\,667 + 0{,}000\,331 + 0{,}000\,007 = 1{,}01700.$$

Die Glieder vom fünften an haben hier keinen Einfluss mehr auf die ersten fünf Dezimalen. In gleicher Weise sind die übrigen in § 6 für das Quadrat und Rechteck gegebenen $K:J$ berechnet.

Aufgabe 4 mit Beispiel 3. Trägheitsmoment und Krümmungsmoment der Ellipse.

Es sollen J, K und das Verhältniss $K:J$ für den elliptischen Querschnitt der Halbaxen a, b berechnet werden, wenn die Axschicht durch die Axe $2b$ geht.

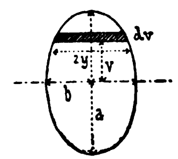


Fig. 21.

Bei den in Fig. 21 ersichtlichen Bezeichnungen ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$a^2y^2 + b^2v^2 = a^2b^2,$$

wonach

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-v^2}$$

und der Inhalt des schraffirten Flächenelements

$$dF = 2y\,dv = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2-v^2}\;v^2\,dv.$$

Die Gleichungen 1) und 4) des § 6 liefern damit:

$$J = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-v^2}\;v^2\,dv,$$

$$K = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-v^2}\;v^2\left(1 + \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^4}{r^4} + \cdots\right)dv.$$

Da für die zu integrirende Funktion in beiden Fällen $f(-v) = f(v)$ ist so können wir anstatt des Integrals von $-a$ bis a das Doppelte des Integrals von 0 bis a setzen. Für beliebige gerade m hat man:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-v^2}\;v^m\,dv = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m+2)}\,\frac{\pi}{2}\,a^{m+2}.$$

Es ergeben sich damit:

$$J = 2\,\frac{2b}{a}\,\frac{1}{2\cdot 4}\,\frac{\pi}{2}\,a^4.$$

$$K = 2\,\frac{2b}{a}\,\frac{1}{2\cdot 4}\,\frac{\pi}{2}\,a^4\left(1 + \frac{3}{6}\,\frac{a^2}{r^2} + \frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}\,\frac{a^4}{r^4} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 10}\,\frac{a^6}{r^6} + \cdots\right),$$

das heisst:

$$J = \frac{\pi\,b\,a^3}{4}, \qquad 1)$$

$$K = \frac{\pi b a^3}{4}\left(1 + \frac{3}{6}\,\frac{a^2}{r^2} + \frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}\,\frac{a^4}{r^4} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 10}\,\frac{a^6}{r^6} + \cdots\right). \qquad 2)$$

Nach diesen Ausdrücken ist:

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{3}{6}\frac{a^2}{r^2} + \frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}\frac{a^4}{r^4} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 10}\frac{a^6}{r^6} + \cdots, \qquad 3)$$

oder mit $a = \frac{h}{2}$:

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{5}{256}\left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{7}{2048}\left(\frac{h}{r}\right)^6 + \frac{31}{32768}\left(\frac{h}{r}\right)^8 + \cdots. \qquad 4)$$

Diese Gleichung liefert z. B. für $\frac{r}{h} = 5$:

$$\frac{K}{J} = 1 + 0{,}005 + 0{,}000\,03 = 1{,}005\,03.$$

Die Glieder in 4) vom vierten an haben für dieses und für alle grösseren $r:h$ entsprechenden $K:J$ keinen Einfluss auf die fünf ersten Dezimalen. In gleicher Weise wie hier sind die übrigen in § 6 für den Kreis und die Ellipse angeführten $K:J$ berechnet.

Aufgabe 5 mit Beispiel 4. Trägheitsmoment und Krümmungsmoment von Figurendifferenzen (I-Querschnitt u. s. w.).

Es sollen J, K und das Verhältniss $K:J$ für Querschnitte ausgedrückt werden, welche wie der I-Querschnitt und die Blechträgerquerschnitte der Differenz verschiedener Figuren entsprechen.

Es seien J_v, K_v das Trägheitsmoment und Krümmungsmoment der vollen Figur und J_h, K_h diejenigen des Hohlraums, durch dessen Abzug von der vollen Figur der Querschnitt entsteht (Fig. 22). Dann hat man das Trägheitsmoment und Krümmungsmoment des letzteren:

$$J = J_v - J_h, \qquad K = K_v - K_h. \qquad 1)$$

und wenn gesetzt werden

$$K_v = \varphi J_v, \qquad K_h = \psi J_h \qquad 2)$$

Fig. 22.

das verlangte Verhältniss:

$$\frac{K}{J} = \frac{\varphi J_v - \psi J_h}{J_v - J_h}. \qquad 3)$$

Fig. 23.

Haben wir beispielsweise einen I-Querschnitt, [-Querschnitt oder rechteckigen Ringquerschnitt (Fig. 23 bis 25), für welche $b_1 = m\,b$, $h_1 = n\,h$ gesetzt werden mögen, dann gelten nach A 3, 1):

$$J_v = \frac{b\,h^3}{12}, \qquad J_h = m\,n^3\,\frac{b\,h^3}{12}$$

und damit zufolge 3):

$$\frac{K}{J} = \frac{\varphi - \psi\,m\,n^3}{1 - m\,n^3}, \qquad 4)$$

worin nach A 3, 5):

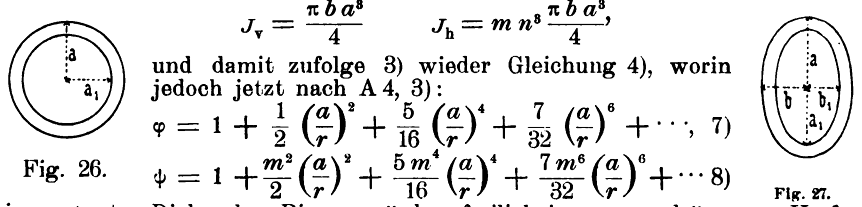
$$\varphi = 1 + \frac{3}{20}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{3}{112}\left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{1}{192}\left(\frac{h}{r}\right)^6 + \cdots \qquad 5)$$

$$\psi = 1 + \frac{3n^2}{20}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{3n^4}{112}\left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{n^6}{192}\left(\frac{h}{r}\right)^6 + \cdots \qquad 6)$$

Fig. 24. Fig. 25.

Handelt es sich dagegen um einen kreisförmigen oder elliptischen Ringquerschnitt (Fig. 26, 27), für welchen gesetzt werden $b_1 = m\,b$, $a_1 = n\,a$, so gelten nach A :4,1)

$$J_v = \frac{\pi\,b\,a^3}{4} \qquad J_h = m\,n^3\,\frac{\pi\,b\,a^3}{4},$$



und damit zufolge 3) wieder Gleichung 4), worin jedoch jetzt nach A 4, 3):

$$\varphi = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{7}{32}\left(\frac{a}{r}\right)^6 + \cdots, \qquad 7)$$

$$\psi = 1 + \frac{m^2}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{5\,m^4}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{7\,m^6}{32}\left(\frac{a}{r}\right)^6 + \cdots \qquad 8)$$

Fig. 26. Fig. 27.

Bei constanter Dicke des Ringes würden freilich innerer und äusserer Umfang

nicht gleichzeitig genaue Ellipsen sein können, doch werden die Formeln im Allgemeinen auch für den elliptischen Ring genügen.

Es soll nun z. B. das Verhältniss $K : J$ für einen I-Querschnitt von $b_1 = 0{,}9\,b$, $h_1 = 0{,}9\,h$ berechnet werden. Mit $m = n = 0{,}9$ erhält man für $\frac{r}{h} = 4$ nach 5), 6):

$$\varphi = 1 + 0{,}009\,375 + 0{,}000\,105 = 1{,}009\,48$$
$$\psi = 1 + 0{,}007\,594 + 0{,}000\,068 = 1{,}007\,66$$

und nach 4):

$$\frac{K}{J} = \frac{1{,}009\,48 - 1{,}007\,66 \cdot 0{,}9^4}{1 - 0{,}9^4} = 1{,}0129.$$

In gleicher Weise sind die übrigen in § 6 für den I-Querschnitt angegebenen $K : J$ berechnet.

§ 7. Kleine Formänderungen. Naviersche Biegungsgleichung.

Die in §§ 3, 4 abgeleiteten Gleichungen gelten unter den dortigen Voraussetzungen für beliebig grosse elastische Deformationen. Es handle sich nun aber wie schon in §§ 1, 2 und in der Folge immer um so kleine Formänderungen, dass die Aenderungen der Stababmessungen gegen deren anfängliche, dem spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur entsprechende Werthe vernachlässigt werden dürfen. Wir wählen in der Trägerebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem in fester Lage gegen die anfängliche Gruppirung der Stabpunkte und verstehen unter den Koordinaten x, y eines Querschnitts die anfänglichen Koordinaten seines in der Stabaxe gelegenen Schwerpunktes, unter φ den anfänglichen Winkel der Stabaxe mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bei x (Fig. 28).

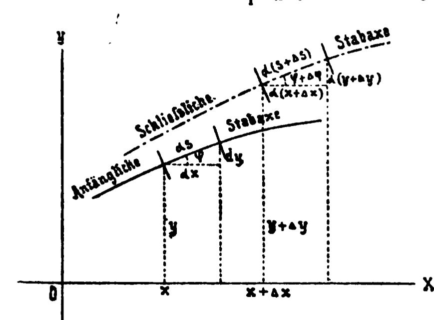


Fig. 28.

Entsprechend der Ableitung in § 3 seien im anfänglichen Zustande zwei Querschnitte angenommen, der eine bei x, y, um die Axlänge s von einem beliebigen Ausgangspunkte entfernt, der andere bei $x + dx$, $y + dy$, um die Axlänge ds weiter. Bezeichnen Δx, Δy, Δs, $\Delta\varphi$ die mit der Deformation verbundenen Aenderungen von x, y, s, φ, so sind die Aenderungen von

$$x + dx, \quad y + dy, \quad s + ds$$

nach dem Taylorschen Lehrsatze (vergl. S. 14):

$$d\,(x + \Delta x), \qquad d\,(y + \Delta y), \qquad d\,(s + \Delta s),$$

und man hat (Fig. 28):

$$d\,(x + \Delta x) = d\,(s + \Delta s) \cos\,(\varphi + \Delta\varphi),$$
$$d\,(y + \Delta y) = d\,(s + \Delta s) \sin\,(\varphi + \Delta\varphi).$$

Werden die Deformationen so klein vorausgesetzt, dass $\cos \Delta\varphi = 1$, $\sin \Delta\varphi = \Delta\varphi$ gesetzt werden dürfen, so liefern vorstehende Gleichungen mit

$$\cos\,(\varphi + \Delta\varphi)) = \cos\varphi \cos\Delta\varphi - \sin\varphi \sin\Delta\varphi = \frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds}\Delta\varphi,$$

$$\sin\,(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi \cos\Delta\varphi + \cos\varphi \sin\Delta\varphi = \frac{dy}{ds} + \frac{dx}{ds}\Delta\varphi$$

nach Reduktion:

$$d\Delta x = -\Delta\varphi\, dy + \frac{d\Delta s}{ds}\, dx - \frac{d\Delta s}{ds}\, dy \cdot \Delta\varphi,$$

$$d\Delta y = \Delta\varphi\, dx + \frac{d\Delta s}{ds}\, dy + \frac{d\Delta s}{ds}\, dx \cdot \Delta\varphi.$$

Wegen der Kleinheit von $\Delta\varphi$ verschwinden die letzten Glieder dieser Gleichungen gegen die vorhergehenden, wir erhalten:

$$d\Delta x = -\Delta\varphi\, dy + \frac{d\Delta s}{ds}\, dx, \tag{1}$$

$$d\Delta y = \Delta\varphi\, dx + \frac{d\Delta s}{ds}\, dy, \tag{2}$$

worin, wenn die zwischen x und $x + dx$ eintretenden Zunahmen $d\Delta\varphi$, $d\Delta s$ von $\Delta\varphi$, Δs nur von den Spannungen und Temperaturänderungen zwischen jenen Querschnitten herrühren:

$$\frac{d\Delta s}{ds} = Y, \qquad \frac{d\Delta\varphi}{ds} = Z, \tag{3}$$

unter Y, Z die Ausdrücke § 3, 12) 13) verstanden, welche in § 6 vereinfacht wurden.

Naviersche Biegungsgleichung. Es handle sich um einen anfänglich geraden Stab. Wird die Abscissenaxe parallel oder so nahe einer Parallelen zur Stabaxe angenommen, dass $ds = dx$ gesetzt werden darf, dann folgt aus § 3, 13) wegen $r = \infty$, $K = J$:

$$\frac{d\Delta\varphi}{dx} = Z = \frac{M_x}{EJ}. \tag{4}$$

Werden die y im vorliegenden Falle auf die schliessliche Stabaxe bezogen (vor der Deformation wären bei einer der Stabaxe parallelen Abscissenaxe alle y gleich gross), dann hat man für die betrachteten kleinen Formänderungen:

$$\Delta\varphi = \operatorname{tg}\Delta\varphi = \frac{dy}{dx},$$

und damit nach 4):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ}. \tag{5}$$

Dies ist die Naviersche Biegungsgleichung, welche besonders in der Theorie der horizontalen Balkenträger eine Rolle spielt. Obige Ableitung zeigt, dass sie auch bei Auftreten von Axialkräften und Temperaturänderungen giltig bleibt, vorausgesetzt, dass letztere für je einen ganzen Querschnitt gleich gross sind.*

§ 8. **Normalspannungen. Stützlinie. Kernlinien.**

Die Gleichungen der §§ 3, 4 gelten unter den angeführten Voraussetzungen für beliebige Stäbe einfacher Krümmung, im Folgenden setzen wir die hier in erster Linie interessirenden Sprengbogen mit Krümmung nach oben voraus.

---

* Erweiterung mit Rücksicht auf ungleichmässige Temperaturänderungen und den Einfluss der Transversalkräfte siehe Lueger, Lexikon der gesammten Technik, Bd. II, Artikel Biegung I, Stuttgart 1895.

Die Resultante aller Normalkräfte $\sigma\, dF$ auf die einzeln Flächenelemente dF eines Querschnittes x wurde durch N_x bezeichnet. Da nun die $\sigma\, dF$ in Hinsicht der Axschicht das Moment M_x liefern, so muss N_x hinsichtlich derselben das gleiche Moment ergeben; man hat, wenn c die Entfernung des Angriffspunktes von N_x von der Axschicht bedeutet (Fig. 29):

$$M_x = c\, N_x, \qquad c = \frac{M_x}{N_x}. \qquad 1)$$

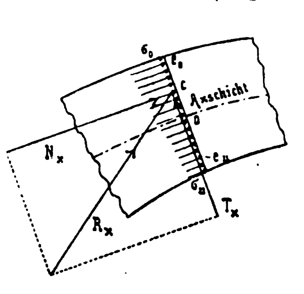


Fig. 29.

c ist positiv, d. h. der Angriffspunkt von N_x liegt oberhalb der Axschicht, wenn M_x und N_x von gleichen Vorzeichen sind. c ist negativ und der Angriffspunkt von N_x liegt unterhalb der Axschicht, wenn M_x und N_x von verschiedenen Vorzeichen sind. Denkt man sich die Angriffspunkte der N_x für alle Querschnitte ermittelt, so hat man in ihrer Gesammtheit eine stetige Linie, welche **Stützlinie** genannt wird. Da M_x, N_x von der Belastung abhängen, so ändert sich mit der Belastung eines Bogens im Allgemeinen auch seine Stützlinie.

Die Normalspannung bei x, v ist nach § 6, 7) bei der hier stets zulässigen Vernachlässigung der v gegen den Krümmungsmodus r:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{M_x}{J} v = \frac{N_x}{F} \left(1 + \frac{c}{r} + \frac{Fc}{J}\right) v. \qquad 2)$$

Dieselbe ändert sich also proportional den Entfernungen v von der Axschicht, welche nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet wurden. Die äussersten Werthe in jedem Querschnitt ergeben sich also im obersten und untersten Querschnittselement, für welche mit $v = e_o$ und $v = -e_u$:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{J} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{M_x}{J} e_u, \qquad 3)$$

$$\sigma_u = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} - \frac{M_x}{J} e_u, \qquad 4)$$

oder wenn $M_x = c\, N_x$ und zur Abkürzung

$$k_o = \frac{J}{F e_u - \frac{P}{r}}, \qquad k_u = \frac{J}{F e_o + \frac{P}{r}} \qquad 5)$$

gesetzt werden:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F}\left(1 + \frac{c}{k_u}\right), \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F}\left(1 - \frac{c}{k_o}\right). \qquad 6)$$

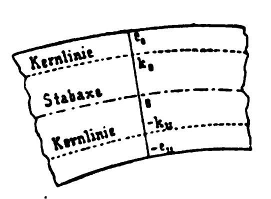


Fig. 30.

Die Punkte, welche um $v = k_o$ und $v = -k_u$ von der Bogenaxe entfernt in der Trägerebene liegen, heissen die **Kernpunkte** des Querschnitts; in der Gesammtheit der Kernpunkte aller Querschnitte erhalten wir zwei Linien, welche die **obere und untere Kernlinie** des Bogens heissen (Fig. 30). Dieselben sind nach 5) nur von den Abmessungen des Bogens, nicht von den Belastungsverhältnissen abhängig.

Sind die Grenzwerthe σ_o, σ_u von einerlei Vorzeichen, so gilt das

Gleiche für alle dazwischen liegenden σ, sämmtliche Normalspannungen haben dann das gleiche Vorzeichen wie die resultirende Normalkraft N_x. Es ist aber nach 6)

σ_o mit N_x von einerlei Vorzeichen, wenn $c > -k_u$,
σ_u „ N_x „ „ „ „ $c < k_o$,

wir können aussprechen: Sämmtliche Normalspannungen eines Querschnittes haben unter sich und mit der Normalkraft N_x einerlei Vorzeichen, wenn bei diesem Querschnitte die Stützlinie zwischen den Kernlinien liegt. Andernfalls sind die Vorzeichen der Normalspannungen verschieden und hat für $c < -k_u$ die Normalspannung σ_o, für $c > k_o$ die Normalspannung σ_u das entgegengesetzte Vorzeichen wie N_x.

Für die Zwecke, welchen die Kernlinien elastischer Bogenträger dienen (§ 11), können in 5) stets die Ausdrücke mit r im Nenner vernachlässigt werden (vergl. Beisp. 5), womit in 6):

$$k_o = \frac{J}{Fe_u}, \qquad k_u = \frac{J}{Fe_o}. \tag{7}$$

Geschieht dies, wie üblich und im Allgemeinen zulässig, auch in 2)—4), so folgen:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v = \frac{N_x}{F}\left(1 + \frac{Fc}{J} v\right), \tag{8}$$

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} e_o, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{J} e_u, \tag{9}$$

und für den gewöhnlichen Fall, dass der Querschnitt zur Axschicht symmetrisch ist, mit $e_o = e_u = e$ und der Bezeichnung

$$W = \frac{J}{e} \tag{10}$$

einfacher:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \tag{11}$$

$$k_o = k_u = \frac{W}{F}. \tag{12}$$

Der Quotient W aus Trägheitsmoment und Entfernung der äussersten Faser von der Axschicht heisst das Widerstandsmoment des Querschnitts.* Im Folgenden sollen auf Grund der Formeln 7)—9) noch einige weitere Beziehungen abgeleitet werden.

Nach 8) ist derjenige Theil der Normalspannung σ, welcher vom Moment M_x herrührt, gleich $\frac{M_x}{J} v$, er liefert für ein Flächenelement dF die Normalkraft $\frac{M_x}{J} v\, dF$, und die Summe aller dieser Kräfte für einen ganzen Querschnitt ist

* Die F, W u. s. w. der deutschen und österreichischen Normalprofile für Walzeisen sind in den betreffenden Normalprofilbüchern zusammengestellt. Für andere Fälle können Dienste leisten: Zimmermann, Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Gewichte genieteter Blechträgnr, Berlin 1885; Scharowsky, Widerstandsmomente und Gewichte genieteter Träger, Leipzig 1890; Böhm und John, Widerstandsmomente, Trägheitsmomente und Gewichte von Blechträgern, Berlin 1895; Geusen und Miliczek, „Profile“, Sammlung von Tabellen, Nürnberg 1895.

$$\frac{M_x}{J} \int v\, dF = 0,$$

weil das Integral als statisches Moment des Querschnitts in Bezug auf eine Axe durch den Schwerpunkt den Werth 0 hat. Denkt man sich alle oberhalb bezw. unterhalb der Axschicht wirkenden Normalkräfte der erwähnten Herkunft zu einer Resultante vereinigt (Fig. 31), so hat man für die erstere:

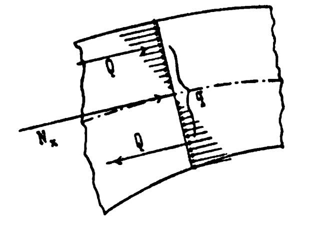


Fig. 31.

$$Q = \frac{M_x}{J} \int_0^{e_u} v\, dF,$$

oder, mit der Bezeichnung

$$S_0 = \int_0^{e_o} v\, dF = \int_0^{e_u} v\, dF \qquad 13)$$

einfacher:

$$Q = \frac{S_0}{J} M_x. \qquad 14)$$

Die Resultante unterhalb der Axschicht ist nummerisch gleich Q, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, wobei für N_x Druck als positiv gilt. Sind die Angriffspunkte dieser Resultanten um q von einander entfernt, so gilt:

$$M_x = Q\, q, \qquad 15)$$

woraus mit Q nach 14):

$$q = \frac{J.}{S_0} \qquad 16)$$

Da J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts, S_0 das statische Moment des auf einer Seite der Axschicht gelegenen Querschnittstheils in Hinsicht der letzteren, so ist auch q nur von den Querschnittsverhältnissen abhängig.

Bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen (Gitterbogen etc.), wie in andern Fällen hat man sich oft unter Vernachlässigung der Füllung den ganzen Bogenquerschnitt F nur aus zwei getrennten Theilen, den Querschnitten f_o und f_u des Obergurts und Untergurts zusammen gesetzt gedacht. Die Schwerpunkte derselben mögen um h von einander entfernt sein (Fig. 32). Da in diesen Fällen alle Elemente eines Gurtungsquerschnitts als gleich beansprucht zu gelten pflegen, so nimmt 15) die Form an:

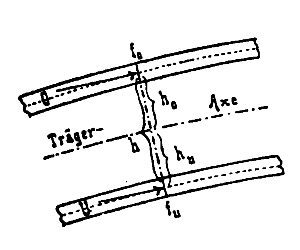


Fig. 32.

$$M_x = Q\, h \qquad 17)$$

(im Allgemeinen ist $q < h$), während die ganzen Beanspruchungen O, U des Obergurts und Untergurts bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$O \cos \alpha = \frac{f_o}{F} N_x + Q = \frac{f_o}{F} N_x + \frac{M_x}{h}, \qquad 18)$$

$$U \cos \beta = \frac{f_u}{F} N_x - Q = \frac{f_u}{F} N_x - \frac{M_x}{h}, \qquad 19)$$

worin α, β die Winkel der Gurtungsaxen mit der Stabaxe bei x bezeichnen,

welche bei parallel der Stabaxe liegenden Gurtungen 0 wären. Bedeuten ferner dann h_o, h_u die Entfernungen der Gurtungsschwerpunkte von der Axschicht, so hat man:

$$f_o h_o = f_u h_u, \qquad F h_u = f_o h, \qquad F h_o = f_u h,$$

und annähernd:

$$J = f_o h_o^2 + f_u h_u^2,$$

oder mit Rücksicht auf die erste der darüber stehenden Beziehungen

$$J = f_o h_o (h_o + h_u) = f_u h_u (h_o + h_u) = f_o h_o h = f_u h_u h.$$

Setzt man nun, da alle Elemente eines Gurtungsquerschnitts als gleich beansprucht gelten (abgesehen von Nebenspannungen), die Entfernungen der durch σ_o, σ_u beanspruchten Querschnittselemente von der Axschicht $e_o = h_o$, $e_u = h_u$, so folgen aus 7):

$$k_o = \frac{J}{Fh_u} = \frac{f_o h_o h}{f_o h} = h_o,$$

$$k_u = \frac{J}{Fh_o} = \frac{f_u h_u h}{f_u h} = h_u.$$

Bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen fallen die Kernlinien annähernd mit den Gurtungsschwerlinien zusammen.

Beispiel 5. Prüfung der vereinfachten Formel für die Normalspannung (Cannstatter Neckarbrücke).

Aus der Formel § 6, 7) oder § 8, 2) für die Normalspannung bei x, v

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{M_x}{J} v \qquad 1)$$

entsteht durch Vernachlässigung des mittleren Gliedes die gewöhnlich verwendete Formel:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v. \qquad 2)$$

Wir wollen deren Zulässigkeit für den Fall der neuen Cannstatter Neckarbrücke (IV. Abschnitt) prüfen.

Die vorläufige Berechnung einer Oeffnung von 48 m Spannweite und 4,505 m Pfeil ergab bei den ungünstigsten Belastungen und normaler Temperatur die Beanspruchungen per qcm im obersten und untersten Querschnittselement auf Grund von 2):

bei x =	0	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6	24,0 m
σ_o =	776	800	722	840	891	907	803	859	747	914	859 kg
σ_u =	776	852	762	869	913	890	881	800	740	880	858 „

Den betreffenden Belastungen entsprachen für σ_o und σ_u, d. h. in 2) für $v = e_o$ und $v = - e_u$, Momente M_x, für welche beziehungsweise

$\pm M_x$ =	0	21200	37400	48600	54700	54400	52100	43800	34100	26200	22800 mk

während die vorläufigen Querschnitte waren:

F =	295,0	295,0	371,0	369,8	368,6	367,4	365,0	362,6	360,2	281,8	280,6 qcm

Da nun für die parabolische Bogenaxe die Krümmungsradien nach

$$r = \frac{l^2}{8f}\left[1 + \frac{16f^2}{l^4}(l-2x)^2\right] \qquad 3)$$

mit $l = 48$ m, $f = 4{,}505$ m sich ergeben:

r =	77,906	75,179	72,767	70,661	68,853	67,334	66,100	65,146	64,467	64,061	63,929 m,

so folgen weiter:

Fr =	22982	22178	26997	26130	25379	25106	24126	23662	23221	18006	17938 qcm.m
$\pm \frac{M_x}{Fr}$ =	0	0,956	1,385	1,860	2,155	2,167	2,159	1,851	1,468	1,455	1,271 kg,

oder in Prozenten der durch Zufügen dieser Werthe zu obigen σ_o, σ_u entstehenden genaueren Werthe der letzteren;

von σ_o	0	0,12	0,19	0,22	0,24	0,24	0,27	0,22	0,20	0,16	0,15 %
„ σ_u	0	0,11	0,18	0,21	0,24	0,24	0,25	0,23	0,20	0,17	0,15 %

Das sind keine Differenzen, welche bei den Beanspruchungen in Betracht kommen, sodass die Verwendung von 2) in Fällen wie dem vorliegenden berechtigt ist. Man hat zu beachten, dass 1) 2) Schlussresultate liefern, also eine etwaige Fortpflanzung der Abweichungen in vergrössertem Maasse ausgeschlossen ist.

Beispiel 6. Normalspannungen bei gleichmässig vertheilter Last (Cannstatter Neckarbrücke).

Für einen symmetrischen parabolischen Bogen mit Kämpfergelenken von $l = 48$ m Spannweite sind die Normalkraft und das Moment durch eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von g per Meter ausgedrückt:

$$N_x = [(l-x)\,\mathrm{tg}\,\varphi + 63{,}093]\,g\cos\varphi, \qquad a)$$

$$M_x = 0{,}00654\,x\,(l-x)\,g. \qquad b)$$

Es sind die Normalspannungen σ_o, σ_u bei der Trägermitte zu berechnen, wo $F = 373{,}0$ qcm der Querschnitt und $W = 11594$ ccm das Widerstandsmoment ist.

Für beliebige Querschnitte gelten mit $a)$ $b)$ die Gleichungen § 8, 11). Da nun bei $x = 24$ m wegen $\mathrm{tg}\,\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$:

$$N_x = 63{,}093\,g, \qquad M_x = 3{,}76704\,g,$$

so erhält man daselbst per qcm:

$$\sigma_o = \frac{63{,}093}{373}\,g + \frac{376{,}704}{11594}\,g = 0{,}201\,641\,g,$$

$$\sigma_u = \frac{63{,}093}{373}\,g - \frac{376{,}704}{11594}\,g = 0{,}136\,659\,g.$$

Die angegebenen Verhältnisse entsprechen den Bogen von Oeffnung IV der Cannstatter Neckarbrücke, (IV. Abschnitt) deren Eigengewicht ohne die sonstige feste Last $g = 340$ kg beträgt. Bei alleiniger Wirksamkeit desselben wären also:

$$\sigma_o = 68{,}6 \text{ kg}, \qquad \sigma_u = 46{,}4 \text{ kg}.$$

Aufgabe 6 mit **Beispiel 7.** Normalspannungen durch einen beliebigen Horizontalschub allein (Cannstatter Neckarbrücke).

Für beliebige symmetrisch zur Axschicht liegende Querschnitte diejenigen Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement auszudrücken, welche ein beliebiger und auf beliebige Weise entstandener Horizontalschub allein (ohne Endmomente) erzeugt.

Die Normalkraft und das Moment durch den beliebigen Horizontalschub H sind nach § 1, 9) 3):

$$N_x = H\cos\varphi, \qquad M_x = -Hy, \qquad 1)$$

womit nach § 8, 11) die gesuchten Normalspannungen in beliebigen Querschnitten:

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos\varphi}{F} - \frac{y}{W}\right) H, \qquad 2)$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\cos\varphi}{F} + \frac{y}{W}\right) H. \qquad 3)$$

In den Bogenmitten von Oeffnung IV der Cannstatter Neckarbrücke (IV. Abschnitt) hat man mit $y = 4{,}505$ m, $\cos\varphi = 1$, $F = 373$ qcm, $W = 11594$ ccm

$$\frac{\cos\varphi}{F} = \frac{1}{373} = 0{,}002681,$$

$$\frac{y}{W} = \frac{450{,}5}{11594} = 0{,}038856,$$

sodass wir durch ein beliebiges H per qcm erhalten:

$$\sigma_o = -\,0{,}036\,175\,H, \qquad \sigma_u = 0{,}041\,537\,H.$$

Hiernach erzeugt insbesondere der zur Ueberhöhung der Bogen angewandte künstliche Horizontalschub von $H = 1950$ kg (IV E):

$$\sigma_o = -\,70{,}5 \text{ kg}, \qquad \sigma_u = 81{,}0 \text{ kg}.$$

Der den angenommenen Temperaturänderungen um $\tau = \pm 25^0$ entsprechende Horizontalschub von $H = \pm 2888$ kg (IV J):

$$\sigma_0 = \mp 104{,}5 \text{ kg}, \qquad \sigma_u = \pm 120{,}0 \text{ kg},$$

und der einer etwaigen Aenderung der Spannweite (Ausweichen der Widerlager) um $\Delta l = \pm 1$ cm entsprechende Horizontalschub von $H = \mp 2093$ kg (IV J):

$$\sigma_0 = \pm 75{,}7 \text{ kg}, \qquad \sigma_u = \mp 86{,}9 \text{ kg}.$$

§ 9. Längsschubspannungen und Querschubspannungen.

Wir bemerken von vornherein, dass die Schubspannungen bei elastischen Bogenträgern von geringerer Bedeutung als bei horizontalen Balkenträgern sind, sodass sie bei Dimensionirung vollwandiger Bogen gewöhnlich gar nicht berücksichtigt werden. Für symmetrische parabolische Bogen, welche nur unter Einwirkung einer auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilten Last stehen, ergeben sich sogar unter gebräuchlichen, wenn auch nicht immer berechtigten Vernachlässigungen, die im Folgenden abzuleitenden Schubspannungen τ, ξ gleich Null.

Es seien Normalkraft und Angriffsmoment für einen beliebigen Querschnitt x wie bisher durch N_x, M_x und für einen um die Axlänge ds von x entfernten Querschnitt vorübergehend durch N, M bezeichnet. Da nach § 3, 14) die Normalspannung bei x, v

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{M_x}{K}\,\frac{rv}{r+v},$$

so folgt die Resultante sämmtlicher Normalkräfte des von v bis e_0 gelegenen Querschnittstheils bei x (Fig. 33):

$$S_x = \int_v^{e_0} \sigma dF = \frac{N_x}{F}\int_v^{e_0} dF + \frac{M_x}{Fr}\int_v^{e_0} dF + \frac{M_x}{K}\, r\int_v^{e_0} \frac{v}{r+v} dF$$

und mit den Bezeichnungen

$$L = r\int_v^{e_0} \frac{v}{r+v}\, dF = S_v - \int_v^{e_0} \frac{v^2}{r+v} dF \qquad 1)$$

$$S_v = \int_v^{e_0} v\, dF, \qquad 2)$$

wenn F_v die Querschnittsfläche von v bis e_0 vertritt:

$$S_x = \frac{N_x}{F} F_v + \frac{M_x}{Fr} F_v + \frac{M_v}{K}\, L.$$

Die Resultante sämmtlicher Normalkräfte für den entsprechenden Theil des zweiten Querschnitts ist

$$S = \frac{N}{F} F_v + \frac{M}{Fr} F_v + \frac{M}{K}\, L.$$

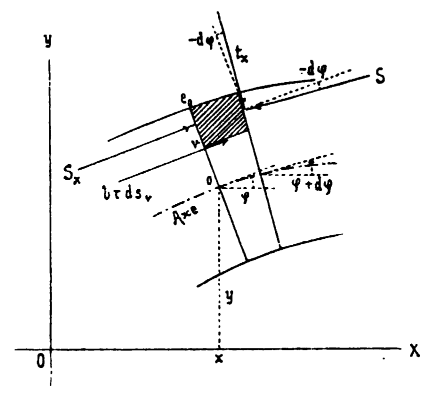


Fig. 33.

Wäre nun genau $S = S_x$, so würde das Trägerelement von v bis e_0 durch die S, S_x lediglich gedrückt oder gezogen, ein Bestreben desselben, sich längs des darunter liegenden Trägertheils fortzubewegen, wäre nicht vorhanden. Da jedoch durch Subtraktion mit Rücksicht auf $N - N_x = dN_x$ und $M - M_x = dM_x$:

$$S - S_x = \frac{F_v}{F} dN_x + \left(\frac{F_v}{Fr} + \frac{L}{K}\right) dM_x,$$

welcher Werth im Allgemeinen von 0 verschieden ist, so sucht sich das fragliche, in Fig. 33 schraffirte Trägerelement mit dieser Kraft in der Richtung von S über die darunter liegende Fläche wegzubewegen, und es muss in dieser, weil Gleichgewicht herrscht, eine numerisch gleiche Kraft entgegen wirken. Wir bezeichnen diese im unteren Flächenelement bei x, v wirkende Kraft durch $\tau b\, d s_v$, unter b die Trägerbreite daselbst, unter $d s_v$ die Länge des Flächenelements verstanden, sodass τ sich auf die Quadrateinheit bezieht. τ soll die Längsschubspannung bei x, v heissen und als positiv gelten, wenn dieselbe von der Richtung von N_x ist. Wenn nun die beiden Querschnitte zwischen zwei auf einander folgenden Lasten P liegen und t_x den auf den Querschnittstheil von v bis e_0 wirkenden Theil der Transversalkraft T_x bedeutet, so drückt sich die Gleichgewichtsbedingung „Summe aller äusseren Kräfte parallel S_x gleich Null“ für das in Fig. 33 schraffirte Trägerstück aus:

$$\tau b\, d s_v + S_x - S \cos d\varphi + t_x \sin d\varphi = 0,$$

oder mit $\cos d\varphi = 1$, $\sin d\varphi = d\varphi$ und dem in § 3, S. 14, erhaltenen Ausdrucke $ds_v = ds\left(1 + \frac{v}{r}\right)$:

$$\frac{r+v}{r} \tau b\, ds = S - S_x - t_x d\varphi,$$

und nach Einsetzen des oben ermittelten $S - S_x$:

$$\frac{r+v}{r} b\tau = \frac{F_v}{F}\frac{dN_x}{ds} + \left(\frac{F_v}{Fr} + \frac{L}{K}\right)\frac{dM_x}{ds} - t_x \frac{d\varphi}{ds}. \tag{3}$$

Nach § 3, 1) und § 1, 13) 9) 10) 2) haben wir:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{r} \qquad \frac{dM_x}{ds} = T_x,$$

$$N_x = V_x \sin\varphi + H\cos\varphi, \qquad T_x = V_x \cos\varphi - H \sin\varphi,$$

$$V_x = V - \sum_0^x P,$$

wonach weiter folgt:

$$dN_x = V_x \cos\varphi d\varphi + \sin\varphi dV_x - H\sin\varphi d\varphi = T_x d\varphi - \sin\varphi d\sum_0^x P,$$

oder weil von x bis $x + dx$ kein P liegen soll:

$$\frac{dN_x}{ds} = -\frac{T_x}{r}.$$

Wir erhalten damit aus 3) für die Längsschubspannung τ:

$$\frac{r+v}{r} b\tau = \frac{L}{K} T_x + \frac{t_x}{r}. \tag{4}$$

Werden in 4) entsprechend dem Vorgehen in § 6 die Entfernungen v der Querschnittselemente von der Axschicht gegen den Krümmungsradius der Axe r vernachlässigt, so folgt mit $K = J$ (vergl. § 6) und dem aus 1) entstehenden Ausdruck

$$L = S_v - \frac{1}{r}\int_v^{e_0} v^2 dF \tag{5}$$

für die Längsschubspannung τ:

$$b\tau = \frac{L}{J} T_x + \frac{t_x}{r}, \tag{6}$$

und wenn auch hier, wie in § 6 als gebräuchlich erwähnt, die Glieder mit r im Nenner gegen die übrigen vernachlässigt werden,

$$\tau = \frac{S_v}{Jb} T_x. \tag{7}$$

Diese Gleichung ist um so genauer, je grösser r, für gerade Stäbe stimmt sie wegen $r = \infty$ vollständig mit 4) überein. In vorstehenden Gleichungen bedeutet J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in Hinsicht der Axschicht, S_v das statische Moment des Querschnittstheils von v bis e_0 in Hinsicht derselben.

Nach 7) wie nach 6) und 4) ändert sich $b\tau$ sowohl mit dem Querschnitt x als mit der Entfernung v von der Axschicht. Für einen bestimmten Querschnitt ergibt 7) den Werth von $b\tau$ am grössten in der Axschicht, nämlich:

$$\text{für } v = 0 \qquad b\tau = \frac{S_0}{J} T_x = \frac{T_x}{q}, \tag{8}$$

am kleinsten in der obersten und untersten Faser, nämlich wegen $S_v = 0$

$$\text{für } v = e_0 \text{ und } - e_u \qquad b\tau = 0. \tag{9}$$

Bei konstantem $S_v : J$ ändert sich $b\tau$ proportional T_x, sodass mit den Grenzwerthen von T_x auch diejenigen von $b\tau$ entstehen. Die Bedingung 9) ist selbstverständlich auch nach 6) und 4) erfüllt.

Es erübrigt uns noch, die Vertheilung der Transversalkraft oder **Querkraft** T_x auf die Querschnittselemente festzustellen. Als **Querschubspannung** ξ bei x, v bezeichnen wir die Schubkraft auf die Quadrateinheit der Querschnittselemente daselbst, wobei die positive Richtung der ξ mit derjenigen von T_x übereinstimmt. In dem durch die eben angenommenen Querschnitte zwischen zwei aufeinander folgenden P begrenzten Raum werde ein Körperelement der Dimensionen dv, ds_v, 1 ins Auge gefasst (Fig. 34). Dasselbe ist nach dem Bisherigen, abgesehen von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, durch die in Fig. 34 angedeuteten paarweise gleichen Kräfte ergriffen. Das Gleichgewicht gegen Drehung verlangt

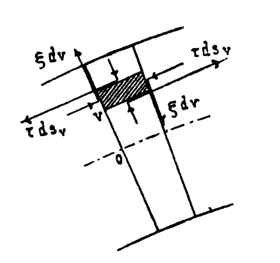


Fig. 34.

$$\xi dv \, . \, ds_v = \tau ds_v \, . \, dv,$$

$$\xi = \tau. \tag{10}$$

An jeder Stelle x, v eines Bogenträgers ist die Querschubspannung gleich der Längsschubspannung. Es genügt also für beide die Bezeichnung τ.

Nachdem die Normalspannungen σ für die Flächenelemente senkrecht der Axschicht und die Schubspannungen τ für solche senkrecht und parallel derselben bestimmt sind, könnte man noch die Normalspannungen und Schubspannungen für beliebig gerichtete Flächenelemente ableiten. Da dieselben aber bei der praktischen Berechnung elastischer Bogenträger bisher keine Verwendung fanden, so genüge es, als selbstverständlich anzuführen, dass die grössten Absolutwerthe der bei x, v vorkommenden Normalspannungen (Druck- oder Zugspannungen) und Schubspannungen ganz wie für horizontale Balkenträger ausgedrückt sind:

$$N = S + \frac{\sigma}{2}, \qquad S = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \tag{11}$$

worin alle Grössen Absolutwerthe (ohne Vorzeichen) bedeuten. Den grössten Absolutwerth der Spannungen bei x, v erreicht hiernach die Normalspannung N, insbesondere dann, wenn σ und τ daselbst gleichzeitig gross werden, was z. B. bei Blechträgern am ehesten bei Beginn einer Gurtung eintritt. Doch ist zu beachten, dass an den Stellen der Grenzwerthe von σ (in den äussersten Fasern) τ den Werth Null hat, während an anderen Stellen bei Bogen N meist kleiner als das grösste im Querschnitte vorkommende σ sein wird. Im Falle veränderlicher Belastungen kommt hinzu, dass die grössten σ, τ bei x, v nicht im gleichen Belastungsfalle eintreten (§§ 10, 11), sodass die Ausserachtlassung von N, S bei Brückenbogen in vielen Fällen begründet werden konnte (vergl. § 24).

Die Gleichung 8) liefert die grösste Längsschubspannung und Querschubspannung, welche in der Axschicht, bei $v = 0$, eintritt, beispielsweise für rechteckige und quadratische Querschnitte (Gewölbe, vergl. Aufg. 3) mit

$$J = \frac{bh^3}{12}, \qquad S_0 = \frac{bh^2}{8}:$$

$$\tau = \frac{3}{2bh} T_x, \tag{12}$$

sowie für elliptische und kreisförmige Querschnitte (vergl. Aufg. 4) der Halbaxen a, c

$$J = \frac{\pi c a^3}{4} \qquad S_0 = \frac{2ca^2}{3}:$$

$$\tau = \frac{4}{3\pi ac} T_x. \tag{13}$$

Beispiel 8. Längsschubspannungen und Querschubspannungen (Cannstatter Neckarbrücke).

Wird für einen Bogen die Belastung wenigstens von 0 bis x als gleichmässig vertheilt angenommen, so ist nach § 1, 10) 2) die Transversalkraft bei x:

$$T_x = (V - ux - H\,\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi, \tag{1}$$

unter u jene Belastung per Längeneinheit verstanden. Diese Gleichung drückt sich für dis ersten Bogenhälften der im IV. Abschnitte berechneten Cannstatter Neckarbrücke bei normaler Temperatur aus: $a)$ für Vollbelastung des ganzen Bogens

$$T_x = (82320 - 3430\,x - 218359\,\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi,$$

$b)$ für Verkehrsbelastung von 0 bis m (erste Bogenhälfte)

$$T_x = (73980 - 3430\,x - 174509\,\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi,$$

$c)$ für Verkehrsbelastung von m bis l (zweite Bogenhälfte)

$$T_x = (57300 - 2040\,x - 174509\,\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi.$$

Es sollen die grössten Längsschubspannungen und Querschubspannungen τ in den unten angeführten Querschnitten x (bezeichnet durch ihre Abscissen) für die fraglichen Belastungen berechnet werden.

Die grössten Längsschubspannungen und Querschubspannungen von Blechbogen treten in der Axschicht ein und sind nach § 9, 9):

$$\tau = \frac{S_0}{Jb} T_x \tag{2}$$

worin J das Trägheitsmoment des Querschnitts x in Hinsicht der Axschicht, S_0 das statische Moment des oberhalb der letzteren gelegenen Querschnittstheils in Bezug auf dieselbe, b die Breite der Axschicht (Dicke der Vertikalplatte). Die Ax- und Querschnittsverhältnisse einschliesslich der Werthe J sind im IV. Abschnitte in der Tabelle unter B gegeben. Man hat danach z. B. bei $x = 2{,}682$ m:

$$S_0 = 38 \cdot 46{,}4 \, \frac{46{,}4}{2} - 18{,}8 \cdot 45 \, \frac{45}{2} - 2 \cdot 7{,}8 \cdot 43{,}8 \, \frac{43{,}8}{2} - 2 \cdot 1{,}2 \cdot 36 \, \frac{36}{2} = 5352{,}21 \text{ ccm},$$

$$\tau = \frac{5352{,}21}{440150 \cdot 1{,}2} \, T_x = \frac{T_x}{98{,}684},$$

und bei $x = 5{,}190$ m:

$$S_0 = 38 \cdot 47{,}6 \, \frac{47{,}6}{2} - 18{,}8 \cdot 45 \, \frac{45}{2} - 2 \cdot 7{,}8 \cdot 43{,}8 \, \frac{43{,}8}{2} - 2 \cdot 1{,}2 \cdot 36 \, \frac{36}{2} = 7495{,}41 \text{ ccm},$$

$$\tau = \frac{7495{,}41}{641690 \cdot 1{,}2} \, T_x = \frac{T_x}{102{,}733}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der zweiten und dritten Kolumne nachstehender Tabelle berechnet.

Weiter erhalten wir mit Rücksicht auf die im IV. Abschnitt unter B gegebene Tabelle bei $x = 2{,}682$ m im Belastungsfalle a):

$$T_x = (82320 - 3430 \cdot 2{,}682 - 218359 \cdot 0{,}33346)\, 0{,}94865 = 290 \text{ kg},$$

$$\tau = \frac{290}{98{,}684} = 3 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle b):

$$T_x = (82320 - 3430 \cdot 2{,}682 - 174509 \cdot 0{,}33346)\, 0{,}94865 = 6251 \text{ kg},$$

$$\tau = \frac{6251}{98{,}684} = 63 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle c):

$$T_x = (57300 - 2040 \cdot 2{,}682 - 174509 \cdot 0{,}33346)\, 0{,}94865 = -6036 \text{ kg},$$

$$\tau = -\frac{6036}{98{,}684} = -61 \text{ kg};$$

ferner bei $x = 5{,}190$ m im Belastungsfalle a):

$$T_x = (82320 - 3430 \cdot 5{,}190 - 218359 \cdot 0{,}29423)\, 0{,}95934 = 269 \text{ kg},$$

$$\tau = \frac{269}{102{,}733} = 3 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle b):

$$T_x = (73980 - 3430 \cdot 5{,}190 - 174509 \cdot 0{,}29423)\, 0{,}95934 = 4636 \text{ kg},$$

$$\tau = \frac{4636}{102{,}733} = 45 \text{ kg},$$

und im Belastungsfalle c):

$$T_x = (57300 - 2040 \cdot 5{,}190 - 174509 \cdot 0{,}29423)\, 0{,}95934 = -4445 \text{ kg},$$

$$\tau = -\frac{4445}{102{,}733} = -43 \text{ kg}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der sechs letzten Kolumnen der folgenden Tabelle berechnet. Die τ bedeuten kg per qcm.

x in m	S_0 in ccm	$\frac{Jb}{S_0} = \frac{T_x}{\tau}$	a Vollbelastung		b Verkehrslast 0 bis m		c Verkehrslast m bis l	
			T_x	τ	T_x	τ	T_x	τ
2,682	5352,21	98,684	290	3	6251	63	— 6036	— 61
5,190	7495,41	102,733	269	3	4636	45	— 4445	— 43
7,698	7399,00	101,628	227	2	2981	29	— 2814	— 28
10,206	7302,89	100,579	195	2	1290	13	— 1148	— 11
12,714	7207,13	99,473	159	2	— 430	— 4	587	6
15,222	7016,36	97,324	124	1	— 2173	— 22	2264	23
17,730	6826,84	95,148	89	1	— 3931	— 41	3996	42
20,238	6638,52	92,986	53	1	— 5696	— 61	5735	62
22,746	6451,40	90,791	17	0	— 7461	— 82	7473	82

Bemerkungen. Für Belastung durch das Eigengewicht allein ist bei der Neckarbrücke (infolge eines künstlichen Horizontalschubes, vergl. IV E) in allen

Querschnitten nahezu $M_x = 0$ und damit nach § 1, 13) auch nahezu $T_x = 0$, $\tau = 0$. Aus letzterem Grunde müssen die T_x, τ in den Belastungsfällen *b*) und *c*) zusammen nahezu gleich den Werthen im Belastungsfalle *a*) sein.

§ 10. Grenzwerthe der Schnittkräfte und Schnittmomente.

In jedem Querschnitte x kann man sich 2 Flächen zusammen hängen denken. Suchen die Kräfte und Momente links von x die Fläche daselbst von derjenigen rechts von x zu trennen, so müssen von dieser aus solche Kräfte und Momente widerstehen, welche den ersteren numerisch gleich aber von entgegengesetzten Richtungen sind. Um nun bezüglich der Vorzeichen konsequent zu verfahren, werden wir wie in § 1 unter den Kräften und Momenten im Querschnitt x stets die von der Fläche links von x (Seite des Koordinatenursprungs) her wirkenden verstehen. Wir werden ferner für Sprengbogen die Normalkraft N_x dann als positiv bezeichnen, wenn sie Druck bedeutet, also gegen den Querschnitt gerichtet ist, die Transversalkraft T_x, wenn sie von unterhalb nach oberhalb der Axschicht wirkt, und das Moment M_x, wenn es wie der Zeiger der Uhr rechts herum dreht. Hält man hieran fest, so bietet es keine Schwierigkeit, die ungünstigsten Belastungen zunächst soweit festzustellen, als ohne bestimmte Annahmen über Art und Form des Bogens möglich ist. Für die Berechnung mit gleichmässig vertheilter Verkehrslast genügen diese Feststellungen, bezüglich der Berechnung mit bewegten Radlastzügen wird auf § 12 verwiesen.

Auf einen beliebigen Bogenträger wirke eine Einzellast P an beliebiger Stelle a. Derselben halten das Gleichgewicht gewisse Kämpferreaktionen R, R', deren Lagen und Richtungen durch die Tangenten vom Durchschnittspunkte S von P mit der Kämpferdrucklinie an die Umhüllungslinien U, U' bestimmt sind. Letztere stimmen bei Bogen mit Kämpfergelenken mit den Mittelpunkten der Gelenke überein (§ 2). Als Schnitt X bezeichnen wir einen Schnitt durch den Bogen, welcher den Querschnitt x enthält und von dessen äussersten Elementen senkrecht nach oben und unten geht. Dann ist die von der Last P herrührende resultirende Schnittkraft:

für P nach X (Fig. 35) $R_x = R$,

„ P vor X („ 36) $R_x = R'$

Die Angriffspunkte und Richtungen von N_x, T_x ergeben sich

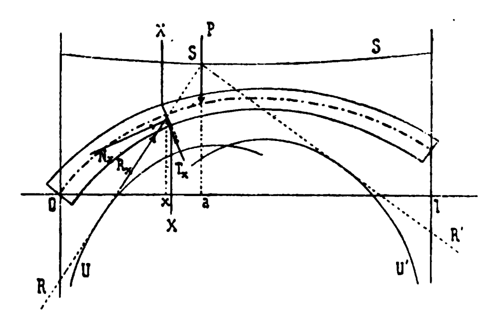


Fig. 35.

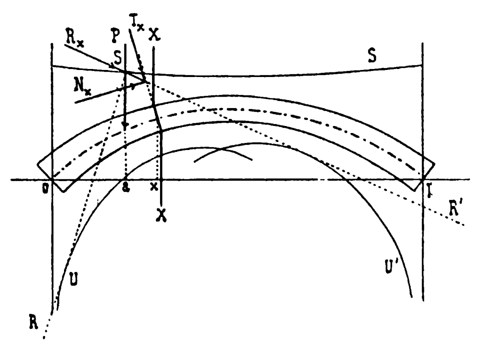


Fig. 36.

durch Zerlegen von R_x in Komponenten senkrecht und parallel der Querschnittsebene (Fig. 35, 36):

Normalkraft N_x. Der Beitrag einer Last P zu N_x würde gleich Null (Fig. 35, 36):

1. für P nach X, wenn die Tangente von Punkt S an Linie U parallel der Querschnittsebene stünde;
2. für P vor X, wenn die Tangente von Punkt S an Linie U' parallel der Querschnittsebene stünde.

Beide Fälle kommen aber praktisch gar nicht vor. Daher tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu N_x bei, es wird N_x am grössten, und zwar positiv und Druck, bei möglichst starker Belastung (Vollbelastung) des ganzen Trägers, am kleinsten bei möglichst schwacher Belastung desselben (Eigengewicht allein).

Transversalkraft T_x. Der Beitrag einer Last P zu T_x wird gleich Null (Fig. 35, 36):

1. für P nach X, wenn die Tangente von Punkt S an Linie U senkrecht zur Querschnittsebene steht;
2. für P vor X, wenn die Tangente von Punkt S an Linie U' senkrecht zur Querschnittsebene steht;
3. wenn der Angriffspunkt von P in X liegt, weil mit dem Uebergang von Fig. 35 zu Fig. 36 der Beitrag sein Vorzeichen wechselt.

Für die zwischenliegenden Angriffspunkte lassen sich die Richtungen oder Vorzeichen von T_x nach Fig. 35, 36 beurtheilen, wonach sich die Belastungen für die Grenzwerthe wie folgt ergeben (Fig. 37, 38):

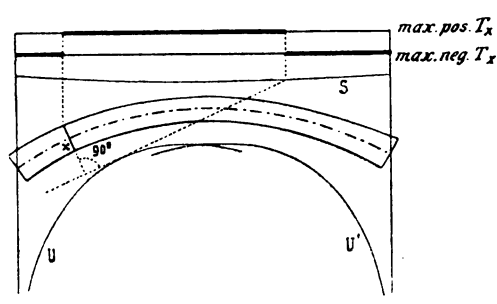


Fig. 37.

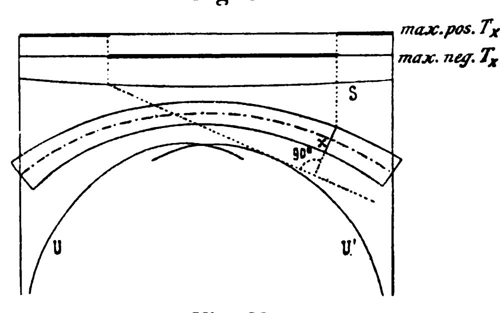


Fig. 38.

Man ziehe senkrecht zur Querschnittsebene eine Tangente an diejenige der Linien U, U', an welche eine solche möglich ist, bis zum Durchschnitt mit der Kämpferdrucklinie S; es ist einmal zwischen diesem Schnittpunkt und dem obersten Querschnittspunkt (bei unten liegender Fahrbahn dem untersten), das andremal auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten. Die erste Belastung liefert den positiven oder negativen Grenzwerth von T_x, jenachdem die Tangente an U oder U' gezogen wurde. — In Fig. 37, 38 bedeuten hiernach fette Striche Vollbelastung feine Striche Eigengewicht allein, was auch in der Folge gelten soll.

Moment M_x. Wie für eine Gesammtbelastung, so hat man nach § 8, 1) auch für eine Einzellast P:

$$M_x = c\,N_x,$$

worin N_x immer positiv (s. oben) und c die Entfernung des Angriffspunkts von R_x von der Axschicht, gemessen in der Querschnittsebene. Es ist also M_x positiv oder negativ, jenachdem c positiv oder negativ, d. h. jenachdem R_x oberhalb oder unterhalb der Axschicht angreift. Greift R_x in der Axschicht an, so ist $M_x = 0$. Für die Grenzwerthe von M_x ergibt sich hiernach Folgendes (Fig. 39):

Man ziehe durch den Axpunkt des Querschnitts Tangenten an die Linien U, U' bis zu den Durchschnitten mit der Linie S; für max. pos. M_x ist zwischen diesen Schnittpunkten für max. neg. M_x auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

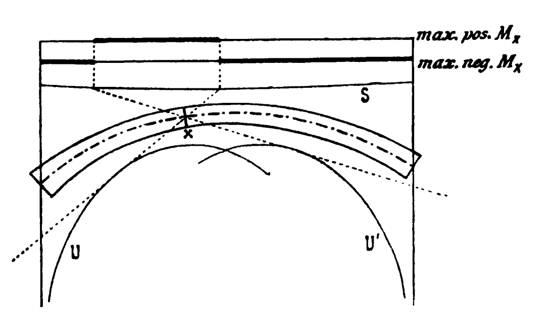


Fig. 39.

Häufig treten einzelne der hier und im nächsten § erwähnten Durchschnitte mit der Linie S nicht innerhalb der Spannweite ein; diese liefern also auch keine wirklichen Verkehrslastgrenzen, womit jedoch an der Allgemeinheit der angeführten Konstruktionen nichts geändert wird.

Kommen neben Lasten noch andere unabhängig davon wirkende Einflüsse in Betracht, wie Temperaturänderungen, Winddruck u. s. w., so sind die durch letztere allein erzeugten Grenzwerthe mit den von der Belastung herrührenden Grenzwerthen so zu kombiniren, dass möglichst ungünstige (möglichst weit auseinander gelegene) Grenzwerthe im Ganzen entstehen.

§ 11. Grenzwerthe der Normalspannungen und Schubspannungen.

Es handelt sich darum, die Belastungen für die Grenzwerthe soweit anzugeben, wie dies im vorigen § bezüglich N_x, T_x, M_x geschehen ist.

Schubspannungen τ. Da nach § 9, 7) die Längsschubspannungen und Querschubspannungen τ proportional T_x gesetzt werden können, so liefern die Belastungen für die Grenzwerthe von T_x auch die Grenzwerthe der τ in dem betreffenden Querschnitte x.

Normalspannungen σ. Diejenigen Werthe der Normalspannungen eines Querschnitts x, zwischen welchen alle andern in diesem Querschnitte auftretenden σ liegen, treten als σ_o und σ_u im obersten und untersten Querschnittselement ein. Es genügt also bei der Dimensionirung des Trägers, die Grenzwerthe dieser σ_o, σ_u zu kennen. Nun wissen wir aus § 8, dass nur solange σ_o mit N_x von einerlei Vorzeichen ist, als R_x oberhalb des unteren Kernpunktes K_u angreift, und nur solange σ_u mit N_x das gleiche Vorzeichen besitzt, als R_x unterhalb des oberen Kernpunktes K_o angreift. N_x aber ist immer positiv. Wir erhalten daher folgende Regeln:

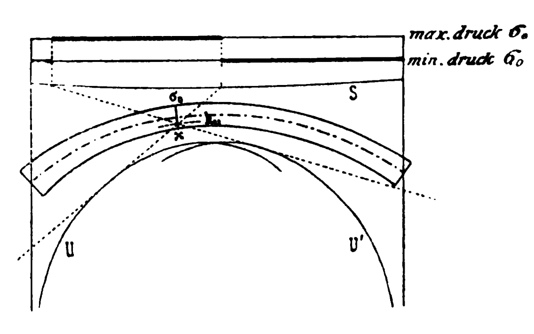


Fig. 40.

Grenzwerthe von σ_o (Fig. 40): Man ziehe durch den unteren Kernpunkt des Querschnitts Tangenten an die Linien U, U' bis zu den Durchschnitten mit der Linie S; für max. druck σ_o ist zwischen diesen Schnittpunkten, für min. druck σ_o oder max. zug σ_o auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

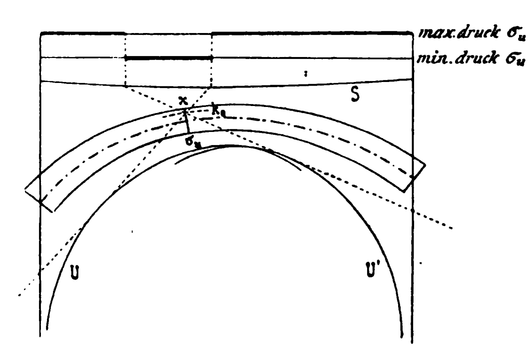


Fig. 41.

Grenzwerthe von σ_u (Fig. 41): Man ziehe durch den oberen Kernpunkt des Querschnitts Tangenten an die Linien U, U' bis zu den Durchschnitten mit der Linie S; für min. druck σ_u oder max. zug σ_u ist zwischen diesen Schnittpunkten, für max. druck σ_u auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

Vereinfachungen. Je geringer die Entfernungen der Kernlinien von der Stabaxe unter sonst gleichen Verhältnissen, umsomehr nähern sich (Fig. 39—41) die angeführten Belastungsgrenzen für

max. druck σ_o, max. pos. M_x, min. druck σ_u,

sowie für

min. druck σ_o, max. neg. M_x, max. druck σ_u.

Da nun der Einfluss der Lasten in der Nähe jener Belastungsgrenzen überhaupt verhältnissmässig klein ist (an den Grenzen selbst sind die Beiträge 0), so wird es in vielen Fällen genügen, die ungünstigsten Belastungen für die M_x auch als solche für die σ_o, σ_u zu verwenden, also die Kernlinien ganz aus dem Spiele zu lassen. Man erspart hierdurch nicht nur die Ermittelung der letzteren, sondern, was mehr ins Gewicht fällt, man braucht nur etwa halb soviel Belastungsfälle, als bei der genaueren Berechnung.

Im IV. Abschnitt unter F sind die nach obigen Verfahren ermittelten Belastungen für die Grenzwerthe max. druck σ_o, max. pos. M_x und min. druck σ_u einer Oeffnung der neuen Cannstatter Neckarbrücke (Oeffnung IV von Stuttgart aus) auf einem Blatte dargestellt. Um die Belastungen für min. druck σ_o, max. neg. M_x, max. druck σ_u zu erhalten, hat man sich nur fette Striche (Vollbelastung) und feine Striche (Eigengewicht allein) vertauscht zu denken. Man sieht, dass die Belastungen für die genauere

und angenäherte Berechnung der σ_o, σ_u mehrfach nicht unwesentlich von einander abweichen. Um zu zeigen, in wieweit die Resultate der Berechnungen übereinstimmen, stellen wir in der folgenden Tabelle die auf beiden Wegen erhaltenen Grenzwerthe von σ_o, σ_u zusammen (Druck positiv), sowohl für Verkehrslast allein, als auch beim Zusammenwirken der verschiedenen Einflüsse (Eigengewicht, Verkehrslast, Temperaturänderungen, künstlicher Horizontalschub). Von wesentlicher Bedeutung sind indessen nur die Grenzwerthe max. druck σ_o und max. druck σ_u. Die abgekürzte Berechnung muss die Grenzwerthe im Allgemeinen etwas zu günstig ergeben, da sie meist nicht genau die ungünstigsten Belastungen verwendet. Jedoch treffen die grössten Abweichungen gerade an diejenigen Stellen des Bogens (gegen die Mitte und Enden), wo ohnehin die Querschnitte nicht genau der Berechnung angepasst zu werden pflegen.

Werden bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen die Gurtungsschwerlinien als Kernlinien verwendet (§ 8), dann gelten die Grenzwerthe von σ_o und σ_u für die ganze obere und untere Gurtung. — Bezüglich der Berücksichtigung von Nebeneinflüssen wie Temperaturänderungen, Winddruck u. s. w. gilt das am Schlusse des vorigen § Gesagte. Vergl. im IV. Abschnitt unter *J* und *K*.

Querschnitt x	max. druck σ_o						min. druck σ_o				max. druck σ_u						min. druck σ_u				Querschnitt x
	Verkehrslast allein			Gesammtspannungen			Verkehrsl. allein		Gesammtspann.		Verkehrslast allein			Gesammtspannungen			Verkehrsl. allein		Gesammtspann.		
	genau	abgek.	Abweich.	genau	abgek.	Abweich.	genau	abgek.	genau	abgek.	genau	abgek.	Abweich.	genau	abgek.	Abweich.	genau	abgek.	genau	abgek.	
m	kg/qcm	kg/qcm	%	kg/qcm	kg/qcm	%	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	%	kg/qcm	kg/qcm	%	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	m
2,682	383,1	346,2	— 9,6	873	836	— 4,2	— 53,7	— 16,8	396	433	477,3	462,0	— 3,3	982	967	— 1,5	—176,5	—161,2	252	268	2,682
5,190	387,0	380,2	— 1,8	771	764	— 0,9	—132,2	—124,4	192	200	450,8	429,7	— 4,7	848	827	— 2,5	—230,9	—209,8	78	99	5,190
7,698	467,0	458,4	— 1,8	863	854	— 1,1	—205,9	—197,3	100	109	515,1	504,3	— 2,1	926	915	— 1,2	—304,2	—293,4	— 13	— 2	7,698
10,206	510,6	494,4	— 3,2	919	902	— 1,8	—244,9	—228,7	45	61	537,4	537,4	0,0	960	960	0,0	—334,0	—334,0	— 59	— 59	10,206
12,714	522,4	516,4	— 1,1	940	934	— 0,6	—252,3	—246,3	24	30	526,7	517,5	— 1,7	960	951	— 0,9	—330,4	—321,2	— 69	— 60	12,714
15,222	507,9	507,9	0,0	937	937	0,0	—232,8	—232,8	32	32	485,6	467,0	— 3,8	930	911	— 2,0	—294,5	—275,9	— 44	— 26	15,222
17,730	470,9	457,0	— 3,0	909	895	— 1,5	—191,1	—177,2	65	79	412,4	412,4	0,0	866	866	0,0	—225,6	—225,6	16	16	17,730
20,238	415,3	396,5	— 4,5	862	844	— 2,1	—131,4	—112,6	118	136	341,7	329,3	— 3,6	805	792	— 1,6	—157,9	—145,5	77	89	20,238
22,746	363,9	342,5	— 5,9	818	797	— 2,6	— 76,4	— 55,0	170	191	313,6	305,9	— 2,5	783	776	— 0,9	—131,4	—123,7	99	106	22,746
Mittel			— 3,4			— 1,6							—		2,4	— 1,2					

§ 12. Influenzlinien. Bewegte Radlastzüge.

Die in §§ 10, 11 gezeigten Ermittelungen der Belastungen für die Grenzwerthe interessirender Grössen genügen nicht, wenn die Berechnung für bewegte Züge konzentrirter Lasten in festen Entfernungen durchgeführt werden soll, welche wir Radlastzüge nennen wollen. Es können alsdann bei elastischen Bogenträgern alle diejenigen Methoden zur Verwendung kommen, die im gleichen Falle auch bei anderen Trägern gebräuchlich sind.* Wir wollen jedoch hier nur die Berechnung mit Anwendung von Influenzlinien andeuten, welche sich insbesondere für die Normalspannungen σ_0, σ_u empfiehlt, wenn man nicht zur Ableitung specieller Formeln für die Grenzwerthe übergehen will.

Als Influenzlinie einer Grösse G bezeichnet man diejenige Linie, welche entsteht, wenn an jeder Stelle a die Ordinate b gleich dem Beitrag gemacht wird, welchen eine bei a angreifende Last $P = 1$ zu G liefert. Ist also der Ausdruck von G für beliebige P bei beliebigen a gegeben, so erhält man die Gleichung der Influenzlinie von G, wenn man bei jeder Abscisse a die Ordinate b gleich dem Faktor macht, mit welchem P für diese Stelle a im Ausdruck von G multiplicirt ist. Wir wollen dies für einige Grössen betreffend den häufigst vorkommenden Fall symmetrischer Bogen mit Kämpfergelenken (ohne sonstige Gelenke) zeigen.

Für Bogen mit Kämpfergelenken, welche zur Vertikalen durch die Mitte der Spannweite symmetrisch sind (womit in § 1 $M = M' = 0$, $k = 0$), hat man die Vertikalreaktion bei 0 allgemein:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P\,(l - a),$$

wonach die Gleichung der Influenzlinie von V (vergl. Fig. 42):

$$V = \frac{l - a}{l}. \qquad 1)$$

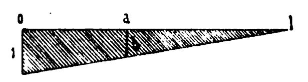


Fig. 42.

Der von einer beliebigen Belastung herrührende Horizontalschub lässt sich in wichtigen Fällen ausdrücken (§ 16, Aufg. 14):

$$H = \frac{1}{C} \sum_0^l P f(a),$$

worin C unabhängig von a. Die Gleichung der Influenzlinie von H folgt daraus:

$$H = \frac{f(a)}{C}. \qquad 2)$$

Für das Moment und die Normalkraft gelten bei beliebiger Belastung:

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P\,(x - a),$$

$$N_x = (V - \sum_0^x P) \sin \varphi + H \cos \varphi.$$

---

* Vergl. Weyrauch, Theorie und Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887, § 12. — Weyrauch, Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1888.

Mit Rücksicht auf die durch 1) 2) bestimmten Werthe von V, H für $P = 1$ erhalten wir die Gleichungen der Influenzlinien für $a < x$:

$$M_x = \frac{l-a}{l}\,x - \frac{f(a)}{C}\,y - (x-a),$$

$$N_x = \left(\frac{l-a}{l} - 1\right)\sin\varphi + \frac{f(a)}{C}\cos\varphi$$

oder auch für $a < x$:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{l-x}{l}\,a - \frac{f(a)}{C}\,y, \\ N_x &= -\frac{a}{l}\sin\varphi + \frac{f(a)}{C}\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

während für $a > x$:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{l-a}{l}\,x - \frac{f(a)}{C}\,y, \\ N_x &= \frac{l-a}{l}\sin\varphi + \frac{f(a)}{C}\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Setzt man in den allgemeinen Ausdrücken der Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement symmetrisch zur Axschicht liegender Querschnitte

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \qquad 5)$$

für M_x, N_x die aus 3) und 4) folgenden Werthe, so liefern diese Gleichungen 5) die Ordinaten der Influenzlinien für σ_o, σ_u. Für unsymmetrische Querschnitte würden nur § 8, 9) an Stelle von 5) treten.

In analoger Weise wie hier für die Grössen V, H, M_x, N_x, σ_o, σ_u können die Influenzlinien auch für andere Grössen G ermittelt werden.

Wird die Belastung nur in bestimmten Knotenpunkten auf den betrachteten Träger übertragen, so verläuft die Influenzlinie zwischen je zwei aufeinander folgenden belasteten Knotenpunkten geradlinig. Denn von einer bei a zwischen solchen Knotenpunkten der Abscissen c und d liegenden Last P kommen unter der hier üblichen Voraussetzung frei drehbarer Zwischenträgerenden bei c und d auf den Träger (Fig. 43):

$$\frac{d-a}{d-c}\,P \quad \text{bezw.} \quad \frac{a-c}{d-c}\,P.$$

Fig. 43.

Ist nun m der Beitrag einer Last $P = 1$ bei c, und n der Beitrag einer solchen bei d, so folgt der Beitrag der an beliebiger Stelle a zwischen c und d wirkenden Last $P = 1$:

$$b = \frac{d-a}{d-c}\,m + \frac{a-c}{d-c}\,n,$$

und dies ist bei variablem a die Gleichung einer geraden Linie. Es folgt hieraus auch, dass die Influenzlinie einer bestimmten Grösse G je nach der Uebertragungsart der in Frage kommenden Lasten etwas verschieden ausfallen kann. Gewöhnlich interessirt jedoch nur die Influenzlinie der Verkehrslast, welche eindeutig bestimmt ist.

Da eine bei a angreifende Last $P = 1$ zur Grösse G den Beitrag b liefert, unter b die Ordinate der Influenzlinie bei a verstanden, so trägt eine beliebige Last P bei Pb, und für den Beitrag einer Lastenfolge von v bis w hat man:

$$G = \sum_{v}^{w} Pb. \qquad 6)$$

Ist die Belastung von v bis w stetig vertheilt und bezeichnet $p = \varphi(a)$ die Belastung per Längeneinheit bei a, so folgt aus 6) mit $P = p\,da$:

$$G = \int_{v}^{w} p\,da\,.\,b. \qquad 7)$$

Speziell wenn die Belastung gleichmässig vertheilt, erhält man wegen des alsdann konstanten p:

$$G = p\int_{v}^{w} b\,da = pF, \qquad 8)$$

worin F die Influenzfläche von v bis w bezeichnet (Fig. 44). Der von einer gleichmässig vertheilten Last p auf der ganzen Spannweite herrührende Werth der obigen Vertikalreaktion V wäre also (vergl. Fig. 42):

$$V = p\,\frac{l}{2}.$$

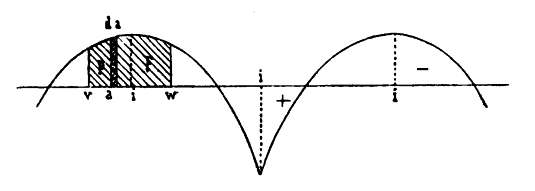


Fig. 44.

Der Beitrag einer Last und die Influenzfläche bei a sind positiv oder negativ, jenachdem die Influenzlinie daselbst auf der positiven oder negativen Seite der Abscissenaxe liegt (wo b positiv oder negativ). Die Durchschnittspunkte der Influenzlinie mit der Abscissenaxe bilden die Grenzpunkte der positiven und negativen Beitragsstrecken. Auf jeder Beitragsstrecke einerlei Sinns heisst derjenige Punkt i, bei welchem die Ordinate b und damit der Beitrag einer Last P grösser als an allen andern Orten jener Strecke ist, der Influenzpunkt für die betreffende Strecke. Ihm hat man in praktischen Fällen die Lasten von den Streckengrenzen aus zu nähern, wenn ihre Beiträge zu G wachsen sollen. Im obigen Falle von V beispielsweise würde es der Punkt 0 sein, für H ist in allen später betrachteten Fällen $i = \frac{l}{2}$.

Ist die Influenzlinie einer Grösse G verzeichnet, so kann man mit Rücksicht auf obige Eigenschaften der Influenzlinien die Belastungen für die Grenzwerthe von G sehr leicht angeben und diese selbst ohne weitere Formeln berechnen, wie dies der Verfasser zuerst im Jahre 1873 gezeigt hat.* Man hat bei Berechnung jedes der beiden Grenzwerthe die Beitragsstrecken des betreffenden Sinnes möglichst stark und zwar derart zu belasten, dass alle Lasten, besonders die grössten derselben, möglichst nahe bei den Influenzpunkten ihrer Strecken liegen, während die Beitragsstrecken

* Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuirlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873. Näheres und zahlreiche Anwendungen, auch zur Ableitung von Formeln für die Grenzwerthe enthalten die auf S. 42 citirten Schriften. Vergl. auch Luegers Lexikon der gesammten Technik, Bd. III, Stuttgart 1896, Artikel: Einflusslinien.

entgegengesetzten Sinnes von Lasten möglichst frei zu lassen sind. Verkehrslasten, welche trotzdem auf dieselben gelangen, kann man auch einfach unberücksichtigt lassen, womit in immer zulässiger Weise etwas zu ungünstig gerechnet wird. Liegt die Influenzlinie einer Grösse ganz auf einer Seite der Abscissenaxe, dann tritt der obere Grenzwerth bei möglichst starker Belastung des ganzen Trägers (besonders in der Nähe des Influenzpunktes), der untere für Eigenwicht allein aus.

In vielen Fällen lassen schon die allgemeinen Formeln für G auf die Grenzen und Influenzpunkte der Beitragsstrecken, sowie auf die ungünstigsten Zusammensetzungen und Richtungen der Lastsysteme schliessen. Nach der oben angeschriebenen Formel für V beispielsweise erhält man den grössten Werth von V bei Belastung durch Eisenbahnfahrzeuge, wenn ein Zug schwerster Lokomotiven vorwärts von l nach 0 fahrend mit dem Vorderrade der ersten Lokomotive bei $a = 0$ angelangt ist, den kleinsten Werth von V für Eigengewicht allein. Für ein gleichmässig vertheiltes Eigenwicht von g und eine ebensolche Verkehrslast von p per Längeneinheit wären nach dem bisher Gesagten mit Rücksicht auf Fig. 42 und $q = g + p$ die Grenzwerthe von V:

$$V = \frac{ql}{2}, \qquad \mathfrak{V} = \frac{gl}{2}.$$

Dieselben Grenzwerthe ergeben sich durch gleichmässig vertheilte Lasten g, p für die Vertikalreaktionen V, V' in allen später betrachteten Fällen. Auch die Grenzwerthe des Horizontalschubs H treten für solche Lasten ein, wenn die ganze Spannweite einmal mit $q = g + p$ das andremal nur mit g belastet ist.

Beispiel 9. Influenzlinien und Grenzwerthe.

Für die symmetrischen Bogen mit drei Gelenken einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke sei die Spannweite $l = 24$ m, der Pfeil der Axe $f = 3$ m, die gleichmässig vertheilt gedachte feste Last (Eigengewicht der Konstruktion) $g = 700$ kg per Meter Spannweite. Zu bestimmen: a) die Influenzlinien für die Vertikalreaktionen V, V' der Kämpfer und den Horizontalschub, welcher für beliebige Belastung mit $m = \frac{l}{2}$ durch

$$H = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^m Pa + \sum_m^l P\,(l-a)\right] \qquad 1)$$

ausgedrückt ist (§ 15); b) die Grenzwerthe von V, V' H, welche beim Befahren der Brücke durch Züge von Lokomotiven der in Fig. 45 angedeuteten Radanordnung entstehen.

Fig. 45.

a) Die Influenzlinie von V wurde bereits in § 12 festgestellt, diejenige von V' liegt bezüglich der Trägermitte symmetrisch zu ihr (Fig. 46). Nach 1) hat man zufolge § 12 die Gleichung der Influenzlinie von H:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } a < m & H = \dfrac{a}{2f}, \\ \;\;\text{„}\;\; a > m & H = \dfrac{l-a}{2f}. \end{array}\right\} \qquad 2)$$

Die Linie liegt symmetrisch zur Trägermitte, und da die Gleichungen 2) für $a = \frac{l}{2}$ liefern $H = \frac{l}{4f}$, in unserem Falle aber $\frac{l}{4f} = \frac{24}{4 \cdot 3} = 2$, so ist die Influenzlinie für H durch Fig. 47 dargestellt.

b) Da die drei Influenzlinien vollständig auf einer Seite der Abscissenaxe liegen, so treten die unteren Grenzwerthe von V, V', H für die feste Last allein ein. Ihre Werthe sind nach § 12, 8):

$$V = V' = 700 \frac{24 \cdot 1}{2} = 8400 \text{ kg,}$$

$$H = 700 \frac{24 \cdot 2}{2} = 16800 \text{ „}.$$

Der obere Grenzwerth von V ergibt sich bei der in Fig. 46 angedeuteten Belastung aus § 12, 6):

$$V = 8400 + \frac{1}{24} \Big[6000\,(24 + 22{,}7 + 21{,}4 + 13 + 11{,}7 + 10{,}4 + 2 + 0{,}7) + 4000\,(20{,}2 + 9{,}2) + 5\,(17{,}2 + 6{,}2)\Big] = 44650 \text{ kg.}$$

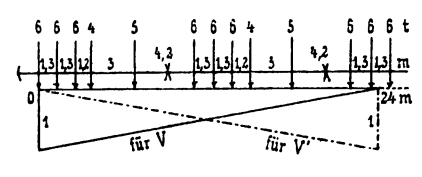


Fig. 46.

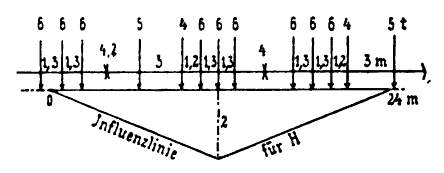


Fig. 47.

Derselbe Grenzwerth tritt für V' ein, wenn der Zug in entgegengesetzter Richtung mit dem Vorderrad bei l steht. Den oberen Grenzwerth von H erhält man bei der in Fig. 47 angedeuteten Belastung:

$$H = 16800 + \frac{1}{6} \Big[6000\,(12 + 10{,}7 + 2{,}3 + 1 + 10{,}7 + 6{,}7 + 5{,}4 + 4{,}1) + 4000\,(9{,}5 + 2{,}9) + 5 \cdot 6{,}5\Big] = 83380 \text{ kg.}$$

Siehe auch Beisp. 18.

Beispiel 10. Influenzlinien (Cannstatter Neckarbrücke).

Für einen symmetrischen parabolischen Bogen mit Kämpfergelenken von $l = 48$ m Spannweite und $f = 4{,}505$ m Pfeil der Axe ist der von einer Last P an beliebiger Stelle a herrührende Horizontalschub für Metér als Längeneinheit ausgedrückt:

$$H = \frac{P f(a)}{806\,754}. \qquad a)$$

Die Verkehrslast wird durch Vertikalen in Abständen von 2,508 m bei den unten angegebenen Abscissen a, welchen die beigesetzten $f(a)$ entsprechen, auf die Bogen übertragen. Es sind die Influenzlinien für M_x, N_x, σ_o, σ_u in der Trägermitte zu ermitteln, wo der Querschnitt $F = 373$ qcm und das Widerstandsmoment $W = 11\,594$ ccm ist.

Die Gleichungen der Influenzlinien von M_x, N_x für beliebige Querschnitte x sind nach § 12, 3) 4) mit $l = 48$ m, $C = 806\,754$, wenn die Abscisse $a < x$:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{l - x}{48}\, a - \frac{y f(a)}{806\,754}, \\ N_x &= \left(-\frac{a}{48} \operatorname{tg}\varphi + \frac{f(a)}{806\,754}\right) \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad b$$

wenn die Abscisse $a > x$:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{l - a}{48}\, x - \frac{y f(a)}{806\,754}, \\ N_x &= \left(\frac{l - a}{48} \operatorname{tg}\varphi + \frac{f(a)}{806\,753}\right) \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad c)$$

Mit diesen Werthen von M_x, N_x sind die Gleichungen der Influenzlinien von σ_o, σ_u für beliebige Querschnitte durch § 12, 5) bestimmt.

Für $x = 24$ m liegen die fraglichen Influenzlinien symmetrisch zur Trägermitte, sodass es genügt, die ersten Hälften zu ermitteln. Man erhält für dieselben mit $l - x = 24$ m, $y = f = 4{,}505$ m, $\operatorname{tg} \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ nach b):

$$M_x = \frac{a}{2} - \frac{f(a)}{179980},$$
$$N_x = \frac{f(a)}{806754},$$

und damit nach § 12, 5) per qcm:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{373} + \frac{100\,M_x}{11594},$$
$$\sigma_u = \frac{N_x}{373} - \frac{100\,M_x}{11594},$$

Wir erhalten aus diesen Gleichungen beispielsweise für $a = 0{,}174$ m mit $f(a) = 19212$:

$$M_x = 0{,}087 - \frac{19212}{179080} = -0{,}0203,$$
$$N_x = \frac{19212}{806754} = 0{,}0238,$$
$$\sigma_o = \frac{0{,}0238}{373} - \frac{2{,}03}{11594} = -\frac{0{,}1113}{1000},$$
$$\sigma_u = \frac{0{,}0238}{373} + \frac{2{,}03}{11594} = \frac{0{,}2389}{1000},$$

und für $a = 2{,}682$ m mit $f(a) = 294406$:

$$M_x = 1{,}341 - \frac{294406}{179089} = -0{,}3030,$$
$$N_x = \frac{294406}{806754} = 0{,}3649,$$
$$\sigma_o = \frac{0{,}3649}{373} - \frac{30{,}3}{11594} = -\frac{1{,}6351}{1000},$$
$$\sigma_u = \frac{0{,}3649}{373} + \frac{30{,}3}{11594} = \frac{3{,}5917}{1000}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Ordinaten b der Influenzlinien für M_x, N_x, σ_o, σ_u in folgender Zusammenstellung berechnet.

Für a	$f(a)$	M_x b	N_x b	σ_o $1000\,b$	σ_u $1000\,b$
0,174	19 212	− 0,0203	0,0238	− 0,1113	0,2389
2,682	294 406	− 0,3030	0,3649	− 1,6351	3,5917
5,190	560 538	− 0,5351	0,6948	− 2,7526	6,4780
7,698	810 037	− 0,6743	1,0041	− 3,1239	8,5079
10,206	1036 264	− 0,6836	1,2845	− 2,4525	9,3399
12,714	1233 463	− 0,5308	1,5289	− 0,4793	8,6671
15,222	1396 910	− 0,1895	1,7315	3,0076	6,2766
17,730	1522 804	0,3615	1,8876	8,1786	1,9426
20,238	1608 352	1,1378	1,9936	15,1585	− 4,4689
22,746	1651 601	2,1503	2,0472	24,0351	− 13,0581

Zwischen je zwei aufeinander folgenden a verlaufen die Influenzlinien geradlinig. Die Influenzlinie für N_x ist gleichzeitig die Influenzlinie des Horizontalschubs H (bei $x = \frac{l}{2}$ symmetrischer Bogen). In Fig. 48 sind die ermittelten Influenzlinien verzeichnet.

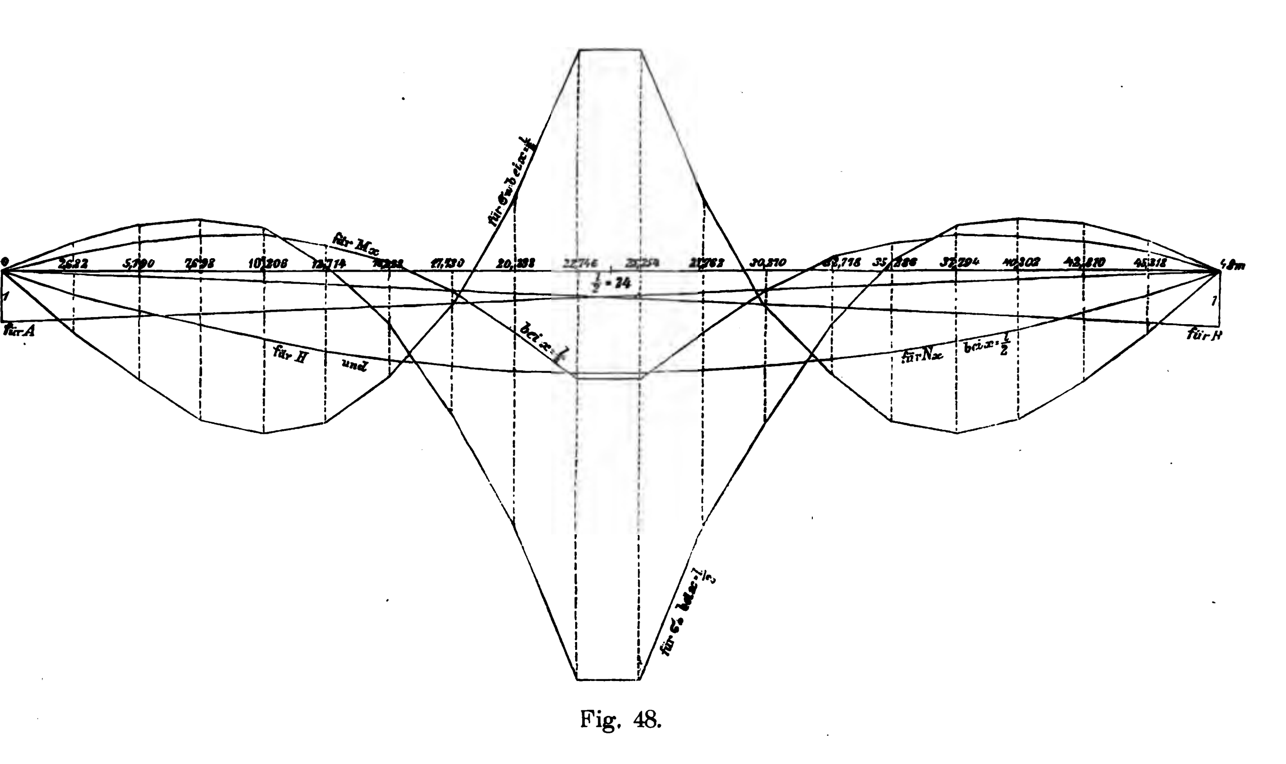


Fig. 48.

Beispiel 11. Berechnung von Grenzwerthen mit Hülfe von Influenzlinien (Cannstatter Nekarbrücke).

Die Ordinaten b der symmetrisch zur Trägermitte liegenden Influenzlinien für die Normalspannungen σ_o, σ_u in der Mitte eines Bogens mit Kämpfergelenken sind wie am Schlusse von Beispiel 10 ermittelt. Man soll mit Hülfe der Influenzlinien bestimmen:

a) Die Werthe von σ_o, σ_u für gleiche Lasten $P = 4264$ **kg** bei allen Knotenpunkten a, mit Ausnahmen der beiden zunächst den Kämpfern gelegenen, wo nur $\frac{2}{3}$ P angreifen;

b) die ungünstigsten von einer Strassenwalze der in Fig. 49 ersichtlichen Lastanordnung allein herrührenden σ_0, σ_u, wenn die einzelnen Bogen in Abständen von 3,2 m liegen;

c) den grössten von zwei der erwähnten Strassenwalzen allein herrührenden Druck σ_u im gleichen Falle;

d) den grössten durch Verkehrslast erzeugten Druck σ_0, wenn ausser der nach *b*) gewählten Belastung durch die Strassenwalze noch bei $a = 15{,}222$ m, 17,730 m und den symmetrisch dazu gelegenen Knotenpunkten Lasten $P = 3486$ kg durch Menschengedränge kommen;

e) den grössten durch Verkehrslast erzeugten Druck σ_u, wenn ausser der nach *c*) gewählten Belastung durch Strassenwalzen noch bei $a = 2{,}682$ m, 5,190 m, 15,222 m, 17,730 m Lasten $P = 3486$ kg sowie bei $a = 0{,}174$ m zwei Drittel soviel durch Menschengedränge kommen und Analoges für die symmetrisch dazu liegenden Punkte gilt.

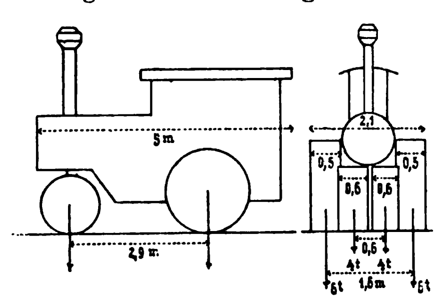


Fig. 49.

a) Für die unter *a*) angeführte Belastung hat man bei beliebigen P nach § 12, 6):

$$\sigma_0 = \frac{2P}{1000}\left(-0{,}1113\,\frac{2}{3} - 1{,}6351 - 2{,}7526 - \cdots + 24{,}0351\right) = 0{,}0797244\,P,$$

$$\sigma_u = \frac{2P}{1000}\left(0{,}2389\,\frac{2}{3} + 3{,}5917 + 6{,}4780 + \cdots - 13{,}0581\right) = 0{,}0550314\,P,$$

also speziell für $P = 4264$ kg, entsprechend dem konzentrirten Eigengewicht der Konstruktion (bezüglich des gleichmässig vertheilten Eigengewichts der Bogen selbst siehe Beispiel 6):

$$\sigma_0 = 339{,}9 \text{ kg}, \qquad \sigma_u = 234{,}7 \text{ kg}.$$

b) Da die einzelnen Bogen um 3,2 m von einander entfernt liegen, so können von der 20 t schweren Strassenwalze höchstens folgende Lasten auf einen Bogen kommen (Fig. 50):

$$2\cdot 6\,\frac{2{,}4}{3{,}2} = 9 \text{ t}, \qquad 2\cdot 4\,\frac{2{,}9}{3{,}2} = 7{,}25 \text{ t}.$$

Fig. 50.

Steht nun die Last von 9 t bei $a = 25{,}254$ m, wo ihr Beitrag zu σ_0, σ_u am grössten ist (Fig. 48), dann kommen auf die beiden vorhergehenden Knotenpunkte (Fig. 51):

$$\text{bei } a = 22{,}746 \text{ m} \qquad P = 7{,}25\,\frac{2{,}116}{2{,}508} = 6{,}117 \text{ t},$$

$$\text{bei } a = 20{,}238 \text{ m} \qquad P = 7{,}25\,\frac{0{,}392}{2{,}508} = 1{,}133 \text{ t}.$$

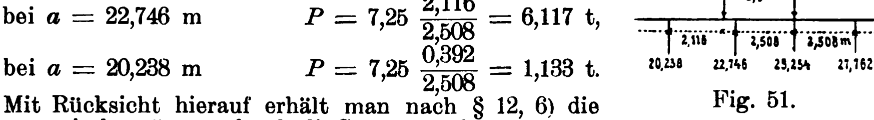


Fig. 51.

Mit Rücksicht hierauf erhält man nach § 12, 6) die numerisch grössten durch die Strassenwalze erzeugten Normalspannungen genügend genau:

$$\sigma_0 = 1{,}133\cdot 15{,}1585 + (6{,}117 + 9)\,24{,}0351 = 380{,}5 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = -1{,}133\cdot 4{,}4689 - (6{,}117 + 9)\,13{,}0581 = -202{,}5 \text{ „ }.$$

Die Berechnung der P bei den Knotenpunkten war übrigens nicht nöthig, da wir nach § 12, 6) mit den Lasten von 7,25 und 9 t und den unmittelbar darunter liegenden Ordinaten *b* direkt rechnen konnten, doch braucht man bei dem jetzt angewandten Verfahren (wie auch bei numerischer Interpolation der *b* unter 7,25 und 9 t) die Influenzlinie nicht zu verzeichnen. Bei einer grösseren Anzahl von Radlasten ist es natürlich bequemer, mit letzteren und den zugehörigen (abgegriffenen) *b* selbst zu rechnen.

c) Zur Erzielung eines möglichst grossen Drucks σ_u genügt es nach Fig. 48 zwei Strassenwalzen symmetrisch zur Trägermitte so zu stellen, dass die Lasten

von 7,25 und 9 t gleichweit vom Punkt 10,206 m abstehen, die Last von 9 t nach der Trägermitte hin. Man hat dann:

bei a = 7,698 m $\quad P = 7{,}25\,\frac{1{,}45}{2{,}508} = 4{,}192$ t

„ a = 10,206 m $\quad P = (7{,}25 + 9)\,\frac{1{,}058}{2{,}508} = 6{,}855$ „

„ a = 12,714 m $\quad P = 9\,\frac{1{,}45}{2{,}508} = 5{,}203$ „

und für diese Belastung nach § 12,6):

$$\sigma_u = 2\,(4{,}192 \cdot 8{,}5079 + 6{,}855 \cdot 9{,}3399 + 5{,}203 \cdot 8{,}6671) = 289{,}6 \text{ kg}.$$

Auch hier gilt das am Schlusse von *b* Gesagte.

d) Werden zur Erzeugung eines möglichst grossen Druckes σ_o die oben unter *d)* erwähnten Verkehrslasten angenommen, so ergiebt sich der Beitrag der Verkehrslast zu σ_o mit Rücksicht auf das Resultat unter *b)*:

$$\sigma_o = 380{,}5 + 2 \cdot 3{,}486\,(3{,}0076 + 8{,}1786) = 458{,}5 \text{ kg}.$$

e) Werden ferner zur Erzielung eines möglichst grossen Druckes σ_u die oben unter *e)* angeführten Verkehrslasten angenommen, so folgt der Beitrag der Verkehrslast zu σ_u mit Rücksicht auf das Resultat unter *c)*:

$$\sigma_u = 289{,}6 + 2 \cdot 3{,}486\,(0{,}2389\tfrac{2}{3} + 3{,}5917 + 6{,}4780 + 6{,}2766 + 1{,}9426) = 418{,}2 \text{ kg}.$$

Bemerkungen: Die angegebenen Verhältnisse entsprechen der Cannstatter Neckarbrücke. (IV. Abschnitt). Beim Zusammenwirken des bei derselben angewandten künstlichen Horizontalschubes (Beisp. 7), des gesammten Eigengewichts (Beisp. 6) und oben *a)* und der unter *d)* und *e)* angenommenen Verkehrslasten werden die grössten Drücke bei normaler Temperatur:

$$\sigma_o = -\,70{,}5 + 68{,}6 + 339{,}9 + 458{,}5 = 796{,}5 \text{ kg}.$$
$$\sigma_u = 81{,}0 + 46{,}4 + 234{,}7 + 418{,}2 = 780{,}3 \text{ „}$$

und bei Berücksichtigung der in Betracht gezogenen Temperaturveränderungen von $\tau = \pm 25^0$ (Beisp. 7):

$$\sigma_o = 796{,}5 + 104{,}5 = 901 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 780{,}3 + 120{,}0 = 900 \text{ „}$$

Mit den unter *b)* und *c)* erwähnten Verkehrslasten (ohne Menschengedränge) hätten sich $\sigma_o = 823$ kg, $\sigma_u = 771$ kg ergeben.

Beispiel 12. Verwendung gleichmässig vertheilter und koncentrirter Eigengewichte (Cannstatter Neckarbrücke).

Bei der Cannstatter Neckarbrücke (IV. Abschnitt) kann das Eigengewicht der Bogen selbst mit $g = 340$ kg per Meter als gleichmässig vertheilt auf die Spannweite von 48 m gelten, während die in Abständen von 2,508 m liegenden Vertikalen je $P = 4264$ kg koncentrirt übertragen (die Endvertikalen nur 5/8 soviel) Es sollen mit den von dieser Belastung herrührenden Normalspannungen σ_o, σ_u im Scheitelquerschnitt diejenigen Werthe der letzteren verglichen werden, welche man erhält, wenn das ganze Eigengewicht der Konstruktion entweder gleichmässig vertheilt oder bei den Vertikalen koncentrirt angenommen wird.

Die fraglichen Normalspannungen durch das wirkliche Eigengewicht sind nach Beisp. 6 und Beisp. 9*a)*:

$$\sigma_o = 68{,}6 + 339{,}9 = 408{,}5 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 46{,}4 + 234{,}7 = 281{,}1 \text{ „}$$

Hätten wir das ganze Eigengewicht als gleichmässig vertheilt angenommen, so würden sich mit $g = 340 + \frac{4264}{2{,}508} = 2040$ kg nach Beisp. 6 ergeben haben:

$\sigma_o = 0{,}201\,641 \cdot 2040 = 411{,}3$ kg d. i. mehr 0,69 %,

$\sigma_u = 0{,}136\,659 \cdot 2040 = 278{,}8$ „ „ „ weniger 0,82 „

Hätten wir dagegen das ganze Eigengewicht bei den Vertikalen koncentrirt angenommen, so würde man mit $P = 4264 + 340 \cdot 2{,}508 = 5117$ kg nach Beisp. 9*a* erhalten haben:

$\sigma_o = 0{,}079\,7244 \cdot 5117 = 407{,}9$ kg d. i. weniger 0,15 %,

$\sigma_u = 0{,}055\,0314 \cdot 5117 = 281{,}6$ „ „ „ mehr 0,18 „

Bemerkungen: Die Beiträge 68,6 und 46,4 kg des gleichmässig vertheilten Eigengewichts zu σ_o, σ_u wurden in Beisp. 6 mittelst der genauen Formeln berechnet. Annähernd können dieselben auch mit Hülfe der in Beisp. 10 festgestellten Influenzlinien erhalten werden, welche nur durch die geradlinige Verbindung aufeinander folgender Knotenpunkte von den jenem Eigengewichte entsprechenden abweichen. Bezeichnen $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{10}, b_{11}$ die Ordinaten der Influenzlinien bei $a = 0$, bei den am Schlusse von Beisp. 10 angeführten a und bei $a = 24$ m, dann hat man den Inhalt der ganzen Influenzflächen:

$$F = 2\left(\frac{b_0+b_1}{2}0{,}174+\frac{b_1+b_2}{2}2{,}508+\frac{b_2+b_3}{2}2{,}508+\ldots+\frac{b_9+b_{10}}{2}2{,}508+\frac{b_{10}+b_{11}}{2}1{,}254\right),$$

oder auch

$$F = [0{,}174\, b_0 + 2{,}682\, b_1 + 5{,}016\,(b_2 + b_3 + \,.\,.\, + b_9) + 3{,}762\, b_{10} + 1{,}254\, b_{11}],$$

wonach speziell für die Influenzflächen von σ_o, σ_u mit den am Schlusse von Beisp. 10 gegebenen b:

$$1000\, F_o = [-\,2{,}682 \cdot 0{,}1113 + 5{,}016\,(-\,1{,}6351 - \,.\,.\, + 15{,}1585) + (3{,}762 + 1{,}254)\, 24{,}0351] = 200{,}022,$$

$$1000\, F_u = [\;\;0{,}682 \cdot 9{,}2389 + 5{,}016\,(\;\;3{,}5917 + \,.\,.\, - \;4{,}4689) - (3{,}762 + 1{,}254)\, 13{,}0581] = 137{,}467.$$

Die Normalspannungen durch ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht von g per Meter Spannweite ergeben sich damit zufolge, § 12, 8)

$$\sigma_o = 0{,}200022\, g, \qquad \sigma_u = 0{,}137467\, g,$$

d. i. um 0,80 % kleiner, bezw. 0,59 % grösser als in Beisp. 6, wo wir

$$\sigma_o = 0{,}201641\, g, \qquad \sigma_u = 0{,}136659\, g$$

erhalten hatten.

§ 13. Berechnung der Gelenke.

Während die Berechnung der Rollenlager und Tangentiallager auf Grund neuerer Formeln von Hertz gegenwärtig mit derjenigen Zuverlässigkeit möglich ist, mit welcher die allgemeine Elasticitätslehre isotroper fester Körper unter Vernachlässigung der Reibung für die Auflager gilt* (wenn auch Versuche bezüglich genauerer Bestimmung der zulässigen Beanspruchungen wünschenswerth bleiben), konnte eine entsprechende Lösung für zwei sich umschliessende Cylinderflächen oder Kugelflächen, wie sie bei Zapfengelenken und Kugelgelenken auftreten, bis jetzt nicht geliefert werden. Man geht daher, die Reibung ebenfalls vernachlässigend, von der Annahme aus, dass für die in Frage kommenden Körper und elastischen Formänderungen die Zusammendrückungen normal den ursprünglichen Berührungsflächen proportional den sie erzeugenden Normalspannungen gesetzt werden dürfen.

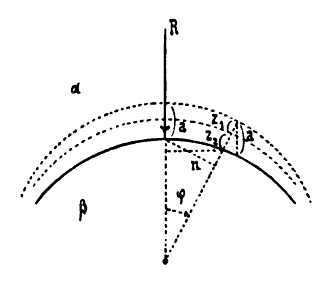


Fig. 52.

Die beiden Körper von zunächst beliebiger Berührungsfläche seien durch eine äussere Kraft R normal der Berührungsfläche bei ihrem Angriffspunkte gegeneinander gedrückt (Fig. 52). An beliebiger Stelle wo

* Vergl. Weyrauch, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover 1894, S. 131, 569; Lueger, Lexikon der gesammten Technik, Bd. I, Art. Auflager, Stuttgart 1895.

z_1, z_2 die normalen Eindrückungen der zwei Körper, hat man nach obiger Annahme die Normalspannung

$$N = \frac{z_1}{\alpha} = \frac{z_2}{\beta}, \tag{1}$$

unter α, β vom Material abhängiger Konstante verstanden. Bezeichnet a den Weg, um welchen die Körper bei der Deformation in der Richtung von R gegeneinander rücken und φ den Winkel der Normalen zur Berührungsfläche bei N mit der Richtung von R, so hat man (Fig. 52):

$$z_1 + z_2 = a \cos \varphi,$$

und nach Einsetzen von z_1, z_2 nach 1):

$$N = \frac{a \cos \varphi}{\alpha + \beta}. \tag{2}$$

Die Normalspannung ist also am grössten unmittelbar bei R, wo $\varphi = 0$, und bezeichnet man sie daselbst mit s, so ist allgemein

$$N = s \cos \varphi. \tag{3}$$

Der Normaldruck auf ein Flächenelement dF bei N ist NdF, und die parallel R wirkende Komponente desselben:

$$dR = NdF. \cos \varphi = s \cos^2 \varphi . dF,$$

woraus

$$R = s \int \cos^2 \varphi \, d F. \tag{4}$$

Die Integration ist auf die ganze Berührungsfläche zu erstrecken.

Bezeichnet n den Hebelarm der Normalspannung N bezüglich des Angriffspunktes von R, so verlangt das Gleichgewicht gegen Drehung

$$\int NdF. n = s \int \cos \varphi \, ndF = 0 \tag{5}$$

Für eine ebene Berührungsfläche lautet dieselbe wegen $\varphi = 0$

$$\int ndF = 0,$$

R muss also alsdann im Schwerpunkte der Berührungsfläche angreifen.

Bei elastischen Bogenträgern kommen nur kreiscylindrische Zapfengelenke vor, r sei der Radius, l die wirksame Länge eines solchen. Wir wählen $dF = l r d\varphi$ (Fig. 53) und haben dann nach 4):

$$R = s r l \int \cos^2 \varphi \, d \varphi,$$

uud wenn die Berührungsfläche auf der ganzen Länge l von $\varphi = - m\pi$ bis $\varphi = m\pi$ reicht:

$$R = s r l \, (m\pi + \sin m\pi \cos m\pi), \tag{6}$$

woraus bei einer zulässigen Druckbeanspruchuug s des wenigst widerstandsfähigeren der beiden Körper eine der Grössen r, l berechnet werden kann, wenn die andere gegeben ist. Gleichung 5) ist wegen $n = r \sin \varphi$ ebenfalls erfüllt.

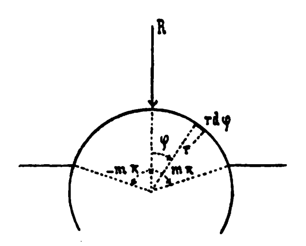


Fig. 53.

Für den gewöhnlichen Fall, dass genau oder genügend angenähert $m\pi = \frac{\pi}{2}$, würde aus 6) folgen:

$$r = \frac{2R}{\pi s l}.$$

Da jedoch auf eine Berührung längs der ganzen Fläche nicht zu rechnen ist, so kann man etwa setzen $m\pi = \frac{\pi}{4}$, womit abgerundet:

$$r = \frac{4R}{5sl}. \tag{7}$$

Mit Rücksicht auf die Art der Beanspruchung und um den Radius möglichst klein, also den Angriffspunkt von R möglichst bestimmt zu erhalten, kann man s in 7) je nach Material und sonstigen Umständen für Gusseisen gleich 600 bis 800, für Stahl gleich 1000 bis 1500 kg per qcm wählen. — Beispiel siehe IV L.

§ 14. Specielle Belastungsarten.

Die bis jetzt abgeleiteten Gleichungen gelten für ganz beliebige Belastungen. Alle Formeln können in der jetzigen Form auch für stetig vertheilte Lasten verwendet werden, wenn man sich diese in einer Anzahl Punkte koncentrirt denkt, wie die graphische Statik gewöhnlich verfährt. Man kann jedoch auch specielle Formeln für stetig vertheilte Lasten erhalten. Je nach der Belastung ändern sich dann in unseren allgemeinen Gleichungen nur diejenigen Ausdrücke, welche eben die Lasten enthalten, das heisst die Summen Σ.

Dabei ist zu beachten, dass eine stetig vertheilte Last von

$$u = f(a) \tag{1}$$

per Längeneinheit für die Strecke da eine unendliche kleine koncentrirte Last ergiebt (Fig. 54):

$$P = u\,da = f(a)\,da, \tag{2}$$

und eine Summe solcher unendlich kleiner Summanden als Integral bezeichnet wird. Wir haben hiernach z. B. für die Last 1) von 0 bis x:

$$\sum_0^x P = \int_0^x u\,da = \int_0^x f(a)\,da,$$

und speciell für eine gleichmässig vertheilte Last wegen konstantem u:

$$\sum_0^x P = u \int_0^x da = u\,x,$$

$$\sum_0^x P(x-a) = u \int_0^x (x-a)\,da = \frac{u\,x^2}{2},$$

Fig. 54.

sowie für gleichmässig vertheilte Lasten u, u' von 0 bis z bezw. z bis x

$$\sum_0^x P = u \int_0^z da + u' \int_z^x da = u\,z + u'(x-z).$$

In analoger Weise können andre gesetzmässig vertheilte Lasten behandelt werden.*)

Da die **Verkehrslast** bei Bogen entweder aus koncentrirten Lasten besteht (durch Vertikalständer übertragen) oder im Allgemeinen am einfachsten durch eine Anzahl koncentrirter Lasten ersetzt wird, so sollen im Folgenden die erwähnten Summenwerthe nur für eine über die ganze

* Weiteres über verschiedene Belastungen siehe Luegers Lexikon der gesammten Technik, Band II, Art. Belastung, Stuttgart 1895.

Spannweite l gleichmässig vertheilte Last und für zwei verschiedene auf je eine Trägerhälfte gleichmässig vertheilte Lasten angegeben werden. Der erste Fall wird häufig für das Eigengewicht der Konstruktion allein und Vollbelastung des ganzen Trägers als zutreffend angenommen (vergl. Beisp. 12), der zweite pflegt besonders bei vorläufigen und sonstigen näherungsweisen Berechnungen in Betracht zu kommen.

I. Gleichmässig vertheilte Last auf der ganzen Spannweite l. Dieselbe sei u per Längeneinheit Träger, sodass auf der Strecke $d\,a$ bei konstantem u (Fig. 55):

$$P = u\,d\,a.$$

Wir erhalten damit:

$$\sum_0^x P = u\,x \qquad \sum_0^x P(x-a) = \frac{u\,x^2}{2}$$

$$\sum_0^x P\,a = \frac{u\,x^2}{2} \qquad \sum_x^l P(l-a) = \frac{u\,(l-x)^2}{2},$$

Fig. 55.

wonach auch mit $m = \frac{l}{2}$:

$$\sum_0^l P\,a = \frac{u\,l^2}{2} \qquad \sum_0^l P(l-a) = \frac{u\,l^2}{2}$$

$$\sum_0^m P\,a = \frac{u\,l^2}{8} \qquad \sum_m^l P(l-a) = \frac{u\,l^2}{8}.$$

Weiter ergeben sich:

$$\sum_0^l P\,a\,(l-a) = \frac{u\,l^3}{6} \qquad \sum_0^l P\,a^2(l-a)^2 = \frac{u\,l^5}{30}$$

$$\sum_0^l P\,a\,(l-a)^2 = \frac{u\,l^4}{12} \qquad \sum_0^l P\,a^2(l-a) = \frac{u\,l^4}{12}$$

$$\sum_0^l P\,a\,(l-a)^3 = \frac{u\,l^5}{20} \qquad \sum_0^l P\,a^3(l-a) = \frac{u\,l^5}{20}$$

$$\sum_0^m P\,a\,(l-a) = \frac{u\,l^3}{12} \qquad \sum_0^m P\,a^2(l-a)^2 = \frac{u\,l^5}{60}$$

$$\sum_0^m P\,a^3(l-a) = \frac{3\,u\,l^5}{320} \qquad \sum_0^m P\,a\,(l-a)^3 = \frac{u\,l^5}{64}$$

$$\sum_0^m P\,a\,(3\,l^2-4\,a^2) = \frac{5\,u\,l^4}{16} \qquad \sum_0^m P\,a^2(3\,l-4\,a) = \frac{u\,l^4}{16}$$

$$\sum_0^l P\,a\,(l-a)\,(l+a) = \frac{u\,l^4}{4}$$

$$\sum_0^l P\,a\,(l-a)\,(2\,l-a) = \frac{u\,l^4}{4}$$

$$\sum_0^l P\,a\,(l-a)\,(l^2+l\,a-a^2) = \frac{u\,l^5}{5}$$

$$\sum_0^l P\,a\,(l-a)^2(5\,a-2\,l) = 0$$

$$\sum_0^l P\,a^2(l-a)\,(3\,l-5\,a) = 0$$

$$\sum_0^l Pa\,(l-a)\,(l^2+la-a^2-\beta\,l^2) = \left(1-\frac{5\beta}{6}\right)\frac{u\,l^5}{5}$$

$$\sum_0^l Pa\,(l-a)^2\,(5\,a-2\,l-12\,\varepsilon\,l) = -\,\varepsilon\,u\,l^5$$

$$\sum_0^l Pa^2\,(l-a)\,(3\,l-5\,a-12\,\varepsilon\,l) = -\,\varepsilon\,u\,l^5.$$

Oft kann die Berechnung einer Summe durch Zerfällung in einfachere Ausdrücke umgangen oder abgekürzt werden. So hat man:

$$\sum_0^l Pa\,(l-a)\,(l+a+3\,\zeta\,l) = \sum_0^l Pa\,(l-a)\,(l+a)+3\,\zeta\,l\sum_0^l Pa\,(l-a)$$
$$= \frac{u\,l^4}{4}+3\,\zeta\,l\,\frac{u\,l^3}{6} = (1+2\,\zeta)\,\frac{u\,l^4}{4}.$$

Auch manche der obigen Summen hätten sich so auswerthen lassen.

II. Verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten auf der ersten und zweiten Hälfte von l. Dieselben mögen per Längeneinheit betragen:

$$u \text{ von } a=0 \text{ bis } a=m=\frac{l}{2},\quad u' \text{ von } a=m=\frac{l}{2} \text{ bis } a=l.$$

Dann hat man auf der Strecke $d\,a$ (Fig. 56, 57):

$$P = u\,d\,a \text{ von } a=0 \text{ bis } m,\quad P = u'\,d\,a \text{ von } a=m \text{ bis } l.$$

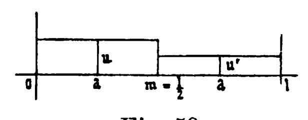


Fig. 56.

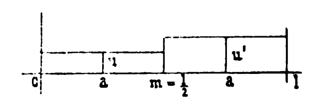


Fig. 57.

Die in Frage kommenden Summenausdrucke nehmen damit folgende Werthe an:

Für $x < m$:

$$\sum_0^x P = u\,x \qquad \sum_0^x P\,(x-a) = \frac{u\,x^2}{2}$$

$$\sum_0^x Pa = \frac{u\,x^2}{2} \qquad \sum_x^l P\,(l-a) = \frac{u\,(l-x)^2}{2}+\frac{u'-u}{8}\,l^2,$$

für $x > m$:

$$\sum_0^x P = u'\,x+\frac{u-u'}{2}\,l \qquad \sum_0^l P\,(x-a) = \frac{u'\,x^2}{2}+\frac{u-u'}{8}\,l\,(4\,x-l)$$

$$\sum_0^x Pa = \frac{u'\,x^2}{2}+\frac{u-u'}{8}\,l, \qquad \sum_x^l P\,(l-a) = \frac{u'\,(l-x)^2}{2}.$$

Hiernach sind beispielsweise

$$\sum_0^l Pa = \frac{u+3\,u'}{8}\,l^2 \qquad \sum_0^l P\,(l-a) = \frac{3\,u+u'}{8}\,l^2$$

$$\sum_0^m Pa = \frac{u\,l^2}{8} \qquad \sum_m^l P\,(l-a) = \frac{u'\,l^2}{8}.$$

Weiter erhalten wir:

$$\sum_0^1 Pa(l-a) = \frac{u+u'}{12} l^3 \qquad \sum_0^1 Pa^2(l-a)^2 = \frac{u+u'}{60} l^5$$

$$\sum_0^1 Pa(l-a)^2 = \frac{11u+5u'}{192} l^4 \qquad \sum_0^1 Pa^2(l-a) = \frac{5u+11u'}{192} l^4$$

$$\sum_0^1 Pa(l-a)^3 = \frac{13u+3u'}{320} l^5 \qquad \sum_0^1 Pa^3(l-a) = \frac{3u+13u'}{320} l^5$$

$$\sum_0^m P(l-2a)^2 = \frac{u l^3}{6} \qquad \sum_0^m P(l-2a)^3 = \frac{u l^4}{8}.$$

$$\sum_0^1 Pa\,(l-a)\,(l+a) = \frac{7u+9u'}{64} l^4$$

$$\sum_0^1 Pa\,(l-a)\,(2l-a) = \frac{9u+7u'}{64} l^4$$

$$\sum_0^1 Pa\,(l-a)\,(l^2+la-a^2) = \frac{u+u'}{10} l^5$$

$$\sum_0^1 P\,(l-a)\,(l^2-8la+4a^2) = -\frac{3u+5u'}{16} l^4$$

$$\sum_0^1 Pa\,(l^2-5la+4a^2) = \frac{u-u'}{16} l^4$$

$$\sum_0^1 Pa\,(l-a)^2(5a-2l) = \frac{u'-u}{32} l^5$$

$$\sum_0^1 Pa^2(l-a)\,(3l-5a) = \frac{u-u'}{32} l^5$$

$$\sum_0^1 Pa\,(l-a)\,(l^2+la-a^2-\beta l^2) = \left(1-\frac{5\beta}{6}\right)\frac{u+u'}{10} l^5$$

$$\sum_0^1 Pa\,(l-a)^2(5a-2l-12\varepsilon l) = \frac{u'-u}{32} l^5 - \frac{11u+5u'}{16}\varepsilon l^5$$

$$\sum_0^1 Pa^2(l-a)\,(3l-5a-12\varepsilon l) = \frac{u-u'}{32} l^5 - \frac{5u+11u'}{16}\varepsilon l^5$$

$$\sum_0^1 Pa\,(l-a)\,(l+a+3\zeta l) = \frac{7u+9u'}{64} l^4 + \frac{u+u'}{4}\zeta l^4.$$

Auch hier lässt sich die Berechnung der Summen häufig in der am Schlusse von I erwähnten Weise vereinfachen. In praktischen Fällen pflegt $u-u' = \pm p$ zu sein, unter p die Verkehrslast per Längeneinheit Träger verstanden. Sebstverständlich kann auch eine der Grössen u, u' gleich Null sein.

II. Abschnitt.

Besondere Bogenarten.

Besondere Arten von Bogenträgern unterscheiden wir je nach der Anzahl und Anordnung der Auflager und Zwischengelenke (einfache Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenk, kontinuirliche Bogen u. s. w.), besondere Formen je nach den Gesetzen der Bogenaxe und äusseren Begrenzung (Parabelbogen, Kreisbogen, Sichelbogen u. s. w.), besondere Systeme je nach der Gliederung der Füllung (Blechbogen, Fachwerkbogen einfachen und mehrfachen Systems u. s. w.). Die Voraussetzungen des I. Abschnitts werden aufrecht erhalten. Obwohl die abgeleiteten Formeln auch für Balken gelten, und für nicht horizontale Balken unter Umständen zur Anwendung kommen müssen, so beschränken wir uns doch, dem Zwecke dieser Schrift entsprechend, im Folgenden auf Bogenträger*. Um die praktische Verwendung des Gegebenen nicht unnöthig zu erschweren, führen wir auf Grund der zur Ermittelung statisch unbestimmter Grössen (Horizontalschub H, Endmomente M, M', Einsenkungen e) nöthigen Integrationen zunächst nur die einfacheren Resultate an, und verweisen die Ableitungen selbst in den III. Abschnitt, wo man sie, wenn Zeit und Lust dazu ausreichen oder ein Bedürfniss dafür eintritt, verfolgen kann. Zu empfehlen ist wenigstens die Durchsicht von § 26. Wir berücksichtigen beliebige feste und bewegte Lasten, beliebige für den ganzen Bogen gleichmässige Temperaturänderungen** und beliebige kleine Bewegungen der Widerlager und Pfeiler. Zwar sollen solche Bewegungen möglichst ausgeschlossen sein, und die eigentliche Berechnung der Bogen wird auch dementsprechend durchgeführt, doch ist es gut, sich vom Einflusse unbeabsichtigter Ausweichungen der Stützpunkte von vornherein Rechenschaft zu geben. Auch kann dem Ingenieur die Frage gestellt werden, welchen Einfluss auf die Beanspruchungen eine thatsächlich eingetretene Bewegung eines Pfeilers oder Widerlagers ausgeübt hat (Beisp. 18 und 37). Aus diesen Gründen wurde der fragliche, übrigens nur bei statisch unbestimmten Bogenarten auftretende Einfluss schon in der ersten Auflage dieser Schrift in Betracht gezogen.

---

* Ueber die Behandlung von Balken auf Grund der vorausgegangenen Formeln siehe Weyrauch, Aufgaben zur Theorie elastischer Körper, Leipzig 1885, S. 86—158 (insbesondere A 54, 58).

** Bezüglich des Einflusses der Temperaturänderungen weichen die hier gegebenen Formeln von den durch den Verfasser in Luegers Lexikon, Bd. II, Stuttgart 1895, und in einem Aufsatze der Allgemeinen Bauzeitung 1895 angeführten etwas ab, was daher rührt, dass dort $\Delta v = \alpha \tau v$ (vergl. § 3) der früheren Uebung gemäss nicht berücksichtigt wurde. Für die gewöhnlichen flachen Bogen liefern beiderlei Formeln nur wenig von einander abweichende Resultate.

§ 15. Einfache Bogen mit drei Gelenken.

Der Bogen habe in der Axe zwei Kämpfergelenke von gleicher Höhenlage und ein Zwischengelenk bei $x = m = \frac{l}{2}$, $y = f$. (Fig. 58.) Alsdann sind

$$M = M' = M_m = 0, \qquad k = 0. \tag{1}$$

Für das Moment und die Vertikalkraft in einem beliebigen Querschnitt x liefern die Gleichungen § 1, 3) 8) und 2) 7):

$$\begin{aligned} M_x &= Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) \\ &= \frac{l-x}{l}\sum_0^x Pa + \frac{x}{l}\sum_x^l P(l-a) - Hy, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} V_x &= V - \sum_0^x P \\ &= -\frac{1}{l}\sum_0^x Pa + \frac{1}{l}\sum_x^l P(l-a). \end{aligned} \tag{3}$$

Die Vertikalreaktionen der Kämpfer sind nach § 1, 4) 5)

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a), \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Pa, \tag{4}$$

während der Horizontalschub aus 2) mit $x = m$, $y = f$ folgt:

$$H = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^m Pa + \sum_m^l P(l-a)\right]. \tag{5}$$

Bei verschiedenen Stützhöhen wurden H durch § 25, 22) und V, V' durch § 1, 4) 5) mit $M = M' = 0$ bestimmt sein.

Für die Normalkraft im Querschnitt x gilt ohne Aenderung:

$$N_x = V_x \sin\varphi + H\cos\varphi, \tag{6}$$

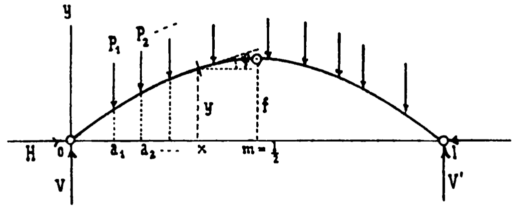


Fig. 58.

auch für die Transversalkraft T_x, die resultierende Schnittkraft R_x, die Normalspannungen σ, σ_o, σ_u u. s. w. bleiben die in §§ 1, 8, 9 abgeleiteten Formeln bestehen. Demnach hat man z. B. die Normalspannungen vollwandiger Bogen von symmetrisch zur Bogenaxe angeordneten Querschnitten im obersten und untersten Querschnittselement:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \tag{7}$$

unter F den nutzbaren Querschnitt, unter W das nutzbare Widerstandsmoment verstanden. Die Werthe aller übrigen σ eines Querschnittes liegen zwischen den Werthen σ_o, σ_u.

Verschiedene Formen.

Obige Gleichungen gelten für beliebig geformte Bogen mit gleich hohen Kämpfergelenken und in der Mitte liegendem Zwischengelenk.

Die Ausdrücke für die Ordinate y und den Neigungswinkel φ der Bogenaxe hängen jedoch von der Form der letzteren ab. So hat man bei einer Spannweite l und dem Pfeile f für den Parabelbogen:

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x), \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x), \tag{8}$$

für den Kreisbogen:

$$y = \sqrt{(r-f)^2 + x(l-x)} - (r-f), \tag{9}$$

$$\sin \varphi = \frac{m - x}{r}, \qquad \cos \varphi = \frac{r - f + y}{r}, \tag{10}$$

wobei der Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}. \tag{11}$$

Für den Halbkreisbogen ergeben sich wegen $f = r$:

$$y = \sqrt{x(l-x)}, \tag{12}$$

$$\sin \varphi = \frac{m - x}{r}, \qquad \cos \varphi = \frac{y}{r}, \tag{13}$$

während für den Halbellipsenbogen gelten:

$$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2f^2}{l^2} \frac{l - 2x}{y} = \frac{f}{l} \frac{l - 2x}{\sqrt{x(l-x)}} \tag{15}$$

Für geradlinige Bogen (Fig. 59) hätte man auf der ersten Hälfte:

$$y = \frac{2f}{l} x, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2f}{l}, \tag{16}$$

auf der zweiten Hälfte:

$$y = \frac{2f}{l} (l - x), \qquad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{2f}{l}. \tag{17}$$

Mit $\operatorname{tg} \varphi$ sind bekanntlich auch $\sin \varphi$ und

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \tag{18}$$

bestimmt, doch genügen stets $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ oder $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$, da man z. B. N_x anstatt durch 6) ausdrücken kann:

$$N_x = (H + V_x \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi.$$

Die Gleichungen 8)—18) gelten auch für Bogen mit zwei Gelenken, ohne Gelenke etc.

Häufig hat man der Bogenaxe aus statischen, ästhetischen oder anderen Gründen eine Form gegeben, welche sich durch kein einheitliches Gesetz ausdrücken lässt. Bei der älteren Coblenzer Brücke beispielsweise ist die Bogenaxe zwar von der Mitte bis 2,85 m horizontaler Entfernung von den Kämpfergelenken kreisförmig, von hier an jedoch folgt sie tangential anschliessenden Geraden. Bei den sichelförmigen Bogen der Maria-Pia-Brücke über den Douro (Fig. 67) wollte man die Gurtungen Parabeln einschreiben (womit auch die Axe

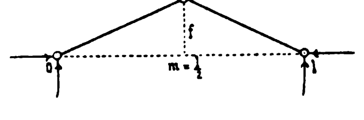


Fig. 59.

parabelisch geworden wäre), es ergaben sich jedoch hierbei gegen die Enden hin zu geringe Höhen für die auftretenden Momente, und so änderte man die Form durch einen freien Linienzug mit Rücksicht auf gefälliges Aussehen ab. Bei Bogenträgern für Bahnhofshallen hat man sich durch Ansprüche an Raumentwicklung und monumentales Aussehen leiten lassen, bei Gewölbebogen ist die Vermeidung von Zugspannungen massgebend, u. s. w.

Verschiedene Belastungen.

Die bisherigen Gleichungen gelten für beliebige Belastung. Bezüglich stetig vertheilter Lasten ist nach der Anleitung in § 14 zu verfahren. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit ergeben sich:

$$V = V' = \frac{u\,l}{2}, \qquad H = \frac{u\,l^2}{8f}, \tag{19}$$

und damit für beliebige Querschnitte x:

$$V_x = u\left(\frac{l}{2} - x\right), \tag{20}$$

$$M_x = \frac{u}{2}\left[x\,(l - x) - \frac{y\,l^2}{4f}\right], \tag{21}$$

und speziell bei parabolischen Bogen wegen 8):

$$M_x = 0.$$

Beträgt dagegen die gleichmässig vertheilte Last per Längeneinheit u auf der ersten, u' auf der zweiten Hälfte der Spannweite, so erhält man:

$$V = \frac{3\,u + u'}{8}\,l, \qquad V' = \frac{u + 3\,u'}{8}\,l, \tag{23}$$

$$H = \frac{u + u'}{16f}\,l^2, \tag{24}$$

womit für beliebige x von 0 bis m:

$$V_x = V - u\,x, \tag{25}$$

$$M_x = V\,x - H\,y - \frac{u\,x^2}{2}, \tag{26}$$

also speziell bei Parabelbogen wegen 8):

$$M_x = \frac{u - u'}{4}\,x\,(l - x). \tag{27}$$

Für Querschnitte x von m bis l lassen sich ähnliche Formeln angeben, welche aber der Symmetrie wegen im Allgemeinen nicht zur Verwendung kommen. Selbstverständlich kann auch eine der Lasten u, u' gleich 0 werden. Bei praktischen Berechnungen pflegt $u - u' = \pm p$ zu sein, unter p die Verkehrslast per Längeneinheit verstanden.

Für eine beliebige symmetrische Belastung entsprechen je zwei symmetrisch zur Trägermitte bei a, a' gelegenen Lasten P, P':

$$P' = P, \qquad a' = l - a,$$

sodass beispielsweise:

$$P\,(l - a) + P'\,(l - a') = P\,l,$$

$$\sum_0^l P\,(l - a) = l \sum_0^m P.$$

Wir erhalten also für symmetrische Belastung nach 4) 5):

$$V = V' = \sum_0^m P, \qquad H = \frac{1}{f}\sum_0^m Pa \tag{28}$$

Liegt gerade in der Mitte eine koncentrirte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie gemäss nur die Hälfte derselben in $\sum_0^m P$ aufzunehmen. Für eine Einzellast P bei m folgen also

$$V = V' = \frac{P}{2}, \qquad H = P\frac{l}{2f} \tag{29}$$

Kämpferdrucklinie. Kernlinien.

Die Umhüllungslinien U, U' der Kämpferdrücke sind bei allen Bogen mit Kämpfergelenken Punkte, sie fallen mit den Mittelpunkten der Kämpfergelenke zusammen (§ 2). Für die Schnittlinie S der Kämpferdrücke gilt nach § 2, 1) mit $M = 0$ die Gleichung:

$$b = \frac{V}{H}a, \tag{30}$$

worin V, H einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen. Nun liefern 4) 5):

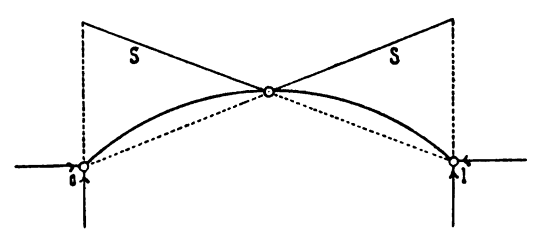


Fig. 60.

von $a = 0$ bis $a = m$ $\quad V = P\frac{l-a}{l}, \quad H = P\frac{a}{2f}$

„ $a = m$ „ $a = l$ $\quad V = P\frac{l-a}{l}, \quad H = P\frac{l-a}{2f},$

Daher sind die Ordinaten der Schnittlinie S:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{von } a = 0 \text{ bis } m & b = 2f\frac{l-a}{l}, \\ \text{„ } a = m \text{ „ } l & b = 2f\frac{a}{l}. \end{array}\right\} \tag{31}$$

Die Linie und ihre graphische Ermittelung sind in Fig. 60 angedeutet.

Die Kernlinien bleiben durch § 8 bestimmt, wonach z. B. bei symmetrisch zur Axschicht liegendem Querschnitt die Entfernungen des oberen und unteren Kernpunktes von der Axe:

$$k_o = k_u = \frac{W}{F}, \tag{32}$$

während die Kernlinien bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen (Gitterbogen, über Bogenfachwerke siehe § 22, 23) oder vernachlässigter Füllung mit den Gurtungsschwerlinien zusammenfallen.

Grenzwerthe bei bewegter Last.

Will man bei Belastung durch bewegte Radlastzüge möglichst genau rechnen, so ist nach § 12 zu verfahren (Beispiele 9, 11). In anderen Fällen, insbesondere bei gleichmässig vertheilter, bewegter Last finden

die in §§ 10,11 vorgeführten Methoden Verwendung. Die ungünstigsten Belastungen ergeben sich danach beispielsweise für die Normalspannungen in den obersten und untersten Querschnittselementen, welche bei der Dimenisionirung meist allein in Betracht kommen, wie folgt:

Grenzwerthe von σ_o (Fig. 61). Man ziehe aus beiden Kämpfergelenken Gerade durch den unteren Kernpunkt des Querschnitts bis zu den Durchschnitten mit der Linie S; für max. druck σ_o ist zwischen diesen Schnittpunkten, für min. druck σ_o auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

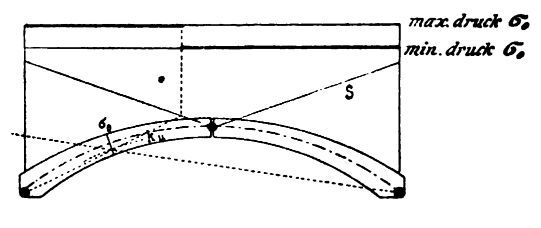


Fig. 61.

Grenzwerthe von σ_u (Fig. 62). Man ziehe aus beiden Kämpfergelenken Gerade durch den oberen Kernpunkt des Querschnitts bis zu den Durchschnitten mit der Linie S; für min. druck σ_u ist zwischen diesen Schnittpunkten, für max. druck σ_u auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

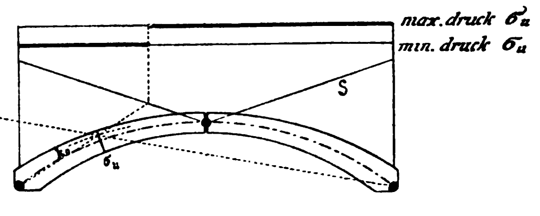


Fig. 62.

Vereinfachung (Fig. 63). Will man von der in § 11 besprochenen Vereinfachung Gebrauch machen, durch welche die Bestimmung der Kernlinien vermieden und die Anzahl zu berücksichtigender Belastungsfälle auf etwa die Hälfte reduzirt wird, so ist wie folgt vorzugehen: Man ziehe aus beiden Kämpfergelenken

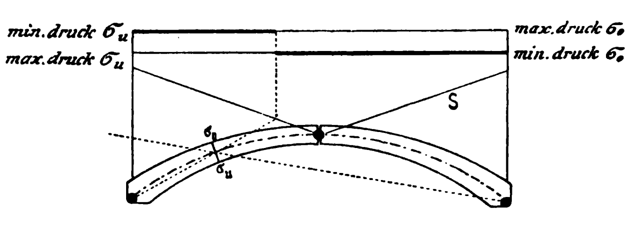


Fig. 63.

Gerade durch den Axpunkt des Querschnitts bis zu den Durchschnitten mit der Linie S; für max. druck σ_o und min. druck σ_u ist zwischen diesen Schnittpunkten (wie für max. pos. M_x), für min. druck σ_o und max. druck σ_u auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten (wie für max. neg. M_x).

Für die Querschnitte unmittelbar bei den Gelenken treten die Grenzwerthe von σ_o, σ_u stets (auch nach der genaueren Bestimmung der ungünstigsten Belastungen) bei möglichst starker Belastung der ganzen Spannweite und für die feste Last allein ein.

Formänderungen.

Alle bis jetzt für den Bogen mit drei Gelenken erhaltenen Beziehungen ergaben sich rein statisch, ohne Rücksicht auf die elastischen Formänderungen. Es haben demnach auch für jenen Bogen, im Gegensatze zu Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk (vergl. §§ 16, 17), für je einen ganzen Querschnitt gleichmässige Temperaturänderungen und kleine Bewegungen der Widerlager keinen in Betracht kommenden Einfluss auf die Beanspruchungen. Da die angeführten Beziehungen für die Dimensionirung genügen, so braucht man bei Bogen mit drei Gelenken nur dann auf die Formänderungen Rücksicht zu nehmen, wenn die letzteren selbst interessiren. Dies trifft am ehesten bezüglich der Einsenkung in der Trägermitte zu.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem (mittlerem) $c = J \cos \varphi$ ist nach der Ableitung in § 30 die von beliebiger Belastung herrührende Einsenkung in der Trägermitte (über ε siehe unten):

$$e = \frac{1}{48\,E\,c}\left[\sum_0^m P(l-2\,a)^3 - l^2 \sum_0^1 P(l-a) + \frac{4}{l}\sum_0^1 P\,a\,(l-a)^3 + \frac{7+32\,\varepsilon}{5} H f\, l^2\right]. \tag{33}$$

Speziell für eine zur Trägermitte symmetrische Belastung hat man:

$$e = \frac{1}{6\,E\,c\,l}\left[\sum_0^m P\,a^3\,(l-a) - \frac{3-32\,\varepsilon}{40}\, l^3 \sum_0^m P\,a\right]. \tag{34}$$

Liegt gerade in der Mitte eine koncentrirte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in $\sum\limits_0^m$ aufzunehmen, wonach z. B. für eine Einzellast P in der Trägermitte:

$$e = \frac{1+16\,\varepsilon}{480}\,\frac{P\,l^3}{E\,c}. \tag{35}$$

Von 34) kann auch bei unsymmetrischer Belastung Gebrauch gemacht werden, wenn man berücksichtigt, dass die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige Belastung halb so gross als durch eine mittelst Verdoppelung dieser Belastung (Uebertragung symmetrisch zur Trägermitte) hergestellte symmetrische Belastung ist. (Vergl. Beisp. 29 u. 44).

Die Werthe der Summenausdrücke Σ für stetig vertheilte Lasten sind aus § 14 zu entnehmen. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit folgt dann aus 34):

$$e = \frac{\varepsilon}{E\,c}\,\frac{u\,l^4}{60}, \tag{36}$$

und für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte aus Gleichung 33):

$$e = \frac{\varepsilon}{E\,c}\,\frac{u+u'}{120}\,l^4. \tag{37}$$

Diese Formel führt mit $u' = u$ wieder auf 36), wie man auch umgekehrt von 36) auf 37) hätte schliessen können.

Eine Temperaturänderung τ gegen die Normaltemperatur (bei Zunahme τ positiv) bewirkt:

$$e = -\alpha\tau\left(f + \frac{l^2}{4f}\right) \tag{38}$$

während einer Aenderung Δl der Spannweite (für Zunahme Δl positiv) und einer Aenderung Δk der ursprünglich gleichen Höhenlage der Stützpunkte (bei höherer Stütze l ist Δk positiv) entsprechen würde:

$$e = \frac{l\,\Delta l}{4f} - \frac{\Delta k}{2}. \tag{39}$$

In 33)—37) wie auch stets in der Folge ist mit r nach 11) ausgedrückt

$$\varepsilon = \frac{15\,\gamma}{8}\left(\frac{r-f}{rf}\right)^2, \tag{40}$$

worin

$$\gamma = \frac{c}{k} = \frac{J\cos\varphi}{F\cos\varphi} \tag{41}$$

das Verhältniss der Mittelwerthe c, k von $J\cos\varphi$ und $F\cos\varphi$ bedeutet, wofür jedoch mit kaum geringerer Genauigkeit auch der Mittelwerth von $J : F$ gesetzt werden kann (§ 27). Man erhält dann z. B. für den Fall, dass bei konstanter Entfernung h der Gurtungsschwerpunkte unter Vernachlässigung der Füllung $J = \frac{F h^2}{4}$ gesetzt wird: $\gamma = \frac{h^2}{4}$, und für den rechteckigen Querschnitt (Gewölbe) mit $J = \frac{b\,h^3}{12}$, $F = b\,h$ ebenso einfach: $\gamma = \frac{h^2}{12}$. Ist der Bogen sehr flach, dann ergibt sich unter Vernachlässigung von f gegen r annähernd

$$\varepsilon = \frac{15\,\gamma}{8 f^2} = \frac{15\,J}{8\,F f^2} \tag{42}$$

Mit Rücksicht auf das zuvor Gesagte würden dann ε für Brückenbogen etwa zwischen $\frac{15}{32}\left(\frac{h}{f}\right)^2$ und $\frac{5}{32}\left(\frac{h}{f}\right)^2$ liegen.

Weiteres über die Formänderungen parabolischer Bogen von konstantem $J\cos\varphi$ enthält § 30. Bezüglich der letzteren Annahme siehe § 28. Ueber die Formänderungen von Bogen mit beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten geben die §§ 26, 33 Aufschluss. Die Gleichungen 38) 39) gelten auch für beliebige symmetrische Bogen mit drei Gelenken, einschliesslich der Gewölbe (§ 18) und Bogenfachwerke (§§ 22, 23). Vergl. Aufg. 16 und § 33.

Beispiel 13. Berechnung eines Gewölbes mit drei Gelenken (Pruthbrücke bei Jaremcze).

Für das Gewölbe der Pruthbrücke bei Jaremcze (Fig. 82) beträgt die Spannweite $l = 67{,}62$ m, der Pfeil der Bogenaxe $f = 18{,}1215$ m (Lichtweite 65 m, Pfeil der Gewölbelaibung 17,9 m). Gewölbestärke im Scheitel 2,1 m, bei den Kämpfern 3,1 m, die Lagerfugen können als senkrecht zur Bogenaxe gelten. Brückenbreite

im Bahnplanum 4,5 m, Anlauf der Stirnmauern beiderseits 1/20, sodass nach unten zunehmende Breiten der Lagerfugen entstehen. Radius der Gewölbelaibung 38,454 m, des Gewölberückens 42,792 m. Bei der Berechnung wurden die Bogenaxe ebenfalls kreisförmig und die in den Kolumnen 6 und 8 der Tabelle des Beispiels 30 angeführten festen Lasten angenommen.* Es sollen unter diesen Voraussetzungen, jedoch für den Fall, dass an den Kämpfern und im Scheitel Gelenke angebracht wären, (vergl. § 18) die Kämpferreaktionen und Beanspruchungen σ_0, σ_u berechnet werden: *a)* für die feste Last allein; *b)* für Verkehrsbelastung des ganzen Bogens; *c)* für Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte; *d)* für Verkehrsbelastung der zweiten Bogenhälfte; *e)* für die ungünstigsten Belastungen.

Bezeichnen h, b die Höhe und Breite der Lagerfuge x, so hat man unter Voraussetzung genügender Widerstandsfähigkeit derselben gegen die auftretenden Normalspannungen die Werthe der letzteren im obersten und untersten Fugenelement nach § 18, 5) 6):

$$\sigma_o = \frac{1}{b\,h}\left(N_x + \frac{6}{h} M_x\right), \qquad \sigma_u = \frac{1}{b\,h}\left(N_x - \frac{6}{h} M_x\right). \tag{1}$$

Hierin sind nun nach § 15 für beliebige Belastung mit

$$V_x = V - \sum_0^x P \tag{2}$$

die Normalkraft und das Moment bei x:

$$N_x = V_x \sin\varphi + H\cos\varphi, \tag{3}$$

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) = V_x - Hy + \sum_0^x Pa. \tag{4}$$

Die Vertikalreaktionen V, V' der Kämpfer und der Horizontalschub H sind durch § 15, 4) 5) 28) bestimmt.

Da die Bogenaxe kreisförmig und die Lagerfugen senkrecht zu derselben angenommen sind, so hat man nach § 15, 9) 10) mit $m = \frac{l}{2}$:

$$y = \sqrt{(r-f)^2 + x(l-x)} - (r-f), \tag{5}$$

$$\sin\varphi = \frac{m-x}{r}, \qquad \cos\varphi = \frac{r-f+y}{r}, \tag{6}$$

worin nach § 15, 11) der Radius der Bogeaxe:

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \tag{7}$$

Mit den gegebenen l, f liefern diese Gleichungen $r = 40{,}6010$ m und

$$y = \sqrt{505{,}3279 + x(l-x)} - 22{,}4795 \text{ m},$$

$$\sin\varphi = \frac{33{,}81 - x}{40{,}601}, \qquad \cos\varphi = \frac{22{,}4795 - y}{40{,}601}.$$

Die Berechnung ist für alle Lagerfugen im Wesentlichen die gleiche. Es genügt also, dieselbe für die Fugen beim Kämpfer, beim Scheitel und an einer Zwischenstelle zu zeigen. Durch Berücksichtigung von 4 bis 8 weiteren Fugen einer Bogenhälfte könnte im vorliegenden Falle jedem Bedürfniss genügt werden. Nach vorstehenden Gleichungen hat man:

für $x =$	0	20,81	33,81 m $= \frac{l}{2}$
$y =$	0	15,9840	18,1215 m
$\sin\varphi =$	0,8327	0,3202	0
$\cos\varphi =$	0,5537	0,9474	1,

während der Veröffentlichung über die Brücke entnommen wurden:

* Hinsichtlich obiger Angaben siehe Kulka, Ueber die Berechnung grosser gewölbter Brücken, Zeitschr. d. östr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1894, S. 365, 377.

$$b = 6{,}60 \qquad 4{,}95 \qquad 4{,}75 \text{ m}$$
$$h = 3{,}1 \qquad 2{,}24 \qquad 2{,}1 \text{ m},$$
$$\text{womit } b\,h = 20{,}460 \qquad 11{,}088 \qquad 9{,}975 \text{ qm}.$$

Bei der weiteren Berechnung machen wir von den in den Kolumnen 4, 5, 8, 9 der Tabelle des Beispiels 30 gegebenen Zahlen Gebrauch und nehmen auf die Symmetrie des Bogens Rücksicht. Die σ_o, σ_u werden in kg per qcm gegeben.

a) Feste Last allein.. Vertikalreaktionen der Kämpfer nnd Horizontalschub nach § 15, 28)

$$V = V' = 2216{,}9 \text{ t},$$
$$H = \frac{30836{,}14}{18{,}1215} = 1701{,}61 \text{ t}.$$

Entsprechend dem oben Gesagten ergeben sich für die Kämpferfuge mit $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 2216{,}9 \,.\, 0{,}8327 + 1701{,}63 \;\; 0{,}5537 = 2788{,}20 \text{ t},$$
$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{2788{,}20}{204{,}6} = 13{,}628 \text{ kg},$$

für die Fuge $x = 20{,}81$ m:

$$V_x = 2216{,}9 - (114{,}8 + \ldots + 101{,}9) = 562{,}00 \text{ t},$$
$$N_x = 562 \,.\, 0{,}3202 + 1701{,}63 \,.\, 0{,}9474 = 1792{,}08 \text{ t}.$$
$$M_x = 562 \,.\, 20{,}81 - 1701{,}63 \,.\, 15{,}9840 + (243{,}66 + \ldots + 2037{,}75) = 465{,}17 \text{ mt},$$
$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(1792{,}08 + \frac{6}{2{,}24}\, 465{,}17\right) = 27{,}400 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(1792{,}08 - \frac{6}{2{,}24}\, 465{,}17\right) = 4{,}925 \text{ kg},$$

und für die Scheitelfuge mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{1702{,}63}{99{,}75} = 17{,}059 \text{ kg}.$$

b) Vollbelastung. Für die Verkehrslast allein ergeben sich nach den unter *a* angewandten Formeln die Kämpferreaktionen:

$$V = V' = 180 \text{ t},$$
$$H = \frac{3175{,}419}{18{,}1215} = 175{,}23 \text{ t}.$$

Damit folgen für die Kämperfuge wegen $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 180 \,.\, 0{,}8327 + 175{,}23 \,.\, 0{,}5537 = 246{,}91 \text{ t}.$$
$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{246{,}91}{204{,}6} = 1{,}207 \text{ kg},$$

für die Fuge $x = 20{,}81$ m:

$$V_x = 180 - 108 = 72 \text{ t},$$
$$N_x = 72 \,.\, 0{,}3202 + 175{,}23 \,.\, 0{,}9474 = 189{,}07 \text{ t},$$
$$M_x = 72 \,.\, 20{,}81 - 175{,}23 \,.\, 15{,}9840 + (101{,}181 + \ldots + 179{,}997) = -\, 93{,}45 \text{ mt},$$
$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(189.07 - \frac{6}{2{,}24}\, 93{,}45\right) = -\, 0{,}552 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(189{,}07 + \frac{6}{2{,}24}\, 93{,}45\right) = 3{,}963 \;\text{,,},$$

für die Scheitelfuge mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{175{,}23}{99{,}75} = 1{,}757 \text{ kg}.$$

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast erhalten wir:

$$V = V' = 2216{,}9 + 180 = 2396{,}9 \text{ t},$$
$$H = 1701{,}63 + 175{,}23 \;\; 1876{,}86 \text{ t},$$
$$\text{und bei } x = 0 \qquad 20{,}81 \qquad 33{,}81 \text{ m},$$
$$\sigma_o = 14{,}835 \qquad 26{,}848 \qquad 18{,}816 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 14{,}835 \qquad 8{,}888 \qquad 18{,}816 \;\text{,,}.$$

c) Verkehrslast von 0 bis m. Die Verkehrslast allein erzeugt nach § 15, 4) 5) die Kämpferreaktionen:

$$V' = \frac{3175,419}{67,62} = 46,96 \text{ t}, \qquad V = 180 - 46,96 = 133,04 \text{ t},$$

$$H = \frac{3175,419}{2 \,.\, 18,1215} = 87,61 \text{ t}.$$

Damit ergeben sich für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 133,04 \,.\, 0,8327 + 87,61 \,.\, 0,5537 = 159,29 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{159,25}{204,6} = 0,779 \text{ kg},$$

für die Fuge $x = 20,81$ m:

$$V_x = 133,04 - 108 = 25,04 \text{ t},$$

$$N_x = 25,04 \,.\, 0,3202 + 87,61 \,.\, 0,9474 = 91,02 \text{ t},$$

$$M_x = 25,04 \,.\, 20,81 - 87,61 \,.\, 15,9840 + (101,182 + \ldots + 179,977) = 329,83 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88}\left(91,02 + \frac{6}{2,24}\, 329,83\right) = 8,789 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88}\left(91,02 - \frac{6}{2,24}\, 329,83\right) = -\,7,147 \text{ ,, },$$

für die Scheitelfuge mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{87,61}{99,75} = 0,878 \text{ kg}.$$

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast erhält man:

$$V = 2216,9 + 133,04 = 2349,94 \text{ t},$$
$$V' = 2216,9 + 46,96 = 2263,86 \text{ t},$$
$$H = 1701,63 + 87,61 = 1789,24 \text{ t},$$

und bei x =	0	20,81	33,81 m,
σ_o =	14,407	36,181	17,937 kg,
σ_u =	14,407	− 2,222	17,937 ,, .

d) Verkehrslast von m bis l. Mit Rücksicht auf die unter *c*) gefundenen Kämpferreaktionen sind im vorliegendem Falle:

$$V = 46,96 \text{ t}, \qquad V' = 133,04 \text{ t}, \qquad H = 87,61 \text{ t}.$$

Hiermit folgen für die Kämpferfuge, wo $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 46,96 \,.\, 0,8327 + 87,61 \,.\, 0,5537 = 87,61 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{87,61}{204,6} = 0,428 \text{ kg},$$

für die Fuge $x = 20,81$ m:

$$V_x = 46,96 - 0 = 46,96 \text{ t},$$

$$N_x = 46,96 \,.\, 0,3202 + 87,61 \,.\, 0,9474 = 98,04 \text{ t},$$

$$M_x = 46,96 \,.\, 20,81 - 87,61 \,.\, 15,9840 = -\,423,12 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88}\left(98,04 - \frac{6}{2,24}\, 423,12\right) = -\,9,337 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110.88}\left(98,04 + \frac{6}{2,24}\, 423,12\right) = 11,106 \text{ ,, },$$

und für die Scheitelfuge mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{87,61}{99,75} = 0,878 \text{ kg}.$$

Da die unter *c*) und *d*) verwendeten Verkehrsbelastungen zusammen die Verkehrslast des ganzen Bogens ausmachen, so müssen die von der Verkehrslast allein herrührenden V, V', H, V_x, N_x, M_x, σ_o, σ_u in den Fällen *c*) und *d*) zusammen gleich den entsprechenden Werthen unter *b*) sein, was zur Abkürzung oder Kontrate der Rechnung dienen kann.

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast hat man mit Rücksicht auf die Werthe unter *c*) oder unmittelbar:

$$V = 2263{,}86 \text{ t}, \quad V' = 2349{,}49 \text{ t}, \quad H = 1789{,}24 \text{ t},$$

und bei x =	0	20,81	33,81 m,
σ_o =	14,056	18,063	17,937 kg,
σ_u =	14,056	16,031	17,937 „ .

e) Ungünstigste Belastungen. Die Grenzwerthe von V, V', H sowie der Beanspruchungen σ_o, σ_u in den Fugen unmittelbar bei den Gelenken treten in den Belastungsfällen *b*) und *a*) ein. Für die σ_o, σ_u in Fuge $x = 20{,}81$ m entstehen nach dem auf S. 62 erwähnten vereinfachten Verfahren die Grenzwerthe, wenn einmal die 9 ersten Verkehrslasten, das andremal alle übrigen Verkehrslasten auf den Bogen kommen (Fig. 64). Wir erhalten nach § 15, 4) 5) mit Rücksicht auf die Tabelle des Beispiels 30 und $238{,}477 + \ldots + 296{,}977 = 1100{,}158$ für die erste dieser Belastungen:

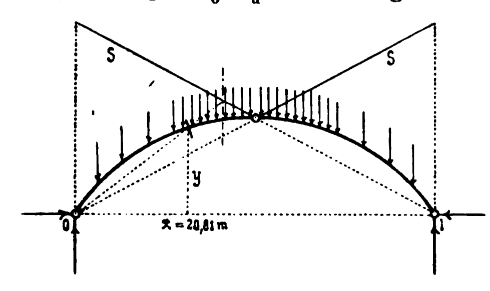


Fig. 64.

$$H = \frac{3175{,}419 - 1100{,}158}{36{,}243} = 57{,}26 \text{ t},$$

$$V' = \frac{3175{,}419 - 1100{,}158}{67{,}62} = 30{,}69 \text{ t}, \qquad V = 144 - 30{,}69 = 113{,}31 \text{ t},$$

$$V_x = 113{,}31 - 108 = 5{,}31 \text{ t},$$

$$N_x = 5{,}31 \,.\, 0{,}3202 + 57{,}26 \,.\, 0.9474 = 55{,}95 \text{ t},$$

$$M_x = 5{,}31 \,.\, 20{,}81 - 57{,}26 \,.\, 15{,}9840 + (101{,}182 + \ldots + 179{,}977) = 404{,}36 \text{ mt}.$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(55{,}95 + \frac{6}{2{,}24}\, 404{,}36\right) = \quad 10{,}273 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(55{,}95 - \frac{6}{2{,}24}\, 404{,}36\right) = -\ 9{,}264 \text{ „ },$$

und für die zweite derselben:

$$H = \frac{3175{,}419 + 1100{,}158}{36{,}243} = 117{,}97 \text{ t},$$

$$V = 30{,}69 + 4 \,.\, 9 = 66{,}69 \text{ t}, \qquad V' = 216 - 66{,}69 = 149{,}31 \text{ t},$$

$$V_x = 66{,}69 - 0 = 66{,}69 \text{ t},$$

$$N_x = 66{,}69 \,.\, 0{,}3202 + 117{,}97 \,.\, 0{,}9474 = 133{,}12 \text{ t},$$

$$M_x = 66{,}69 \,.\, 20{,}81 - 117{,}97 \,.\, 15{,}9840 = -\ 497{,}81 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(133{,}12 - \frac{6}{2{,}24}\, 497{,}81\right) = -\ 10{,}825 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(133{,}12 + \frac{6}{2{,}24}\, 497{,}81\right) = \quad 13{,}226 \text{ „ }.$$

Auch für die jetzt betrachteten beiden Belastungsfälle müssen die der Verkehrslast entsprechenden $V, V', H, V_x, N_x, M_x, \sigma_o, \sigma_u$ zusammen gerade so gross, wie im Falle *b*) sein.

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast sind die Grenzwerthe:

$$\sigma_o = 27{,}400 + 10{,}273 = \quad 37{,}673 \text{ kg},$$

$$\sigma_o = 27{,}400 - 10{,}825 = \quad 16{,}575 \text{ „ },$$

$$\sigma_u = \ 4{,}925 - \ 9{,}264 = -\ 4{,}339 \text{ „ },$$

$$\sigma_u = \ 4{,}925 + 13{,}226 = \quad 18{,}151 \text{ t}.$$

Hätten wir die ungünstigsten Belastungen nach den genaueren Regeln auf S. 62 bestimmt, was bei Gewölben selten geschehen wird, so würden sich für die Grenzwerthe von σ_u dieselben Belastungen wie nach dem einfacheren Verfahren

ergeben haben, womit auch die berechneten Grenzwerthe selbst gültig bleiben. Für die Grenzwerthe von σ_0 würden einmal die 10 ersten Verkehrslasten (anstatt wie oben die 9 ersten), das andremal alle übrigen Verkehrslasten auf dem Bogen wirksam anzunehmen sein. Man erhält in ganz gleicher Weise wie oben vorgehend für den ersten Fall: $H = 64{,}24$ t, $V' = 34{,}43$ t, $V = 118{,}57$t, $V_x = 10{,}57$ t, $N_x = 64{,}25$ t, $M_x = 402{,}25$ mt,

$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(64{,}25 + \frac{6}{2{,}24}\, 402{,}25\right) = -\, 10{,}297 \text{ kg},$$

und für den zweiten Fall: $H = 110{,}99$ t, $V = 61{,}43$ t, $V' = 145{,}57$ t, $V_x = 61{,}43$ t, $N_x = 124{,}82$ t, $M_x = -\, 495{,}71$ mt,

$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(124{,}82 - \frac{6}{2{,}24}\, 495{,}71\right) = -\, 10{,}849 \text{ kg}.$$

womit die Grenzwerthe für feste Last und Verkehrslast zusammen werden: 37,697 und 16,551 t anstatt wie oben 37,673 und 16,575 t.

Bemerkungen. Werden die ungünstigsten Belastungen wie oben unter *e*) bestimmt, dann brauchen die Belastungsfälle *c*) und *d*) nicht durchgerechnet zu werden: Wir haben ihre Berücksichtigung gezeigt, weil die ungünstigsten Belastungen bisher bei Gewölben nicht ermittelt zu werden pflegten, und um eine Beurtheilung der hierbei möglichen Abweichungen zu erleichtern. Es haben sich die in der folgenden Tabelle eingetragenen Gesammtwerthe ergeben, wobei wie oben die Kämpferreaktionen in Tonnen, die Normalspannungen in Kilogramm per Quadratcentimeter ausgedrückt sind.

Grössen		*a*) Feste Last allein	*b*) Vollbelastung	*c*) Verkehrslast 0 bis *m*	*d*) Verkehrslast *m* bis *l*	*e*) Ungünstigste Belastungen	
	V	2216,90	2396,90	2349,94	2263,85	2396,90	2216,90
	V'	2216,90	2396,90	2263,86	2349,48	2396,90	2216,90
	H	1701,63	1876,86	1789,24	1789,24	1876,86	1701,63
$x = 0$	σ_o	13,628	14,835	14,407	14,056	14,835	13,628
	σ_u	13,628	14,835	14,407	14,056	14,835	13,628
$x = 20{,}81$	σ_o	27,400	26,848	36,189	18,063	37,697	16,551
	σ_u	4,925	8,888	− 2,222	16,031	18,151	− 4,339
$x = m$	σ_o	17,059	18,816	17,937	17,937	18,816	17,059
	σ_u	17,059	18,816	17,937	17,937	18,816	17,059

Zu beachten ist, dass die Fugen $x = 0$ und $x = m$ nur zweimal bezw. einmal auftreten, während die Fuge $x = 20{,}81$ m als Representantin aller übrigen angeführt ist, und dass bei Bogen ohne Gelenk die Verhältnisse auch bei 0 und m ungünstiger liegen. So tritt in dem Beispiel 30 der grösste Druck, 41,136 kg. im Scheitel ein, während an den Kämpfern Zugspannungen von 10,074 kg entstehen können. Andrerseits ist die Verkehrslast im vorliegenden Falle, wo es sich um eine Eisenbahnbrücke handelt, verhältnismässig gross, nämlich 1231 kg per qcm oberer Brückenfläche von 4,75 m Breite, im Ganzen $^1/_{12{,}8}$ der festen Last, während sie für die in Beispiele 14 behandelte Strassenbrücke bei Munderkingen 400 kg per qm, gleich $^1/_{16}$ der festen Last, angenommen war.

Die Stützlinie (Verbindungslinie der Angriffspunkte von R_x oder N_x in allen Fugen, § 8) braucht bei der obigen Berechnungsweise nicht verzeichnet zu werden, da sich die Beanspruchungen ohne dieselbe ergeben. Entsteht in irgend einer Lagerfuge Zug (σ negativ, siehe in obiger Tabelle σ_u in den Fällen *c*) *e*)) so tritt die Stützlinie für den betreffenden Belastungsfall daselbst aus dem mittleren Drittel (§ 18). Uebrigens genügen die obigen Ermittelungen auch zur Verzeichnung der Stützlinien. Da ihr Durchgangspunkt in Fuge nach § 8, 1) x um

$$c = \frac{M_x}{N_x} \qquad 8)$$

von der Bogenaxe entfernt ist, wobei die c nach oben positiv, nach unten negativ zu rechnen sind, so geht die Stützlinie für alle Belastungsfälle durch die Gelenke, während z. B. bei $x = 20{,}81$ m

in den Fällen	$a)$	$b)$	$c)$	$d)$
$c =$	0,260	0,187	0,422	0,022 m.

Die Stützlinie ist also im Falle $c)$ um

$$0{,}422 - \frac{2{,}24}{6} = 0{,}049 \text{ m}$$

aus dem mittleren Bogendrittel getreten. In den Fällen $a)$ und $b)$ liegt die Stützlinie symmetrisch zur Bogenmitte, für den Fall $c)$ gibt der Fall $d)$ die Stützlinie auf der zweiten Bogenhälfte und umgekehrt (durch Umklappen um die Vertikale bei $x = m$).

Auch der Winkel δ der resultirenden Fugenkraft R_x gegen die Normale zur Fuge kann aus

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{T_x}{N_x} \qquad 9)$$

mit

$$T_x = V_x \cos\varphi - H \sin\varphi \qquad 10)$$

leicht ermittelt werden. So hat man für die Gesammtbelastung im Falle $c)$ $H = 1701{,}63 + 87{,}61 = 1789{,}24$ t, $V_x = 562 + 25{,}04 = 587{,}04$ t, $N_x = 1792{,}08 + 91{,}02 = 1883{,}10$ t,

$$T_x = 587{,}04 \,.\, 0{,}9474 - 1789{,}24 \,.\, 0{,}3202 = -16{,}753 \text{ t},$$

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{16{,}753}{1883{,}10} = -0{,}008896, \quad \delta = -0^{\circ}31',$$

was weit unter den gebräuchlichen Reibungskoefficienten und entsprechenden Reibungswinkeln liegt (ersterer wäre nach Bochet für glatt bearbeitete Steine einschliesslich Ziegel zwischen 0,67 und 0,75 anzunehmen). Die grössten Schubspannungen in den Fugen können wie in Beispiel 8 und noch einfacher nach der Formel § 9, 12)

$$\tau = \frac{3}{2bh} T_x \qquad 11)$$

berechnet werden (vergl. Beisp. 35 u. 36), die Bestimmung ihrer Grenzwerthe nach §§ 11, 12 ist für praktische Zwecke jedenfalls überflüssig.

Beispiel 14. Einsenkungen eines Gewölbes mit drei Gelenken (Donaubrücke bei Munderkingen).

Für die Betonbogen der Donaubrücke bei Munderkingen*) ist die Spannweite $l = 50{,}6$ m, der Pfeil der Axe $f = 5{,}04$ m (Lichtweite 50 m, Pfeil der Gewölbelaibung 5 m). Unter Voraussetzung voller Wirksamkeit der an den Kämpfern und im Scheitel angebrachten Gelenke (vergl. § 18) zu berechnen:

$a)$ Die Scheitelsenkung durch Temperaturänderungen um $\tau = \pm 25^{\circ}$ C, wenn der Ausdehnungskoefficient des Betons wie bei der ursprünglichen Berechnung $\alpha = 0{,}0000088$ gesetzt wird;

$b)$ Die Scheitelsenkung durch eine Aenderung der Spannweite um $\Delta l = 0{,}0027$ m und eine Senkung des Kämpfergelenkes l gegen das Kämpfergelenk 0 um 0,0009, d. h. $\Delta k = -0{,}0009$ m, wie auf Grund der Drücke in den Widerlagern angenommen wurde;

$c)$ ferner die elastische Scheitelsenkung durch eine gleichmässig vertheilte Last von 6400 kg auf den Quadratmeter Horizontalprojektion des Gewölbes (wie sie die feste Last bei dem vorausgesetzten Gewichte des Beton von 2300 kg per Kubikmeter im Mittel ergeben würde), wenn der Bogen parabolisch und

* Siehe das betreffende Citat in § 18.

der mittlere Elasticitätsmodul für die in Frage kommende Belastung per qcm $E = 220000$ kg wären.*

a) Nach § 15, 38) ist die Scheitelsenkung durch eine Temperaturänderung um τ^0:

$$e = -\alpha\tau\left(f + \frac{l^2}{4f}\right) = -0{,}0000088\,\tau\left(5{,}04 + \frac{50{,}6^2}{4\,.\,5{,}04}\right)$$

$$= -0{,}001162\,\tau \text{ m} = -1{,}162\,\tau \text{ mm},$$

also speziell für $\tau = 25^0$ $e = -29$ mm (Hebung),

„ $\tau = -25^0$ $e = 29$ mm (Senkung).

b) Für die angeführten Lagenänderungen der Kämpfergelenke hat man nach § 15, 39):

$$e = \frac{l\,\Delta l}{4f} - \frac{\Delta k}{2} = \frac{50{,}6\,.\,2{,}7}{4\,.\,5{,}04} + \frac{0{,}9}{2} = 7{,}2 \text{ mm}.$$

c) Die elastische Scheitelsenkung durch irgend eine Belastung eines parabolischen Gewölbes von konstantem (mittleren) $J\cos\varphi$ wäre nach derjenigen der Formeln § 15, 33)—37) zu berechnen, welche der fraglichen Belastung entspricht (vergl. Beisp. 29, 32, 42.) Bei beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten hätten die Formeln des § 33 zur Verwendung zu kommen (vergl. Beisp. 25, 41, 44). Im vorliegenden Falle lässt sich nach *A* 7, 14 (S. 73) näherungsweise setzen:

$$e = \frac{u\,l^4}{32\,E\,b\,h\,f^2}.$$

Nun beträgt die angenommene gleichmässig vertheilte Last per qm $\frac{u}{b} = 6400$ kg. Da ferner die mittlere Höhe des Bogens genügend genau $h = 1{,}2$ m ist (bei einer Veränderlichkeit zwischen 1 und 1,4 m), so erhalten wir als Näherungswerth für jene Belastung bei parabolischer Axe:

$$e = \frac{6400\,.\,50{,}6^4}{32\,.\,220\,000\,.\,100^2\,.\,1{,}2\,.\,5{,}04^2} = 0{,}0221 \text{ m} = 22{,}1 \text{ mm}.$$

Aufgabe 7. Ueber schätzungsweise Berechnungen von Einsenkungen.

Es sollen diejenigen Einsenkungen in der Mitte symmetrischer Bogen bestimmt werden, welche lediglich durch eine gleichmässige Längenänderung der Bogenaxe, abgesehen von sonstigen Formänderungen, bei gleichbleibender Spannweite, bedingt sind, wenn die Axlänge vor wie nach der Einsenkung

$$s = l\left(1 + \frac{8f^2}{3l^2}\right) \qquad a)$$

gesetzt werden kann (vergl. Beisp. 15). Auch ist für diesen Fall die Einsenkung durch eine Aenderung Δl der Spannweite ohne Aenderung der Axlänge s oder sonstige Einwirkungen anzugeben.

Aus *a*) folgt durch Differentiation bei konstantem l

$$ds = \frac{16f}{3l}\,df.$$

Diese Beziehung gilt unter obigen Voraussetzungen auch für genügend kleine endliche Aenderungen von s. Setzen wir demgemäss Δs und $\Delta f = -e$ an Stelle von ds und df, so ergibt sich die zuerst verlangte Einsenkung:

$$e = -\frac{3l}{16f}\,\Delta s. \qquad b)$$

Man hat diese Gleichung mitunter angewandt, um die Einsenkung durch Temperaturänderungen und gewisse Belastungen zu berechnen. So hätte man im Falle der Gültigkeit von *b*) für eine Temperaturänderung τ mit $\Delta s = \alpha\tau s$:

---

* Bezüglich neuerer Versuche mit Beton siehe: Bach, Versuche über die Elasticität von Beton, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1895, S. 489; Bericht des Gewölbeausschusses, Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, 1895, S. 40; Luegers Lexikon der gesammten Technik, Bd. III, Stuttgart 1896, S. 452.

$$e = -\frac{3l}{16f} s \alpha \tau = \alpha \tau \left(\frac{f}{2} + \frac{3l^2}{16f}\right), \qquad c)$$

und für eine gleiche und gleichmässige Druckbeanspruchung aller Bogenquerschnitte von σ per Quadrateinheit mit $\Delta s = -\frac{\sigma}{E} s$:

$$e = \frac{3ls}{16f}\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E}\left(\frac{f}{2} + \frac{3l^2}{16f}\right). \qquad d)$$

Gleichung $c)$ ist schon desshalb nicht zuverlässig, weil mit Temperaturänderungen bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenke auch Biegungsmomente M_x verbunden sind, während für Bogen mit drei Gelenken die obige Bestimmung von ds durch Differentiation wegen der Winkelbildung beim Zwischengelenk nicht berechtigt ist. Gleichung $d)$ hat auch wenig Werth, weil eine Belastung, welche gleiche Normalspannungen in allen Querschnittelementen des ganzen Bogens erzeugt, nicht leicht vorkommt. Man pflegt bei dieser Annahme an symmetrische Parabelbogen mit gleichmässig auf die ganze Spannweite vertheilter Last zu denken, und nur eine Schätzung der Einsenkung zu beanspruchen. Allein ohne künstliche Ueberhöhung der Bogen (*A* 9) treten auch bei jener Belastung Biegungsmomente auf (abgesehen vom Dreigelenkbogen).

Zur Ableitung der weiter verlangten Formel differentiren wir $a)$ bei konstantem s und erhalten:

$$0 = dl + \frac{8}{3} d\frac{f^2}{l}. \qquad \text{oder}$$

$$-\frac{16f}{3l} df = \left(1 - \frac{8f^2}{3l^2}\right) dl,$$

und wenn $\Delta f = -e$ und Δl an Stelle von df, dl treten:

$$e = \left(\frac{3l}{16f} - \frac{f}{2l}\right) \Delta l. \qquad e)$$

Auch diese dem obigen üblichen Vorgehen entsprechende Formel ist desshalb praktisch kaum zu verwerthen, weil mit Aenderungen Δl der Spannweite bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk auch Aenderungen der H, N_x, M_x, σ u. s. w. eintreten, während für Bogen mit drei Gelenken wieder die Ableitung der Formel durch Differentiation unzulässig ist. Wir können also die Formeln $b)$ bis $e)$ für die Anwendung bei elastischen Bogenträgern nicht empfehlen.

Die Scheitelsenkungen für beliebige symmetrische und unsymmetrische Belastungen von Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenk sind aus §§ 15—17, 30, 33 zu entnehmen (Beispiele 14, 20, 25, 29, 32, 41, 42, 44 und IV *M*); hier handelt es sich nur um Formeln für möglichst einfache Berechnungen, soweit die Beziehungen für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$ verwendbar sind.*

Durch eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit hat man (über c, ε siehe am Schlusse des § 15)

bei 3 Gelenken $$e = \varepsilon \frac{ul^4}{60Ec}, \qquad 1)$$

„ 2 „ $$e = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{5ul^4}{384Ec}, \qquad 2)$$

„ 0 „ $$e = \frac{\varepsilon}{1+6\varepsilon}\frac{ul^4}{64Ec}. \qquad 3)$$

Durch eine in der Trägermitte wirkende Einzellast P entstehen

bei 3 Gelenken $$e = \frac{1+16\varepsilon}{480}\frac{Pl^3}{Ec}, \qquad 4)$$

„ 2 „ $$\varepsilon = \frac{3+128\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{Pl^3}{6144Ec}, \qquad 5)$$

„ 0 „ $$\varepsilon = \frac{1+96\varepsilon}{1+6\varepsilon}\frac{Pl^3}{3072Ec}. \qquad 6)$$

---

* Die Einsenkungen sind wesentlich durch die Momente M_x bedingt, welche ihrerseits stark von der Axform abhängen. Siehe die Bemerkungen am Schlusse des Beispiels 27 und die Vergleiche in oben citirten Beispielen, sowie § 36.

Für schätzungsweise Berechnungen kann in 1)—6) bei flachen Bogen c gleich einem mittleren Trägheitsmomente J gesetzt und oft noch ε im Nenner vernachlässigt werden. Mehrere eng zusammenstehende konzentrirte Lasten lassen sich bei Schätzungsrechnungen mitunter als e i n e Last behandeln.

Eine Temperaturänderung τ erzeugt die Einsenkungen:

$$\text{bei 3 Gelenken} \quad e = -\alpha\tau\left(f + \frac{l^2}{4f}\right), \tag{7}$$

$$\text{„ 2 „} \quad e = -\alpha\tau\left(f + \frac{25}{128f}\frac{l^2}{1+\varepsilon}\right), \tag{8}$$

$$\text{„ 0 „} \quad e = -\alpha\tau\left(f + \frac{15}{64f}\frac{l^2}{1+6\varepsilon}\right), \tag{9}$$

Vielfach kann hierin ε vernachlässigt werden.

Durch eine Aenderung Δl der Spannweite (für Zunahme Δl positiv) und eine Aendernng der ursprünglich gleichen Höhenlage der Stützen um Δk (bei höherem Stützpunkt l ist Δk positiv) ergeben sich

$$\text{bei 3 Gelenken} \quad e = \frac{l}{4f}\Delta l - \frac{\Delta k}{2}, \tag{10}$$

$$\text{„ 2 „} \quad e = \frac{25\,l}{128\,f}\frac{\Delta l}{1+\varepsilon} - \frac{\Delta k}{2}, \tag{11}$$

$$\text{„ 0 „} \quad e = \frac{15\,l}{128\,f}\frac{\Delta l}{1+6\varepsilon} - \frac{\Delta k}{2}, \tag{12}$$

worin ebenfalls häufig ε vernachlässigt werden darf. Die Einsenkung durch eine Aenderung Δl der Spannweite wächst in allen drei Fällen mit $\frac{l}{f}$, sodass bei flachen Bogen verhältnissmässig grosse e durch Δl bewirkt werden können.

Dabei Bogen vom Pfeile $f = 0$ durch eine Aenderung der Axlänge oder eine Axialkraft N_x keine Einsenkung entsteht, so müssen die für Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk gültigen Ausdrücke von e für $f = 0$ (womit $\varepsilon = \infty^2$, vergl. § 15, 40)) in die entsprechenden Gleichungen für einfache Balken mit beiderseits frei drehbaren bezw. festgespannten Enden übergehen. Dies trifft für unsere vorstehenden und in §§ 16, 17 gegebenenFormeln zu, nicht aber für b)—e).

In manchen Fällen lassen sich die erhaltenen Gleichungen noch weiter spezialisiren. So kann man für genügend flache Bogen rechteckigen Querschnitts (Gewölbe) mit Rücksicht auf § 15, 42) setzen:

$$c = J\cos\varphi = \frac{b\,h^3}{12}, \qquad \varepsilon = \frac{5\,h^2}{32\,f^2}, \tag{13}$$

unter b, h Mittelwerthe der Breite und Höhe des Querschnittes verstanden. Damit gehen die Gleichungen 1)—3) in die folgenden über:

$$\text{bei 3 Gelenken} \quad e = \frac{u\,l^4}{32\,E\,b\,h\,f^2}, \tag{14}$$

$$\text{„ 2 „} \quad e = \frac{25}{1+\varepsilon}\frac{u\,l^4}{1024\,E\,b\,h\,f^2}, \tag{15}$$

$$\text{„ 0 „} \quad e = \frac{15}{1+6\varepsilon}\frac{u\,l^4}{512\,E\,b\,h\,f^2}, \tag{16}$$

und im Falle der Vernachlässigung von ε im Nenner, welches z. B. für die in Beisp. 14 betrachtete Munderkinger Brücke den Werth 0,0088 hat, abgerundet:

$$\text{bei 2 Gelenken} \quad e = \frac{u\,l^4}{41\,E\,b\,h\,f^2}, \tag{17}$$

$$\text{„ 0 „} \quad e = \frac{u\,l^4}{34\,E\,b\,h\,f^2}, \tag{18}$$

d. i. $^{32}/_{41}$ und $^{32}/_{34}$ mal so gross als bei drei Gelenken.

Beispiel 15. Berechnung von Bogenlängen.

Es sollen die Längen symmetrischer Parabelbogen und Kreisbogen von der Spannweite l und dem Pfeile f verglichen werden für $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$. Sodann

sind die Bogenlängen der älteren Coblenzer Brücke, für welche $l = 11\,f = 98{,}0775$ m ist, für beide Fälle zu berechnen.

Genau genommen hat man (Fig. 65) für den Parabelbogen:

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + 16f^2} + \frac{l^2}{16f} \operatorname{logn} \frac{\sqrt{l^2 + 16f^2} + 4f}{\sqrt{l^2 + 16f^2} - 4f}, \tag{1}$$

und für den Kreisbogen:

$$\left.\begin{aligned} s &= 2\,r\,\varphi_0 \\ \text{mit} \quad \sin\varphi_0 &= \frac{l}{2r}, \qquad r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

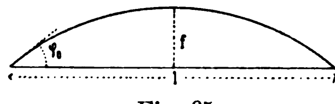


Fig. 65.

Für genügend flache Bogen kann man in beiden Fällen setzen:

$$s = l + \frac{8f^2}{3l}. \tag{3}$$

Pfeilverhältniss $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$. Man erhält für den Parabelbogen:

$$s = \frac{l}{2}\sqrt{1{,}16} + \frac{5\,l}{8} \operatorname{logn} \frac{\sqrt{1{,}16} + 0{,}4}{\sqrt{1{,}16} - 0{,}4} = 1{,}02606\,l,$$

für den Kreisbogen mit $r = 1{,}3\,l$ und $\sin\varphi_0 = \frac{1}{2{,}6}$:

$$\varphi_0 = 22^\circ 37' 12'' = \frac{22{,}62 \,.\, 3{,}14159}{180} = 0{,}394793,$$

$$s = 2 \,.\, 1{,}3 \,.\, 0{,}394793\,l = 1{,}02646\,l,$$

während nach 3) näherungsweise:

$$s = l\left(1 + \frac{8}{300}\right) = 1{,}02667\,l.$$

Es liefern hiernach beispielsweise

für						
	$l =$	25	50	100	200	m:
Gleichung 1)	$s =$	25,65	51,31	102,61	205,21	„ (Parabel)
„ 2)	$s =$	25,66	51,32	102,65	205,29	„ (Kreis)
„ 3)	$s =$	25,67	51,33	102,67	205,33	„

Pfeilverhältniss $\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$. Es ergeben sich für den Parabelbogen:

$$s = \frac{l}{2}\sqrt{1{,}64} + \frac{5\,l}{15} \operatorname{logn} \frac{\sqrt{1{,}64} + 0{,}8}{\sqrt{1{,}64} - 0{,}8} = 1{,}09823\,l,$$

für den Kreisbogen mit $r = 0{,}725\,l$, $\sin\varphi_0 = \frac{1}{1{,}45}$:

$$\varphi_0 = 43^\circ 36' 10'' = \frac{43{,}6028 \,.\, 3{,}14159}{180} = 0{,}761012,$$

$$s = 2 \,.\, 0{,}725 \,.\, 0{,}761012\,l = 1{,}10347\,l,$$

und näherungsweise:

$$s = l\left(1 + \frac{8}{75}\right) = 1{,}10667\,l.$$

Es liefern demnach beispielsweise

für						
	$l =$ 25	50	100	200	m:	
Gleichung 1)	$s =$ 27,46	54,91	109,82	219,65	„	(Parabel)
„ 2)	$s =$ 27,59	55,17	110,35	220,69	„	(Kreis)
„ 3)	$s =$ 27,67	55,33	110,67	221,33	„	

Pfeilverhältniss $\frac{f}{l} = \frac{1}{2}$. Wir erhalten für den Parabelbogen:

$$s = \frac{l}{2}\sqrt{5} + \frac{l}{8}\,\text{logn}\,\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = 1{,}47894\,l,$$

für den Kreisbogen mit $r = 0{,}5\,l$, $\sin\varphi_0 = 1$ (Halbkreis):

$$\varphi_0 = 90^0 = \frac{90\,.\,3{,}141592}{180} = 1{,}57096\,,$$

$$s = 2\,.\,0{,}5\,.\,1{,}57096\,l = 1{,}57096\,l,$$

während 3) liefert:

$$s = l\left(1 + \frac{8}{12}\right) = 1{,}66667\,l.$$

Es ergeben somit beispielsweise:

für						
	$l =$ 25	50	100	200	m:	
Gleichung 1)	$s =$ 36,97	73,95	147,89	295,79	„	(Parabel)
„ 2)	$s =$ 39,27	78,55	157,10	314,19	„	(Kreis)
„ 3)	$s =$ 41,67	83,33	166,67	333,33	„	

Coblenzer Brücke: Es folgen mit $f = l/11 = 8{,}91614$ m aus Gleichung 1):

$$s = 4{,}45807\sqrt{137} + \frac{11}{16}\,98{,}0775\,\text{logn}\,\frac{\sqrt{137}+4}{\sqrt{137}-4} = 100{,}198\text{ m},$$

und aus den Gleichungen 2):

$$r = \left(\frac{121}{8} + \frac{1}{2}\right)8{,}91614 = 139{,}314\text{ m},$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{98{,}0775}{2\,.\,139{,}314},$$

$$\varphi_0 = 20^0\,36'\,35'' = \frac{20{,}6097\,.\,3{,}1416}{180} = 0{,}35971,$$

$$s = 2\,.\,139{,}314\,.\,0{,}35971 = 100{,}225\text{ m},$$

während die Näherungsformel 3) liefert:

$$s = 98{,}0775\left(1 + \frac{8}{363}\right) = 100{,}239\text{ m},$$

das ist 0,041 % mehr als im ersten und 0,014 % mehr als im zweiten Falle.

Häufig liegt $\frac{f}{l}$ in der Nähe von $\frac{1}{10}$ und fast immer unter $\frac{1}{5}$. Es stimmen dann die Resultate der Formeln 1), 2), 3) genügend überein, um in vielen praktischen Fällen eine an Stelle der andern verwenden zu können.

Aufgabe 8. Stützenreaktionen von Dreigelenkbogen bei beliebigen Richtungen der angreifenden Kräfte.

Die Vertikalreaktionen V, V' und Horizontalreaktionen H, H' der Kämpfer symmetrischer Bogen mit drei Gelenken für den Fall anzugeben, dass nicht nur Lasten, sondern beliebig gerichtete äussere Aktivkräfte in der Trägerebene wirken.

Es gelten die Gleichungen der Aufgabe 1 (S. 7), worin nun wie in § 15:

$$k = 0, \qquad M = M' = 0, \qquad M_m = 0, \qquad 1)$$

sodass die Vertikalreaktionen der Stützen (vergl. Fig. 11 auf S. 7):

$$V = \frac{1}{l}\left[\sum_0^l P(l-a) + \sum_0^l Q b\right], \tag{2}$$

$$V' = \frac{1}{l}\left[\sum_0^l P a \quad - \sum_0^l Q b\right], \tag{3}$$

während ohne Aenderung bleiben:

$$V + V' = \sum_0^l P, \qquad H - H' = \sum_0^l Q. \tag{4}$$

Gleichung A 1, 3) liefert für $x = \frac{l}{2} = m$, wo $y = f$:

$$0 = V\frac{l}{2} - Hf - \sum_0^m P\left(\frac{l}{2} - a\right) + \sum_0^m Q(f-b),$$

woraus die Horizontalreaktion bei 0:

$$H = \frac{1}{2f}\left[Vl - \sum_0^m P(l-2a) + 2\sum_0^m Q(f-b)\right], \tag{5}$$

und nach Einsetzen von 2) sowie mit Rücksicht auf 4) beide Horizontalreaktionen:

$$H = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P(l-a) + \sum_0^m Q(2f-b) + \sum_m^l Q b\right], \tag{6}$$

$$H' = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P(l-a) - \sum_0^m Q b - \sum_m^l Q(2f-b)\right]. \tag{7}$$

Sind die Q nach Grösse und Richtung symmetrisch zur Trägermitte angeordnet (Erddruck etc.), dann ergeben obige Formen wegen $\sum_m^l Q b = -\sum_0^m Q b$ und $\sum_0^l Q = 0$:

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a), \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l P a, \tag{8}$$

$$H = H' = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P(l-a) - 2\sum_0^m Q(f-b)\right], \tag{9}$$

und wenn auch die P symmetrisch zur Trägermitte liegen, wegen $\sum_0^m P a = \sum_m^l P(l-a)$ (vergl. S. 60 unten):

$$V = V' = \sum_0^m P, \tag{10}$$

$$H = H' = \frac{1}{f}\left[\sum_0^m P a + \sum_0^m Q(f-b)\right]. \tag{11}$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrirte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in die Summen $\sum_0^m P$ von 10) 11) aufzunehmen.

Es wirke nur auf eine Trägerhälfte ein nach der Mitte gerichteter Horizontaldruck von v per Höheneinheit von f, während H_p den von der Vertikalbelastung allein herrührenden Theil der Horizontalreaktionen darstellt. Dann hat man nach 2) 3) 6) 7) bei Wirkung der v auf die zweite Trägerhälfte (vergl. § 14):

$$\sum_0^l Q b = \sum_m^l Q b = v\int_0^f b\,db = \frac{vf^2}{2},$$

$$\sum_m^l Q(2f-b) = v\int_0^f (2f-b)\,db = \frac{3vf^2}{2},$$

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a) + \frac{vf^2}{2l}, \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l P a - \frac{vf^2}{2l} \tag{12}$$

$$H = H_p + \frac{vf}{4}, \qquad H' = H_p - \frac{3fv}{4}, \tag{13}$$

$$H - H' = vf. \tag{14}$$

Wenn dagegen der Horizontaldruck auf die erste Trägerhälfte, also in negativer Richtung wirkt, so erhält man:

$$\sum_0^l Q\,b = \sum_0^m Q\,b = -\,v\int_0^f b\,d\,b = -\,\frac{v\,f^2}{2},$$

$$\sum_0^m Q\,(2\,f-b) = -\,v\int_0^f (2\,f-b)\,d\,b = -\,\frac{3\,v\,f^2}{2},\,.$$

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P\,(l-a) - \frac{v\,f^2}{2\,l},\qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l P\,a + \frac{v\,f^2}{2\,l}, \tag{15}$$

$$H = H_p - \frac{3\,v\,f}{4},\qquad H' = H_p + \frac{v\,f}{4}. \tag{16}$$

$$H - H' = -\,v\,f. \tag{17}$$

In diesen Gleichungen hat man nach 6) 7) bei beliebiger Belastung:

$$H_p = \frac{1}{2\,f}\left[\sum_0^m P\,a + \sum_m^l P\,(l-a)\right] \tag{18}$$

und speziell bei symmetrischer Belastung:

$$H_p = \frac{1}{f}\sum_0^m P\,a; \tag{19}$$

ferner mit Rücksicht auf § 14 für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit:

$$H_p = \frac{u\,l^2}{8\,f}, \tag{20}$$

und für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$H_p = \frac{u + u'}{16\,f}\,l^2. \tag{21}$$

Der durch die Gleichungen 12)—17) berücksichtigte Fall kann z. B. bei Dachbindern nach Art von Fig. 59 (S. 59) bei Berücksichtigung schiefen Winddrucks vorkommen.

§ 16. Einfache Bogen mit zwei Gelenken.

Der Bogen habe nun zwar Kämpfergelenke in gleicher Höhe, aber kein Zwischengelenk (Fig. 66). In diesem Falle gelten:

$$M = M' = 0,\qquad k = 0. \tag{1}$$

Die Vertikalreaktionen der Kämpfer werden nach § 1, 4) 5) wie bei Bogen mit drei Gelenken:

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a),\qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l P\,a, \tag{2}$$

während der Horizontalschub H durch die statischen Gleichungen des § 1 nicht bestimmt ist, sondern aus Beziehungen für die elastischen Deformationen ermittelt werden muss. Er zeigt sich dann von der Form der Bogenaxe und Veränderlichkeit des Querschnitts abhängig (s. S. 78).

Fig. 66.

Das Moment und die Vertikalkraft in einem beliebigen Querschnitt x lassen sich nach § 1, 3) 8) und 2) 7) wie bei Bogen mit drei Gelenken ausdrücken:

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a)$$
$$= \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a) - Hy, \qquad 3)$$
$$V_x = V - \sum_0^x P$$
$$= -\frac{1}{l} \sum_0^x Pa + \frac{1}{l} \sum_x^l P(l-a), \qquad 4)$$

und für die Normalkraft bei x gilt wie immer:

$$N_x = V_x \sin\varphi + H\cos\varphi. \qquad 5)$$

Auch für die in §§ 1, 8 gegebenen Ausdrücke der Tranversalkraft T_x, resultirenden Schnittkraft R_x, Normalspannungen σ, σ_o, σ_u u. s. w. treten keine Aenderungen ein. Man hat also z. B. bei vollwandigen Trägern mit symmetrisch zur Axschicht angeordneten Querschniten die Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement (zwischen welchen die Werthe aller übrigen σ des Querschnitts liegen):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_o = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \qquad 6)$$

unter F den nutzbaren Querschnitt, unter W das Widerstandsmoment desselben verstanden.

Verschiedene Formen.

Bezüglich der Gleichungen der Bogenaxe und deren Richtungswinkel wird auf das im vorigen Paragraphen Gesagte verwiesen (S. 59). Wir fassen hier nur symmetrische Parabelbogen mit konstantem (mittlerem) $J\cos\varphi$ und Bogen mit beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten spezieller ins Auge. Inwiefern diese Fälle genügen, ist in § 28 besprochen, während die Ableitungen der gegebenen H in § 27, 31, 32 zu finden sind. Ueber Kreisbogen siehe auch die Aufgaben 13, 14.

Für symmetrische parabolische Bogen vom Mittelwerthe c des Ausdrucks $J\cos\varphi$ hat man nach § 28, 18) den durch eine beliebige Belastung erzeugten Horizontalschub:

$$H = \frac{5}{(1+\varepsilon)\, 8 f l^3} \sum_0^l Pa\,(l-a)\,(l^2 + la - a^2 - \beta l^2), \qquad 7)$$

während eine beliebige Temperaturänderung τ bewirkt (für Zunahme τ positiv):

$$H = \frac{15\, Ec}{(1+\varepsilon)\, 8 f^2}\, \alpha\tau, \qquad 8)$$

und eine Aenderung der Spannweite um Δl bedingen würde (für Zunahme Δl positiv):

$$H = -\frac{15\, Ec}{(1+\varepsilon)\, 8 f^2} \frac{\Delta l}{l}. \qquad 9)$$

In diesen Ausdrücken wie in der Folge gilt für ε die Gleichung § 15, 40), während mit r nach § 15, 11)

$$\beta = \frac{3\gamma}{f} \frac{r-f}{r^2} = \frac{8}{5} \frac{f}{r-f}\, \varepsilon, \qquad 10)$$

doch kann β fast immer vernachlässigt werden (§ 28).

Bei vorläufigen und überschlägischen Berechnungen lässt sich in 6) neben β meist auch ε vernachlässigen, womit entsteht:

$$H = \frac{5}{8fl^3} \sum_0^1 Pa\,(l-a)\,(l^2 + l\,a - a^2). \tag{11}$$

Hierin ist

für	$a = 0$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{3l}{4}$	l
	$l^2 + l\,a - a^2 = l^2$	$\frac{19}{16}l^2$	$\frac{5}{4}l^2$	$\frac{19}{16}l^2$	l^2.

Wird statt der letzteren, nicht sehr veränderlichen Grösse deren durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmter Mittelwerth:

$$\frac{1}{l}\int_0^l (l^2 + l\,a - a^2)\,d\,a = \frac{7}{6}\,l^2$$

in 11) eingeführt, so folgt die Näherungsformel:

$$H = \frac{35}{48fl} \sum_0^1 Pa\,(l-a). \tag{12}$$

Bogen mit beliebiger Axform und beliebiger Veränderlichkeit des Querschnitts denken wir uns durch Querschnitte oder sonst geeignete Schnitte in eine genügende Anzahl gleich oder verschieden langer Felder getheilt, welche z. B. bei der in Fig. 67 angedeuteten Maria-Pia-Brücke über den Douro in Portugal natürlich mit den Fachwerkfeldern über-

nach Lissabon ⟵ ⟶ nach Porto

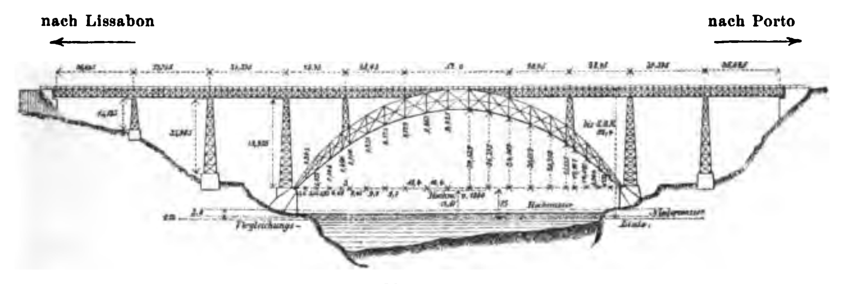


Fig. 67.

einstimmen würden. Die Axlänge σ und die Mittelwerthe von x, y, J für die einzelnen Felder (z. B. die Werthe in den Feldermitten) mögen wie in Fig. 68 angedeutet bezeichnet sein. Beziehen sich dann in den folgenden Gleichungen die Summen Σ auf alle Felder zwischen den angesetzten Summengrenzen, so haben wir nach § 31, 13) den von einer beliebigen Belastung herrührenden Horizontalschub:

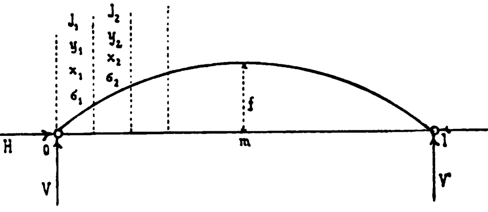


Fig. 68.

$$H = \frac{1}{w}\left(Vr \quad \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} S_x\right) \quad \text{mit } S_x = \sum_0^x P(x-a), \tag{13}$$

den Beitrag einer beliebigen Temperaturänderung τ

$$H = \frac{l}{w} E \alpha \tau, \qquad 14)$$

und den Einfluss einer Aenderung der Spannweite um Δl:

$$H = -\frac{E}{w} \Delta l. \qquad 15)$$

In diesen Gleichungen sind nur von der Axform und den Querschnitten abhängig, also für alle Belastungen u. s. w. gleichbleibend:

$$w = \sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J}, \qquad v = \sum_0^l \frac{\sigma x y}{J}, \qquad 16)$$

wenn jedoch, wie gewöhnlich, die Feldertheilung und Querschnitte zur Trägermitte symmetrisch angeordnet sind, auch:

$$w = 2 \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J}, \qquad v = l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}. \qquad 17)$$

In §§ 31, 32 sind noch genauere Formeln für den Horizontalschub von Zweiggelenkbogen von beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten abgeleitet. Die in § 32 vorgenommene Vergleichung der betreffenden Resultate für die Maria-Pia-Brücke mit den Resultaten der obigen einfacheren Formeln ergab Abweichungen von 0 bis 0,44 %.

Verschiedene Belastungen.

Die bis jetzt angeführten Gleichungen gelten für beliebige Belastung. Eine Spezialisirung derselben für stetig vertheilte Lasten kann nach der Anleitung in § 14 erfolgen, wo die Werthe der Summenausdrücke Σ für die wichtigsten Fälle gegeben sind.

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit erhält man:

$$V = V' = \frac{u l}{2}, \qquad 18)$$

$$V_x = u \left(\frac{l}{2} - x\right), \qquad 19)$$

$$M_x = \frac{u}{2} x (l - x) - H y, \qquad 20)$$

worin für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$:

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6}\beta}{1 + \varepsilon} \frac{u l^2}{8 f}, \qquad 21)$$

und für Bogen von beliebiger symmetrischer Axform und beliebigen Querschnitten:

$$H = \frac{l v - z}{2 w} u. \qquad 22)$$

In 23) kann β fast immer, ε jedoch im Allgemeinen nur für vorläufige Berechnungen vernachlässigt werden (§ 28). In 22) sind w, v durch 17) oder 16) bestimmt und

$$z = \sum_0^l \frac{\sigma y x^2}{J}, \tag{23}$$

bei symmetrischer Feldertheilung und symmetrischen Querschnitten hat man jedoch auch unmittelbar:

$$\frac{l v - z}{2} = l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J}, \tag{24}$$

und daneben w nach 17). Dies gilt auch in den folgenden Formeln.

Wirken auf der ersten und zweiten Trägerhälfte verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit, dann ergeben sich:

$$V = \frac{3u + u'}{8} l, \qquad V' = \frac{u + 3u'}{8} l, \tag{25}$$

und für Querschnitte x auf der ersten Trägerhälfte (die Behandlung dieser genügt für praktische Berechnungen):

$$V_x = V - u x, \tag{26}$$

$$M_x = V x - H y - \frac{u x^2}{2}. \tag{27}$$

Hierin gelten für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$:

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6}\beta}{1 + \varepsilon} \frac{u + u'}{16 f} l^2, \tag{28}$$

und für vollständig symmetrische Bogen mit beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten:

$$H = \frac{l v - z}{w} \frac{u + u'}{4}. \tag{29}$$

Der Beitrag einer Einzellast P an beliebiger Stelle a zum Horizontalschub H ergibt sich für den Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$, wenn man einfach in 7) das Summenzeichen Σ weglässt. Für Bogen von beliebiger symmetrischer Axform und beliebigen Querschnitten hat man:

$$H = \frac{P}{l w} \left[(l - a) \sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum_a^l \frac{\sigma (l - x) y}{J} \right]. \tag{30}$$

Ist die Anordnung der Querschnitte und Feldertheilung symmetrisch zur Trägermitte, dann wird bequemer:

$$H = \frac{P}{w} \left[\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \left(\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma y}{J} \right) \right], \tag{31}$$

also insbesondere:

$$\text{für } a < \frac{l}{2} \qquad H = \frac{P}{w} \left(\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum_a^m \frac{\sigma y}{J} \right), \tag{32}$$

$$\text{„} \quad a > \frac{l}{2} \qquad H = \frac{P}{w} \left(\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} - a \sum_m^a \frac{\sigma y}{J} \right). \tag{33}$$

Alle drei Gleichungen liefern:

$$\text{für } a = \frac{l}{2} \qquad H = \frac{P}{w} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J}. \tag{34}$$

Für eine beliebige symmetrische Belastung ist bei Parabelbogen in 7) $\sum\limits_0^l = 2\sum\limits_0^m$, während alsdann bei vollständig symmetrischen Bogen von beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten nach § 32, 4):

$$H = \frac{2}{w}\sum_0^m \frac{\sigma y}{J}(xV - S_x) = \frac{2}{w}\left[V\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} S_x\right], \qquad 35)$$

und in beiden Fällen gesetzt werden können:

$$V = \sum_0^m P, \qquad xV - S_x = \sum_0^x Pa + x\sum_x^m P, \qquad 36)$$

doch ist im zweiten Ausdruck 36) zu beachten, dass eine etwa gerade bei $a = x$ angreifende Last P nur in einer der Summen $\sum\limits_0^x$ und $\sum\limits_x^m$ berücksichtigt werden darf (in einer beliebigen).

Falls die Bogenaxe wirklich parabolisch ist, nicht nur so annähernd, dass man die für parabolische Bogen gültigen Ausdrücke des Horizontalschubes verwendet, so folgt aus 20) mit 21) und § 15, 8) für eine gleichmässig vertheilte Last u auf der ganzen Spannweite:

$$M_x = \frac{\varepsilon + \frac{5}{6}\beta}{1 + \varepsilon}\,\frac{u}{2}\,x\,(l - x), \qquad 37)$$

und aus 27) mit 25) 28) und § 15, 8) für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$M_x = \frac{\varepsilon + \frac{5}{6}\beta}{1 + \varepsilon}\,\frac{u + u'}{4}\,x\,(l - x) + \frac{u - u'}{4}\,x\left(\frac{l}{2} - x\right). \qquad 38)$$

Bei Vernachlässigung von β, ε liefert die erste Gleichung:

$$M_x = 0,$$

und die zweite Gleichung:

$$M_x = \frac{u - u'}{4}\,x\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

wonach die Stützlinie (§ 8) im ersten Falle nahe der Stabaxe liegt und im zweiten die letztere annähernd in der Trägermitte scheidet.

Kämpferdrucklinie. Kernlinien.

Die Umhüllungslinien U, U' der Kämpferdrücke sind Punkte, sie fallen mit den Mittelpunkten der Kämpfergelenke zusammen (§ 2). Für die Schnittlinie S der Kämpferdrücke ist nach § 2, 1) mit $M = 0$ die Ordinate b bei Abscisse a:

$$b = \frac{V}{H}a, \qquad 39)$$

worin V, H die durch eine Einzellast P bei a erzeugten Werthe der Vertikalreaktion bei 0 und des Horizontalschubes bedeuten.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$ hat man nach 2) 7):

$$V = P\frac{l - a}{l}, \qquad H = \frac{5\,Pa\,(l - a)\,(l^2 + l\,a - a^2 - \beta\,l^2)}{(1 + \varepsilon)\,8\,f\,l^3}.$$

Die Gleichung der Schnittlinie S wird damit:

$$b = \frac{8}{5} \frac{(1+\varepsilon) f l^2}{l^2 + l a - a^2 - \beta l^2}, \qquad 40)$$

worin βl^2 jedenfalls wegbleiben darf. Für die Zwecke, welchen die Kämpferdrucklinie dient (§ 11), kann jedoch oft auch ε vernachlässigt werden, sodass dann:

$$b = \frac{8}{5} \frac{f l^2}{l^2 + l a - a^2}. \qquad 41)$$

und beispielsweise (Fig. 69):

für $a =$	0	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{l}{2}$
$\frac{b}{f} =$	1,600	1,442	1,347	1,296	1,280

Bei Berücksichtigung von ε sind diese Werthe mit $1+\varepsilon$ zu multiplizieren.

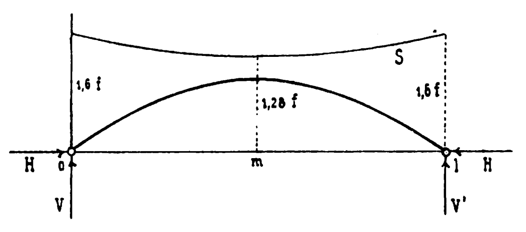


Fig. 69.

Für Bogen von beliebiger symmetrischer Axform und beliebigen Querschnitten hat man in 39) V wie im vorigen Falle und H durch 30)—33) bestimmt, wonach allgemein:*

$$b = \frac{w\, a(l-a)}{(l-a) \sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum_a^l \frac{\sigma (l-x) y}{J}}, \qquad 42)$$

und, wenn die Feldertheilung und Querschnitte zur Mitte symmetrisch angeordnet sind, auf der ersten Trägerhälfte:

$$b = \frac{a(l-a)}{\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum_a^m \frac{\sigma y}{J}} \frac{w}{l}. \qquad 43)$$

Selbstverständlich verläuft die Kämpferdrucklinie im letzteren Falle symmetrisch zur Vertikalen durch die Trägermitte.

Für die Kernlinien gilt das in § 8 Gesagte. Man hat also z. B. bei symmetrisch zur Axschicht liegenden Querschnitten die Entfernungen des oberen und unteren Kernpunktes von der Stabaxe:

$$k_o = k_u = \frac{W}{F}, \qquad 44)$$

während die Kernlinien bei vernachlässigter Füllung (Gitterbogen etc.) mit den Gurtungsschwerlinien zusammenfallen.

Grenzwerthe bei bewegter Last.

Es gilt ohne Aenderung das im vorigen § für Bogen mit drei Gelenken Gesagte. Da jedoch jetzt die Kämpferdrucklinie S einen andern

---

* Formel 42) wie manche andre den Bogen mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten betreffende wurde erstmals publicirt und angewandt in dem Aufsatze: Weyrauch, Ueber die Berechnung der Dourobrücke, Zeitschr. f. Baukunde 1879, S. 421.

Verlauf hat, so gewinnen die angeführten Konstruktionen der ungünstigsten Belastungen ein etwas andres Aussehen, Fig. 70—72 treten an Stelle von Fig. 61—63 (S. 62).

Bei Bogen mit zwei Gelenken haben nun aber auch die Temperaturänderungen einen Einfluss auf H und damit auf die Beanspruchungen in allen Querschnitten. Es pflegen Abweichungen gegen die Normaltemperatur bis etwa $\tau = \pm 30^{0}$ C berücksichtigt zu werden. Ein beliebiger Horizontalschub allein erzeugt nach 3) 5) bei x ein Moment und eine Normalkraft:

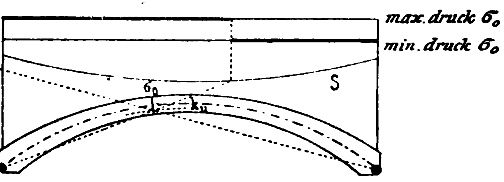


Fig. 70.

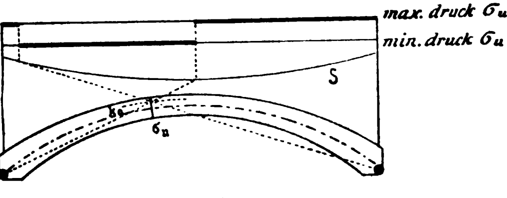


Fig. 71.

$$M_x = -Hy, \quad N_x = H\cos\varphi. \qquad 45)$$

Die entsprechenden Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement sind in dem gewöhnlichen Falle symmetrisch zur Axschicht liegender Querschnitte nach 6):

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos\varphi}{F} - \frac{y}{W}\right)H, \qquad \sigma_u = \left(\frac{\cos\varphi}{F} + \frac{y}{W}\right)H. \qquad 46)$$

Die Grenzwerthe derselben entstehen also mit den Grenzwerthen von H, d. h. für Temperaturänderungen mit H nach 8) 14) und den Grenzwerthen von τ, bei obiger Annahme mit $\tau = 30^{0}$ und $\tau = -30^{0}$. Diese Grenzwerthe von σ_o, σ_u sind mit den von der Belastung herrührenden Grenzwerthen von σ_o, σ_u so zu kombiniren, dass möglichst ungünstige (möglichst weit auseinander gelegene) Grenzwerthe im Ganzen entstehen.

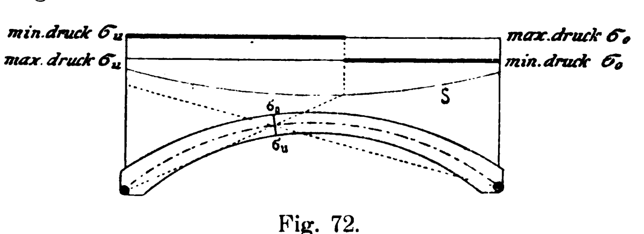


Fig. 72.

Durch 45) 46) sind auch die durch eine Aenderung Δl der Spannweite (Ausweichen der Widerlager) bewirkten Aenderungen der Beanspruchungen bestimmt, wobei H aus 9) oder 15) folgt.

Formänderungen.

Wir führen wie bei Bogen mit drei Gelenken nur die Einsenkung parabolischer Bogen von konstantem $J\cos\varphi$ in der Trägermitte an, und verweisen bezüglich der sonstigen Formänderungen parabolischer Bogen auf § 30, bezüglich der Formänderungen von Bogen mit beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten auf §§ 26, 33.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ ist nach der Abtheilung in § 30 unter Vernachlässigung von β die von einer beliebigen Belastung herrührende Einsenkung in der Mitte:

$$e = \frac{1}{48\,E\,c}\left[\sum_0^m P(l-2\,a)^3 - \sum_0^l P(l-a)(l^2-8\,l\,a+4\,a^2) - 5\,H f l^2\right], \quad 47)$$

worin H durch 7) mit $\beta = 0$ bestimmt. Speziell für eine zur Trägermitte symmetrische Belastung hat man:

$$e = \frac{1}{24\,E\,c}\left[\sum_0^m P\,a\,(3\,l^2-4\,a^2) - \frac{5}{2} H f l^2\right]. \quad 48)$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrirte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in $\sum\limits_0^m$ aufzunehmen. Für eine Einzellast P in der Trägermitte folgt hiernach beispielsweise

$$e = \frac{3+128\,\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{P\,l^3}{6144\,E\,c}. \quad 49)$$

Von 48) kann auch bei unsymmetrischer Belastung Gebrauch gemacht werden, wenn man berücksichtigt, dass die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige Belastung halb so gross als durch eine mittelst Verdoppelung dieser Belastung hergestellte symmetrische Belastung ist (vergl. Beisp. 42, auch 25, 29, 41, 44).

Die Werthe der Summenausdrücke Σ für stetig vertheilte Lasten sind aus § 14 zu entnehmen. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit folgt dann aus 48) mit 21):

$$e = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{5\,u\,l^4}{384\,E\,c}, \quad 50)$$

und für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte nach 47) mit 28):

$$e = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{u+u'}{768}\,\frac{5\,l^4}{E\,c}. \quad 51)$$

Selbstverständlich war auch in diesen Fällen β zu vernachlässigen. Gleichung 51) führt mit $u' = u$ wieder auf 50) und hätte umgekehrt aus 50) erhalten werden können.

Gleichung 48) liefert für $H = 0$ und Gleichung 49) sowie 50) für $f = 0$, $\varepsilon = \infty^2$ bekannte Ausdrücke für einfache Balken mit frei drehbaren Enden.* Bei Vernachlässigung von ε würde diese nothwendige Uebereinstimmung wegfallen und z. B. bei beliebiger auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilter Last überhaupt keine Einsenkung sich ergeben (vergl. auch § 17 und S. 73).

Eine Temperaturänderung τ (bei Zunahme τ positiv) erzeugt die Einsenkung:

$$e = \frac{5\,f\,l^2}{48\,E\,c} H - \alpha\,\tau\,f, \quad 52)$$

* Vergl. Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuirlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, S. 78, 80; Lueger, Lexikon der gesammten Technik, Band I, Stuttgart 1895, S. 766.

mit H nach 8). Durch Einsetzen des letzteren Ausdrucks folgt:

$$e = -\alpha\tau\left(f + \frac{25}{128 f}\frac{l^2}{1+\varepsilon}\right). \qquad 53)$$

Durch eine Aenderung Δl der Spannweite (bei Zunahme Δl positiv) und eine Aenderung Δk der anfänglich gleichen Höhenlage der Stützen (bei höherer Stütze l ist Δk positiv) würde entstehen:

$$e = -\frac{5 f l^2}{48 E c} H - \frac{\Delta k}{2}. \qquad 54)$$

Hierin ist H durch 9) ausgedrückt, sodass auch:

$$e = \frac{25 l}{128 f}\frac{\Delta l}{1+\varepsilon} - \frac{\Delta k}{2}. \qquad 55)$$

Für Näherungsrechnungen kann ε in 53), 55) häufig vernachlässigt werden.

Beispiel 16. Horizontalschub eines parabolischen Bogens (Coblenzer Brücke). Bei Berechnung der älteren Coblenzer Brücke wurden für die symmetrischen Bogen mit Kämpfergelenken von $l = 98{,}0775$ m Spannweite und $f = \frac{l}{11} = 8{,}91614$ m Pfeil der Axe die letztere parabolisch, die Entfernung der Gurtungsschwerpunkte konstant $h = 2{,}97214$ m, und das Trägheitsmoment des veränderlichen Bogenquerschnitts F unter Vernachlässigung der Fachwerkfüllung

$$J = F\frac{h^2}{4}$$

angenommen. Unter Aufrechterhaltung dieser Annahmen, den Horizontalschub für beliebige Belastung und speziell für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last wie auch für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte auszudrücken. — Schliesslich ist der Horizontalschub für beliebige Temperaturänderungen τ und für kleine Aenderungen Δl der Spannweite anzugeben, wobei der Elasticitätsmodul $E = 2000000$ kg per qcm, der Ausdehnungskoeffizient $\alpha = 0{,}000012$ und der Mittelwerth von $J\cos\varphi$ für Meter als Längeneinheit $c = 0{,}36497$ einzuführen sind.*

Unter obigen Annahmen erhält man für Meter als Längeneinheit nach § 15, 41):

$$\gamma = \frac{J}{F} = \frac{2{,}97214^2}{4} = 2{,}20840,$$

während mit $l:f = 11$ nach § 15, 11):

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = \frac{125}{8} l = 139{,}314 \text{ m}.$$

Nun liefern die Gleichungen § 15, 40) und § 16, 10):

$$\varepsilon = \frac{15\gamma}{8}\left(\frac{r-f}{rf}\right)^2 = \frac{15 \,.\, 2{,}2084}{8}\left(\frac{130{,}398}{139{,}314 \,.\, 8{,}91614}\right)^2 = 0{,}04563,$$

$$\beta = \frac{8}{5}\frac{f}{r-f}\varepsilon = \frac{8 \,.\, 8{,}91614 \,.\, 0{,}04563}{5 \,.\, 130{,}398} = 0{,}004992,$$

womit weiter folgt:

$$\frac{5}{(1+\varepsilon) 8 f l^3} = \frac{5 \,.\, 11}{1{,}04563 \,.\, 8 \,.\, l^4} = \frac{6{,}57498}{l^4},$$

und nach § 16, 7) der Horizontalschub durch beliebige Belastung:

$$H = \frac{6{,}5750}{l^4}\sum_0^1 P a (l-a)(0{,}995\, l^2 + l a - a^2), \qquad a)$$

* Letztere Angabe gilt für die mittleren (ein Geleise tragenden) Bogen, während für die ihnen parallelen äusseren Bogen (auf welche nur je eine halbe Geleiselast gerechnet wurde) c geringer ist.

Für eine gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit hat man nach § 16, 21):

$$H = \frac{1 - 5/6\,\beta}{1 + \varepsilon} \frac{u\,l^2}{8f} = \frac{0{,}99584}{1{,}04563} \frac{11 \,.\, 98{,}0775}{8}\, u,$$

$$H = 128{,}436\, u, \qquad b)$$

und für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte nach § 16, 28):

$$H = \frac{1 - 5/6\,\beta}{1 + \varepsilon} \frac{u + u'}{16 f}\, l^2 = 128{,}436\, \frac{u + u'}{2}, \qquad c)$$

$$H = 64{,}218\,(u + u').$$

Wie schon in § 16 erwähnt, lässt sich im Allgemeinen β vernachlässigen (vergl. § 28). Dies trifft auch im vorliegenden Falle zu. Es treten dann in $a)$, $b)$, $c)$ 1 bezw. 128,973 und 64,486 an Stelle von 0,995 bezw. 128,436 und 64,218.

Zur Ermittelung der Beiträge von τ und Δl nach § 16, 8) 9) haben wir:

$$\frac{15\,E\,c}{(1 + \varepsilon)\, 8 f^2} = \frac{15 \,.\, 2000000 \,.\, 100^2 \,.\, 0{,}36497}{1{,}04563 \,.\, 8 \,.\, 8{,}91614^2} = 164648000,$$

womit der Horizontalschub durch eine beliebige Temperaturänderung τ:

$$H = 164648000 \,.\, 0{,}000012 \,.\, \tau = 1975{,}78\, \tau \text{ kg}, \qquad d)$$

und der Horizontalschub durch eine kleine Aenderung Δl der Spannweite:

$$H = -\frac{164648000}{98{,}0775}\, \Delta l = -\, 1678754\, \Delta l \text{ kg}. \qquad e)$$

In $b)$ $c)$ sind u, u' per Meter, in $e)$ ist Δl in Metern einzusetzen.

Bemerkungen. Unter Voraussetzung eines Kreisbogens von konstantem Querschnitt hätten wir anstatt $d)$ und $e)$ erhalten (Beisp. 38):

$$H = 1963{,}16\, \tau, \qquad H = -\, 1668074\, \Delta l,$$

d. i. 0,64 % kleiner als oben für den Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ gefunden wurde.

Wenn wir dagegen die Formeln § 16, 8) 9) mit der gebräuchlichen Annahme $\varepsilon = 0$ verwendet hätten, so würden sich ergeben haben:

$$H = 2065{,}93\, \tau, \qquad H = -\, 1721609\, \Delta l,$$

d. h. um 4,56 % grösser als oben.

Ueber den Horizontalschub parabolischer Bogen siehe auch Beisp. 40.

Beispiel 17. Einfluss von Temperaturänderungen (Coblenzer Brücke).

Für die Coblenzer Brücke (vergl. Beisp. 16) seien angenommen: Normaltemperatur 10° C, grösste Abweichungen von derselben $\tau = \pm 30°$. Den Einfluss der Temperaturänderungen auf die Momente M_x, Normalkräfte N_x, Transversalkräfte T_x und Gurtungsbeanspruchungen O, U der mittleren (ein Geleise tragenden, s. S. 86) Bogen festzustellen und speziell für den Scheitelquerschnitt zahlenmässig anzugeben.

Nach Formel $d)$ des vorigen Beispiels ist der Horizontalschub durch die Temperaturänderung $\tau = +30°$:

$$H = 1975{,}78\, \tau = \pm\, 59273 \text{ kg},$$

während die Vertikalreaktionen der Kämpfer durch τ keine Aenderung erleiden.

Nach § 16, 3)—5) und § 1, 10) entstehen durch ein beliebiges H und speziell für $\tau = 30°$ folgende weitere Aenderungen:

$$M_x = -\,H y = -\, 59273\, y \quad \text{mk},$$

$$N_x = H \cos\varphi = 59273 \cos\varphi \quad \text{kg},$$

$$T_x = -\,H \sin\varphi = -\, 59273 \sin\varphi \quad \text{kg}.$$

Von den Kämpfern an bis zum Scheitel hin nimmt also M_x proportional y von 0 bis $-\,59273 f$ numerisch zu, N_x wächst von $59273 \cos\varphi_0$ bis 59273 kg, während T_x von $-\,59273 \sin\varphi_0$ bis 0 numerisch abnimmt.

Bei Berechnung der Gurtungsbeanspruchungen für die Coblenzer Brücke wurden die Gurtungsquerschnitte unter Verachlässigung der Füllung gesetzt $f_o = f_u = \frac{F}{2}$. Da man alsdann zufolge § 8, 18) 19) für Bogen mit durchbrochenen Wandungen hat:

$$O = \frac{N_x}{2} + \frac{M_x}{h}, \qquad U = \frac{N_x}{2} - \frac{M_x}{h},$$

so folgen mit obigen allgemeinen Ausdrücken die von einem beliebigen Horizontalschub H allein herrührenden Gurtungskräfte:

$$O = \left(\frac{\cos\varphi}{2} - \frac{y}{h}\right) H, \qquad U = \left(\frac{\cos\varphi}{2} + \frac{y}{h}\right) H,$$

und in unserm Falle mit $h = 2{,}97214$ m, $\tau = 30^0$:

$$O = 29636 \cos\varphi - 19943\, y \text{ kg},$$
$$U = 29636 \cos\varphi + 19943\, y \text{ ,, }.$$

Die grösste Gurtungsbeanspruchung durch Temperaturänderungen tritt hiernach im Scheitel für den Untergurt ein. Man hat im Scheitel mit $\varphi = 0$, $y = f = 8{,}91614$ m:

$$O = -\ 148179 \text{ kg}, \qquad U = 207451 \text{ kg},$$

und da die Gurtungsquerschnitte daselbst $f_c = f_u = 768{,}13$ qcm, so sind die entsprechenden Beanspruchungen per qcm:

$$\text{im Obergurt} \quad -\frac{148179}{768{,}13} = -\ 192{,}9 \text{ kg (Zug)},$$

$$\text{im Untergurt} \quad \frac{207451}{768{,}13} = 270{,}1 \text{ ,, (Druck)}.$$

Für $\tau = -\ 30^0$ wechseln mit H (siehe oben) auch alle weiter genannten Beanspruchungen einfach ihr Vorzeichen.

Beispiel 18. Ausweichen eines Widerlagers oder Pfeilers (Coblenzer Brücke). Infolge Nachgebens eines Widerlagers oder Pfeilers der älteren Coblenzer Brücke (vergl. Beisp. 16, 17) möge die Spannweite $l = 98{,}0775$ m eines der mittleren (ein Geleise tragenden) Bogen um 0,02 m zugenommen haben. Es sind die hierdurch eingetretenen Aenderungen der Momente, Normalkräfte, Transversalkräfte und Gurtungsbeanspruchungen festzustellen und speziell für den Scheitelquerschnitt und die Kämpferquerschnitte zahlenmässig anzugeben.

Durch das Nachgeben des Widerlagers um $\Delta l = 0{,}02$ m tritt nach der Gleichung e) des Beispiels 16 eine Aenderung des Horizontalschubs um

$$H = -\ 1678754\, \Delta l = -\ 33575 \text{ kg}$$

ein, während die Vertikalreaktionen der Kämpfer ungeändert bleiben. Die Aenderungen der Momente, Normalkräfte, Transversalkräfte und Gurtungsbeanspruchungen beliebiger Querschnitte sind (vergl. Beisp. 17):

$$M_x = -\ H y \quad = \quad 33575\, y,$$
$$N_x = \quad H \cos\varphi = -\ 33575 \cos\varphi \text{ kg},$$
$$T_x = -\ H \sin\varphi = \quad 33575 \sin\varphi \text{ ,, },$$
$$O = \frac{N_x}{2} + \frac{M_x}{h} = -\ 16788 \cos\varphi + 11297\, y \text{ kg},$$
$$U = \frac{N_x}{2} - \frac{M_x}{h} = -\ 16788 \cos\varphi - 11297\, y \text{ ,, }.$$

Speziell für den Scheitelquerschnitt hat man wegen $y = f = 8{,}91614$ m, $\varphi = 0$:

$$M_x = 299359 \text{ mk}, \qquad N_x = -\ 33575 \text{ kg}, \quad T_x = 0,$$
$$O = 83938 \text{ kg}, \qquad U = -\ 117514 \text{ kg},$$

und, mit den Gurtungsquerschnitten $f_o = f_u = 768{,}13$ qcm, per qcm:

$$\frac{83938}{768{,}13} = 109 \text{ kg}, \qquad -\frac{117514}{768{,}13} = -\ 153 \text{ kg}.$$

Bei den Kämpfern hat man $y = 0$ und damit $M_x = 0$. Wird der Bogen, wie bei Berechnung der Coblenzer Brücke, parabolisch vorausgesetzt, so hat man mit Rücksicht auf § 15, 8) für $x = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4f}{l} = \frac{4}{11}, \qquad \varphi = 19^0\, 58'\, 59'',$$
$$\sin\varphi = 0{,}34174, \qquad \cos\varphi = 0{,}93979,$$
$$N_x = -\ 31553 \text{ kg}, \qquad T_x = 11474 \text{ kg},$$

und für $x = l$:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{4f}{l} = -\frac{4}{11}, \qquad \varphi = -19^{\circ}58'59'',$$

$$\sin \varphi = -0{,}34174, \qquad \cos \varphi = 0{,}93979,$$

$$N_x = -31553 \text{ kg}, \qquad T_x = -11474 \text{ kg},$$

also an beiden Kämpfern:

$$O = -U = -16788 \,.\, 0{,}93979 = -15777 \text{ kg},$$

und mit den Gurtungsquerschnitten $f_o = f_u = 800{,}624$ qcm per qcm:

$$-\frac{15777}{800{,}624} = -20 \text{ kg}.$$

Beispiel 19. Influenzlinien und Grenzwerthe parabolischer Bogen (Coblenzer Brücke).

Für die Bogen der Coblenzer Brücke (vergl. Beisp. 16) die Influenzlinien der Stützenreaktionen V, V', H anzugeben und und die Grenzwerthe dieser Grössen festzustellen, wenn eine gleichmässig vertheilte feste Last von $g = 3983$ kg, eine ebensolche Verkehrslast von $p =$ kg per Meter (Annahmen bei der ursprünglichen Berechnung) und daneben Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 30^{\circ}$ C gegen die Normaltemperatur in Betracht gezogen werden, auch infolge Nachgebens eines Widerlagers eine Aenderung der Spannweite um $\Delta l = 0{,}02$ m eingetreten ist.

Die Influenzlinie von V wurde bereits in § 12 ermittelt, diejenige von V' liegt bezüglich der Trägermitte symmetrisch zu ihr. Da die Influenzflächen in beiden Fällen den Inhalt $\frac{l}{2}$ haben und ganz auf einer Seite der Abscissenaxe liegen, so sind zufolge § 11 die Grenzwerthe beider Vertikalreaktionen mit $q = g + p = 7169$ kg:

$$V = \frac{q\,l}{2} = 3584{,}5 \,.\, 98{,}0775 = 351559 \text{ kg},$$

$$V' = \frac{g\,l}{2} = 1991{,}5 \,.\, 98{,}0775 = 195321 \;\text{„}\,.$$

Der allgemeinste Ausdruck des Horizontalschubs für die fraglichen Bogen ist nach den Formeln $a)$, $d)$, $e)$ des Beispiels 16:

$$H = \frac{6.575}{l^4} \sum_0^l P\,a\,(l-a)\,(l^2 + l\,a - a^2) + 1888{,}68\,\tau - 1678754\,\Delta l.$$

Die Gleichung der Influenzlinie von H folgt daraus nach § 12:

$$b = \frac{6{,}575}{l^4}\, a\,(l-a)\,(l^2 + l\,a - a^2),$$

oder mit $l = n\lambda$, $a = m\lambda$:

$$b = \frac{6{,}575}{n^4}\, m\,(n-m)\,(n^2 + m\,(n-m)),$$

wonach bei	$a = 0$	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{l}{2}$
mit $n = 8$ und	$m = 0$	1	2	3	4
die Ordinate	$b = 0$	0,798	1,464	1,902	2,055

Die Linie ist in Fig. 73 dargestellt, sie zeigt (wie schon der Ausdruck von H), dass die Grenzwerthe von H für Vollbelastung der ganzen Spannweite und Eigengewicht allein eintreten. Da für eine beliebige auf die Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit mit Rücksicht auf § 14 der Beitrag der Belastung zu H nach obiger Formel:

$$H = \frac{6{,}575}{l^4}\,\frac{u\,l^5}{5} = 128{,}972\,u,$$

Fig. 73.

so ergeben sich mit Berücksichtigung von τ, Δl die Grenzwerthe von H im Ganzen:

$H = 128{,}972 \,.\, 7169 + 1975{,}78 \,.\, 30 - 1678754 \,.\, 0{,}02 = 950299$ kg,
$H = 128{,}972 \,.\, 3983 - 1975{,}78 \,.\, 30 - 1678754 \,.\, 0{,}02 = 420847$ „ .
Ueber Influenzlinien und Grenzwerthe parabolischer Bogen siehe auch B 10, 11 und IV. Abschnitt.

Beispiel 20. Einsenkung parabolischer Bogen (Coblenzer Brücke).
Für die Bogen der Coblenzer Brücke (vergl. Beisp. 16) wurden per Meter Spannweite angenommen: Feste Last $g = 3983$ kg, Verkehrslast $p = 3186$ kg, also Gesammtlast $q = g + p = 7169$ kg. Es sind die Einsenkungen in der Trägermitte zu berechnen: *a*) für die feste Last allein; *b*) für Vollbelastung des ganzen Trägers; *c*) für feste Last auf der ersten oder zweiten, Vollbelastung auf der zweiten oder ersten Bogenhälfte; *d*) für eine Temperaturänderung τ und speziell für $\tau = \pm 30^0$; *e*) für eine Aenderung Δl der Spannweite und speziell für $\Delta l = 0{,}02$ m.

Für eine beliebige auf die ganze Länge gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit ist nach § 16, 50) die Einsenkung in der Trägermitte:

$$e = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{5\,u\,l^4}{384\,E\,c}, \tag{1}$$

also im vorliegenden Falle mit $l = 98{,}0775$ m, $c = 0{,}36497$ für Meter als Längeneinheit, $\varepsilon = 0{,}04563$, $E = 2000000$ kg per qcm:

$$e = \frac{0{,}04563}{1{,}04563} \frac{5 \,.\, u \,.\, 98{,}0775^4}{384 \,.\, 2000000 \,.\, 100^2 \,.\, 0{,}36497} = 0{,}0000072028\,u \text{ m} = 0{,}00072028\,u \text{ cm}.$$

Hieraus folgt für die feste Last (Eigengewicht der Brücke) allein mit $u = 3983$ kg:

$$e = 2{,}869 \text{ cm}. \tag{a}$$

und für Vollbelastung des ganzen Bogens mit $u = 7169$ kg:

$$e = 5{,}164 \text{ cm}. \tag{b}$$

Für Belastung der ersten Trägerhälfte mit u, der zweiten mit u' per Längeneinheit hat man nach § 16, 51):

$$e = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{u+u'}{768} \frac{5\,l^4}{E\,c}, \tag{2}$$

also in unserm Falle *c*):

$$e = 0{,}00072028 \frac{3983 + 7169}{2} = 4{,}016 \text{ cm}, \tag{c}$$

das ist das Mittel der Werthe *a*) und *b*).
Durch eine Temperaturänderung τ entsteht nach § 16, 51):

$$e = -\alpha\tau \left(f + \frac{25}{128 f} \frac{l^2}{1+\varepsilon}\right), \tag{3}$$

und mit $l = 11 f = 11 \,.\, 8{,}91614$ m, $\alpha = 0{,}000012$ in Meter:

$$e = -0{,}000012 \,.\, 8{,}91614\tau \left(1 + \frac{25 \,.\, 11^2}{128 \,.\, 1{,}04563}\right), \tag{4}$$

$$e = -0{,}2525\,\tau \text{ cm}, \tag{d}$$

also beispielsweise für $\tau = \pm 30^0$:

$$e = \mp 7{,}575 \text{ cm}.$$

Eine Aenderung der Spannweite um Δl hat nach § 16, 55) zur Folge:

$$e = \frac{25\,l}{128 f} \frac{\Delta l}{1+\varepsilon}, \tag{5}$$

und im vorliegenden Falle:

$$e = \frac{25 \,.\, 11}{128} \frac{\Delta l}{1{,}04563} = 2{,}0547\,\Delta l, \tag{e}$$

wonach für $\Delta l = 0{,}02$ m $= 2$ cm:

$$e = 2{,}0547 \,.\, 2 = 4{,}109 \text{ cm}.$$

Ueber die Einsenkung parabolischer Bogen siehe auch Beisp. 42 und IV *M*.

Aufgabe 9 mit Beispiel 21. Künstlicher Horizontalschub (Coblenzer Brücke).
Für einen symmetrischen Parabelbogen mit Kämpfergelenken soll durch Erzeugung eines künstlichen Horizontalschubs bewirkt werden, dass bei normaler

Temperatur und Belastung durch eine gleichmässig vertheilte Last allein keine Momente entstehen, also die resultirenden Schnittkräfte in der Axe angreifen, und alle Querschnittselemente gleiche und möglichst kleine Normalspannungen erleiden.

Für beliebige symmetrische Bogen mit Kämpfergelenken hat man nach § 16, 20) bei gleichmässig vertheilter Last von u per Längeneinheit das Moment bei x:

$$M_x = \frac{u}{2} x (l-x) - H y, \tag{1}$$

also speziell für symmetrische Parabelbogen vom Pfeile f wegen § 15, 8):

$$M_x = \frac{u}{2} x (l-x) \left(1 - \frac{8f}{u l^2} H\right). \tag{2}$$

Wäre nun der von der angenommenen Belastung herrührende Horizontalschub

$$H = \frac{u l^2}{8f} \tag{3}$$

(wie man ihn bei Vernachlässigung von ε, β annimmt), so würde ohne künstliche Mittel bei normaler Temperatur nach 2):

$$M_x = 0.$$

Genauer ist jedoch nach § 16, 21):

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6}\beta}{1+\varepsilon} \frac{u l^2}{8f}, \tag{4}$$

welcher Werth etwas unter dem Horizontalschub 3) liegt, sodass nach 2) Momente entstehen. Sollen dieselben durch einen künstlichen Horizontalschub K aufgehoben werden, so ist dieser so zu bemessen, dass der Horizontalschub 4) auf den Werth 3) ergänzt wird, d. h. wir müssen wählen:

$$K = \left(1 - \frac{1 - \frac{5}{6}\beta}{1+\varepsilon}\right) \frac{u l^2}{8f}, \tag{5}$$

das heisst auch:

$$K = \frac{\varepsilon + \frac{5}{6}\beta}{1+\varepsilon} \frac{u l^2}{8f}. \tag{6}$$

Nach 5) 6) ist der künstliche Horizontalschub proportional u. Es wäre also ein andrer Werth von K zu wählen, wenn die M_x bei Vollbelastung des ganzen Trägers aufgehoben werden sollten, als wenn dies für Eigengewicht allein beabsichtigt ist. Da die wirkliche Belastung fast immer der Belastung durch Eigengewicht allein nahe kommt, so ist letzteres vorzuziehen, also $u = g$ zu setzen. Ueber den künstlichen Horizontalschub bei nicht gleichmässig vertheilter Last siehe IV E.

Für die in Beisp. 16 betrachteten Bogen der Coblenzer Brücke erhält man nach 6) mit $l = 98{,}0775$ m $= 11 f$, $\varepsilon = 0{,}04563$, $\beta = 0{,}004992$, $g = 3983$ kg:

$$K = \frac{0{,}04979}{1{,}04562} \frac{3983}{8} 98{,}0775 \,.\, 11 = 25577 \text{ kg}.$$

Bei Vernachlässigung von β hätte man $K = 23440$ kg oder um 8,36 % zu klein erhalten (vergl. IV E).

Ein künstlicher Horizontalschub kann auch aus anderen Gründen und mit anderm Werthe als oben angewandt werden. Bei der 1893 dem Verkehr übergebenen Stuttgart—Cannstatter Neckarbrücke war er vorgeschrieben, um ein Durchhängen der Träger bei niedriger Temperatur zu verhüten (IV E). Ist der künstliche Horizontalschub einmal hergestellt, so tritt sein Werth dem aus andern Ursachen herrührenden Horizontalschub für alle Belastungs- und Temperaturfälle hinzu. Der Einfluss des künstlichen Horizontalschubs auf die Beanspruchungen lässt sich ganz wie derjenige des Horizontalschubs durch Temperaturänderungen und **Aenderungen** der Spannweite ermitteln (Aufg. 6, Beisp. 7, 17, 18).

Aufgabe 10 mit Beispiel 22. Reduktion der Normaltemperatur parabolischer Bogen auf die mittlere Ortstemperatur (Coblenzer Brücke).

Es soll bei Herstelung eines künstlichen Horizontalschubes (vergl. Aufg. 9) die Normaltemperatur parabolischer Bogen auf die mittlere Ortstemperatur reduzirt werden. Als Normaltemperatur ist diejenige Temperatur anzusehen, für welche ohne Belastung bei normaler Spannweite der spannungslose Zustand eintreten würde.

Für einen parabolischen Bogen von konstantem $J \cos \varphi$ entsteht nach § 16, 7) 8) 9) durch beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung τ und eine Aenderung der Spannweite um Δl (für Zunahmen τ, Δl positiv) ein Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{(1+\varepsilon)\, 8 f l^3} \sum_0^l P a (l-a)(l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) + \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2}\left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l}\right). \qquad 1)$$

Die zur Erzeugung eines beliebigen künstlichen Horizontalschubs K nöthige Verminderung der Spannweite folgt hieraus:

$$v = \frac{(1+\varepsilon)\, 8 l f^2}{15 E c} K.$$

Die Temperatur t_1 bei Herstellung von K differiere um d^0 von der gewünschten Normaltemperatur, welche im Allgemeinen die mittlere Ortstemperatur sein wird. Behufs der verlangten Reduktion fügen wir dann vorstehender Verringerung die weitere zu:

$$v = \alpha l d,$$

sodass die ganze (z. B. durch Anziehen von Keilen herzustellende, vergl. indessen IV N) Verringerung der Spannweite beträgt:

$$v = \frac{(1+\varepsilon) 8 l f^2}{15 E c} K + \alpha l d. \qquad 2)$$

d hat einen positiven oder negativen Werth, je nachdem die Montirungstemperatur t_1 (bei Herstellung von K, v) über oder unter der gewünschten Normaltemperatur (mittleren Ortstemperatur) liegt.

Ist nun in der Folge τ_1 die Abweichung der wirklichen Temperatur t gegen die Montirungstemperatur t_1 (Fig. 74) und Δl eine etwaige weitere Aenderung der Spannweite, dann hat man nach 1) den ganzen von der Temperaturänderung und den Längenänderungen v, Δl herrührenden Horizontalschub:

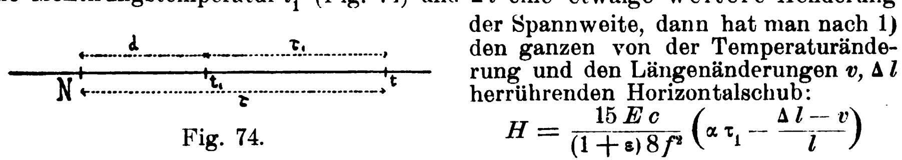


Fig. 74.

$$H = \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2}\left(\alpha \tau_1 - \frac{\Delta l - v}{l}\right)$$

oder mit v nach 2):

$$H = \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2}\left(\alpha (d + \tau_1) - \frac{\Delta l}{l}\right) + K.$$

Bezeichnet τ die Abweichung der wirklichen Temperatur τ gegen die gewählte Normaltemperatur, so ist in vorstehendem Ausdrucke:

$$\tau = d + \tau_1 \qquad 3)$$

und wir erhalten bei Hinzukommen einer beliebigen Belastung, d. h. im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{5}{(1+\varepsilon) 8 f l^3} \sum_0^l P a (l-a)(l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) + \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2}\left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l}\right) + K. \qquad 4)$$

Der Horizontalschub und alle Spannungen hängen ausser von der Belastung und dem festgesetzten künstlichen Horizontalschub K nur noch von der Temperaturänderung τ gegen die gewählte Normaltemperatur und etwaigen Aenderungen Δl der Spannweite nach Erzeugung von K, v ab.

Der künstliche Horizontalschub, welcher bei Herstellung der Ueberhöhung nach 1) mit Rücksicht auf 2) den Werth

$$K_1 = \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2} \frac{v}{l} = K + \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2} \alpha d \qquad 5)$$

hatte, erreicht nach 4) bei normaler Temperatur den vorausbestimmten Werth K, da sich ohne Belastung mit $\tau = 0$ und $\Delta l = 0$ $H = K$ ergibt. Bei Rückgängigmachung von v würde auch K wegfallen.

Will man die Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur ohne eine sonstige Ueberhöhung des Bogens vornehmen, so hat man mit $K = 0$ nach 2) 5):

$$v = \alpha l d, \qquad K_1 = \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2} \alpha d. \tag{6}$$

Will man dagegen einen künstlichen Horizontalschub K ohne Reduktion der Normaltemperatur erzeugen, d. h. die Montirungstemperatur als Normaltemperatur belassen, so liefern mit $d = 0$ dieselben Gleichungen:

$$v = \frac{(1+\varepsilon) 8 l f^2}{15 E c} K, \qquad K_1 = K. \tag{7}$$

Angenommen für die Coblenzer Brücke sei ein künstlicher Horizontalschub $K = 25777$ kg herzustellen gewesen (Aufg. 9), während die gewünschte Normaltemperatur 10^0 und die Montirungstemperatur 25^0 betrugen. Dann ist $d = 25 - 10 = 15^0$, und da nach Beisp. 16 für Meter als Längeneinheit:

$$\frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2} = 164\,648\,000,$$

so ergeben 2) 5) mit $l = 98{,}0775$ m, $\alpha = 0{,}000012$:

$$v = \left(\frac{25\,777}{164648000} + 0{,}000012 \,.\, 15\right) 98{,}0775 \text{ m} = 3{,}301 \text{ cm},$$

$$K_1 = 25\,777 + 164\,648\,000 \,.\, 0{,}000012 \,.\, 15 = 55414 \text{ kg}.$$

Für $K = 0$ hätten wir erhalten:

$$v = 1{,}765 \text{ cm}, \qquad K_1 = 29\,637 \text{ kg}.$$

Die Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur wurde zum erstenmal 1893 bei der König-Karlsbrücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt vorgenommen (IV *N*).

Beispiel 23. Horizontalschub eines Bogens mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Für den Bogen der Maria-Pia-Brücke über den Douro, welchem die in Fig. 75 und Tabelle S. 95 ersichtlichen Verhältnisse entsprechen, ist der Horizontalschub H zu berechnen: *a*) für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Meter; *b*) für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte; *c*) für beliebige Einzellasten P bei $a = 23{,}75$ m, $26{,}75$ m, 54 m, $64{,}4$ m, $74{,}8$ m, 80 m; *d*) für gleichzeitig wirkende Lasten von 63400 kg, 63400 kg, 62400 kg, 47000 kg, 40500 kg bei den fünf ersterwähnten a und den symmetrisch dazu gelegenen Stellen (der Verkehrslast bei Vollbelastung entsprechend); *e*) für eine beliebige Temperaturänderung τ; *f*) für eine Aenderung der Spannweite um Δl.

Mit Rücksicht auf die in der Tabelle S. 95 für den halben Bogen gegebenen Werthe und $l = 160$ m erhält man nach § 16, 17) 24):

$$v = l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} = 160 \,.\, 1000{,}92 = 160147,$$

$$w = 2 \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J} = 2 \,.\, 25643 = 51286,$$

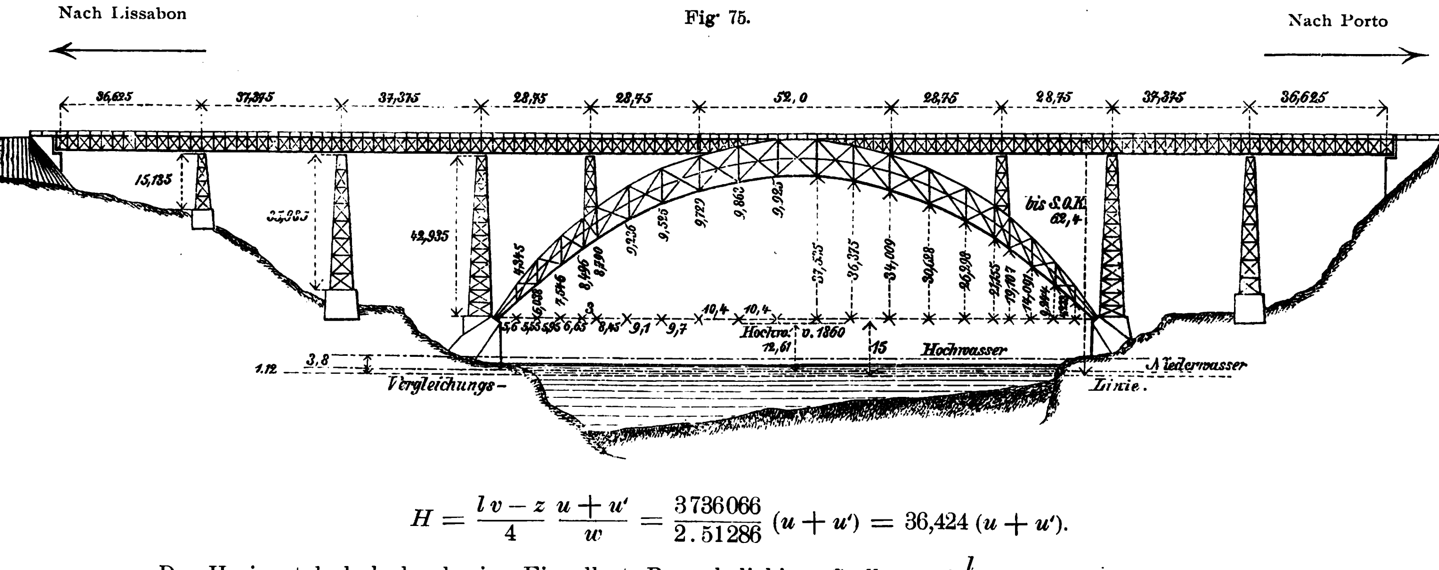
$$\frac{lv - z}{2} = l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x y^2}{J} = 160 \,.\, 34066 - 1714494 = 3736066.$$

Weiter folgen der Horizontalschub durch eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit nach § 16, 22):

$$H = \frac{lv - z}{2w} u = \frac{3736066}{51286} u = 72{,}848\, u,$$

Derselbe durch verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte nach § 16, 29):

Fig. 75.



$$H = \frac{l\,v - z}{4}\,\frac{u + u'}{w} = \frac{3736066}{2 \,.\, 51286}\,(u + u') = 36{,}424\,(u + u').$$

Der Horizontalschub durch eine Einzellast P an beliebiger Stelle $a < \frac{l}{2}$ drückt sich nach § 16, 32) aus:

$$H = \frac{P}{w}\left(\sum_{0}^{a} \frac{\sigma\,x\,y}{J} + a \sum_{a}^{1} \frac{\sigma\,y}{J}\right).$$

Wir erhalten danach, mit Rücksicht auf die Tabellenwerthe S. 95, für $a = 23{,}75$ m:

$$H = \frac{P}{51286}\,(4758 + 23{,}75 \,.\, 577{,}32) = 0{,}36012\,P,$$

für $a = 26{,}75$ m:

$$H = \frac{P}{51286}\,(5701 + 26{,}75 \,.\, 539{,}98) = 0{,}39281\,P,$$

für $a = 54$ m:

$$H = \frac{P}{51286}\,(17469 + 54 \,.\, 246{,}71) = 0{,}60038\,P,$$

Feld	x	y	σ	J	$\frac{\sigma y}{J}$	$\frac{\sigma y^2}{J}$	$\frac{\sigma x y}{J}$	$\frac{\sigma y x^2}{J}$
1	2,80	3,00	8,10	0,246	98,77	296	276	773
2	8,40	9,00	8,15	0,588	124,74	1123	1048	8803
3	14,10	14,55	8,15	1,153	102,85	1496	1450	20445
4	20,40	20,42	8,80	1,848	97,24	1986	1984	40474
5	25,25	24,20	3,80	2,463	37,34	904	943	23811
6	31,00	28,30	9,80	2,863	96,87	2741	3003	93093
7	39,75	32,75	10,05	3,486	94,42	3092	3753	149182
8	49,15	36,85	10.40	3,758	101,98	3758	5012	246340
9	59,20	40,35	10,75	4,220	102,79	4147	6085	360232
10	69,60	42,25	10,50	4,609	96,24	4066	6698	466181
11	80,00	42,65	2 . 5,25	4,696	2 . 47,68	2.2034	2.3814	2.305160
Für eine Bogenhälfte *			93,75		1000,92	25643	34066	1714494

für $a = 64{,}4$ m.

$$H = \frac{P}{51682} (23554 + 64{,}4 \,.\, 143{,}92) = 0{,}63999\ P.$$

für $a = 74{,}8$ m:

$$H = \frac{P}{51286} (30252 + 74{,}8 \,.\, 47{,}68) = 0{,}65941\ P,$$

für $a = 80$ m:

$$H = \frac{P}{51286}\ 34066 = 0{,}66424\ P,$$

Im vorliegenden Falle kann übrigens bei $a = 80$ m keine koncentrirte Last angreifen, weil sich daselbst kein Knotenpunkt befindet. Auch die unter *b)* erwähnte Belastung kann nicht wohl eintreten, weil der über den fünf mittleren Feldern liegende kontinuirliche Balken (Fig. 75) auch die Belastung einer Brückenhälfte über die Brückenmitte hinaus vertheilt. Für die Belastung *d)* ist der Horizontalschub mit Rücksicht auf die zuletzt berechneten H:

$$H = 2\,(0{,}36012 \,.\, 63400 + 0{,}39281 \,.\, 63400 + 0{,}60038 \,.\, 62400 + 0{,}63999 \,.\, 47000 + 0{,}65941 \,.\, 40500) = 283969 \text{ kg}.$$

Für eine beliebige Temperaturänderung τ wird nach § 16, 14):

$$H = \frac{l}{w} E \alpha \tau = \frac{160}{51286} E \alpha \tau = \frac{E \alpha \tau}{320{,}537}$$

und für eine Aenderung der Spannweite um Δl nach § 16, 15):

$$H = -\frac{E}{w} \Delta l = -\frac{E \Delta l}{51286}.$$

Wenn beispielsweise $E = 2000000$ kg per qcm, $\alpha = 0{,}000012$, dann liefert die erste Gleichung:

$$H = \frac{2000000 \,.\, 100^2 \,.\, 0{,}000012}{320{,}537} \tau = 748{,}744\, \tau \text{ kg},$$

und die zweite:

$$H = -\frac{2000000 \,.\, 100^2}{51286} \Delta l = -389970\, \Delta l \text{ kg},$$

worin Δl in Meter einzusetzen.

Ueber die Genauigkeit vorstehender Berechnung siehe § 32 und Beisp. 39. Vergl. auch Beisp. 40.

---

* Alle Zahlen gelten für Meter als Längeneinheit. Weiteres über die Verhältnisse des Dourobogens enthält die Tabelle in Beisp. 39, doch genügt das hier Gegebene für die Berechnung nach den Formeln für H in § 16.

Beispiel 24. Kämpferdrucklinie eines Bogens von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Die Kämpferdrucklinie der in Beisp. 23 betrachteten Dourobrücke festzustellen.

Nach § 16, 43) hat man bei vollständig symmetrischen Bogen auf der ersten Bogenhälfte für beliebige Abscissen a) die Ordinaten der Kämpferdrucklinie S:

$$b = \frac{a\,(l-a)}{\sum\limits_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum\limits_a^m \frac{\sigma y}{J}} \frac{w}{l}, \tag{1}$$

also mit $l = 160$ m und dem im vorigen Beispiel berechneten $w = 51286$ wegen

$$\frac{w}{l} = \frac{51286}{160} = 320{,}537$$

speziell für den Dourobogen:

$$b = \frac{a\,(160-a)}{\sum\limits_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum\limits_a^m \frac{\sigma y}{J}} 320{,}537.$$

Diese Gleichung liefert mit Rücksicht auf die in der Tabelle S. 95 gegebenen Werthe:

bei $a = 0$ m:
$$b = \frac{0\,.\,160}{0 \;+ 0\,.\,1000{,}92}\, 320{,}537 = 51{,}239 \text{ m},$$
bei $a = 20$ m:
$$b = \frac{20\,.\,140}{2774 + 20\,.\,674{,}56}\, 320{,}537 = 55{,}179 \text{ m},$$
bei $a = 40$ m:
$$b = \frac{40\,.\,120}{12457 + 40\,.\,348{,}69}\, 320{,}437 = 58{,}269 \text{ m},$$
bei $a = 60$ m:
$$b = \frac{60\,.\,100}{23554 + 60\,.\,143{,}92}\, 320{,}537 = 59{,}747 \text{ m},$$
bei $a = 80$ m:
$$b = \frac{80\,.\,80}{34066 + 80\,.\;\;0}\, 320{,}537 = 66{,}219 \text{ m}.$$

Da sich alle Ordinaten symmetrisch zur Mitte übertragen lassen, so konnte die Linie S hiernach verzeichnet werden (Fig. 76).

B e m e r k u n g e n. Für einen symmetrischen Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hat man nach § 16, 40):

$$b = \frac{8}{5} \frac{(1+\varepsilon) f l^2}{l^2 + l a - a^2 - \beta l^2}, \tag{2}$$

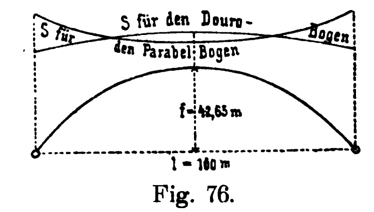


Fig. 76.

und mit den dem Dourobogen entsprechenden Werthen $l = 160$ m, $\varepsilon = 0{,}004287$, $\beta = 0{,}005447$ (vergl. Beisp. 39):

$$\frac{b}{f} = \frac{41135{,}6}{25460 + a\,(160-a)}.$$

Wir stellen die hieraus folgenden Werthe mit den oben erhaltenen zusammen

Für	$a =$	0	20	40	60	80 m:
Dourobogen	$\frac{b}{f} =$	1,201	1,294	1,366	1,401	1,412
Parabelbogen	$\frac{b}{f} =$	1,616	1,455	1,359	1,308	1,291.

Die Kämpferdrucklinie ist also im ersten Falle etwas konkav, im zweiten etwas konvex gegen die Verbindungsgerade der Stützpunkte. In Fig. 76 ist die Linie S für den Parabelbogen ebenfalls angedeutet.

Beispiel 25. Einsenkungen eines Bogens von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Die Einsenkungen in der Mitte des Bogens der in Beisp. 23 betrachteten Dourobrücke sollen berechnet werden: *a*) für eine gleichmässig vertheilte Last von u per Meter auf der ganzen Spannweite, und speziell für $u = 4800$ kg; *b*) für die in Beisp. 23 unter *d*) erwähnte Verkehrslast; *c*) für eine Temperaturänderung τ und speziell für $\tau = +30^0$; *d*) für eine Aenderung Δl der Spannweite und speziell für $\Delta l = 0{,}02$ m.

a) Für eine beliebige auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit hat man nach § 30, 9):

$$e = \frac{u}{2E}\left(l \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J} - \frac{2H}{u} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J}\right), \qquad 1)$$

also im vorliegenden Falle mit $l = 160$ m, $E = 2000000$ kg per qcm, H nach Beisp. 23 und den aus der Tabelle des Beispiels 39 zu entnehmenden Summenwerthen Σ:

$$e = \frac{u}{E}(80 \,.\, 47251 - 1287244 - 72{,}848 \,.\, 34066)$$

$$= \frac{11196\, u}{2000000 \,.\, 100^2} \text{ m} = 0{,}0000560\, u \quad \text{cm}.$$

wonach beispielsweise für $u = 4800$ kg:

$$e = 0{,}269 \text{ cm},$$

b) Für die unter B. 23, *d*) erwähnte symmetrische Verkehrsbelastung hat man bei

$a =$	23,75	26,75	54	64,4	74,8	m
$P =$	63400	63400	62400	47090	40500	kg.

Die hierdurch erzeugten Vertikalreaktionen der Kämpfer sind:

$$V = 2 \,.\, 63400 + 62400 + 47000 + 40500 = 276700 \text{ kg},$$

während der entsprechende Horizontalschub in Beisp. 23 berechnet wurde:

$$H = 283969 \text{ kg}.$$

Die Einsenkung in der Trägermitte durch eine beliebige symmetrische Belastung ist nach § 30, 8):

$$e = \frac{1}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x, \qquad 2)$$

worin nach § 16, 3):

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^m P(x-a), \qquad 3)$$

und im vorliegenden Falle für die Felder 1 bis 11 mit den aus der Tabelle S. 95 zu entnehmenden Koordinaten x, y:

$M_x = 276700 \,.\, 2{,}80 - 283969 \,.\, 3{,}00 = -\ 77147$
$276700 \,.\, 8{,}40 - 283969 \,.\, 9{,}00 = -\ 231441$
$276700 \,.\, 14{,}10 - 283969 \,.\, 14{,}55 = -\ 230279$
$276700 \,.\, 20{,}40 - 283969 \,.\, 20{,}42 = -\ 153967$
$276700 \,.\, 25{,}25 - 283969 \,.\, 24{,}20 - 63400 \,.\, 150 = 19525$
$276700 \,.\, 31{,}00 - 283969 \,.\, 28{,}30 - 63400\,(7{,}25 + 4{,}25) = -\ 187725$
$276700 \,.\, 39{,}75 - 283969 \,.\, 32{,}75 - 63400\,(16{,}00 + 13{,}00) = -\ 139760$
$276700 \,.\, 49{,}15 - 283969 \,.\, 36{,}85 - 63400\,(25{,}40 + 22{,}40) = 105021$
$276700 \,.\, 59{,}20 - 283969 \,.\, 40{,}35 - 63400\,(35{,}45 + 32{,}45) - 62400 \,.\, 5{,}2 = 293151$
$276700 \,.\, 69{,}60 - 283969 \,.\, 42{,}25 - 63400\,(45{,}85 + 42{,}85) - 62400 \,.\, 15{,}6 - 47000 \,.\, 5{,}2 = 419210$
$276700 \,.\, 80{,}00 - 283969 \,.\, 42{,}65 - 63400\,(56{,}25 + 53{,}25) - 62400 \,.\, 26{,}0 - 47000 \,.\, 15{,}6 - 40500 \,.\, 5{,}2 = 516222.$

Weiter erhalten wir nun mit Rücksicht auf die Tabelle des Beispiels 39 für Feld 1 bis 11:

$\frac{\sigma x}{J} M_x = -\ 92{,}20 \,.\, 77147 = -\ 7112953$
$-\ 116{,}43 \,.\, 231441 = -\ 26946676$
$-\ 99{,}66 \,.\, 230279 = -\ 22949605$
$-\ 97{,}14 \,.\, 153967 = -\ 14956354$

$$\frac{\sigma x}{J} M_x = \begin{array}{rcr} 38{,}96 \,.\, 19525 & = & 760694 \\ -106{,}11 \,.\, 187723 & = - & 19919288 \\ -114{,}60 \,.\, 139760 & = - & 16016496 \\ 136{,}00 \,.\, 105027 & = & 14283672 \\ 150{,}78 \,.\, 293151 & = & 44201308 \\ 158{,}55 \,.\, 419210 & = & 66465746 \\ 89{,}44 \,.\, 516222 & = & 46170896 \\ \hline \end{array}$$

$$\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x = 63980944,$$

also nach 2) die Einsenkung durch die fragliche Belastung:

$$e = \frac{63980944}{2000000 \,.\, 100^2} \text{ m} = 0{,}320 \text{ cm}.$$

c) Die Einsenkang durch eine beliebige Temperaturänderung τ liefert § 30, 10):

$$e = -\frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \alpha \tau f. \qquad 4)$$

Wir erhalten mit H nach Beisp. 23 und $f = 42{,}65$ m:

$$e = -\frac{\alpha \tau}{320{,}537} \, 34066 - 42{,}65 \, \alpha \tau = -148{,}928 \, \alpha \tau,$$

also für $\alpha = 0{,}000012$:

$$e = -0{,}001787 \, \tau \text{ m} = -0{,}1787 \, \tau \text{ cm},$$

und beispielsweise für $\tau = \pm 30^0$:

$$e = \mp 5{,}361 \text{ cm}.$$

d) Die durch eine Aenderung der Spannweite um Δl bewirkte Einsenkung ist nach § 30, 11):

$$e = -\frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J}, \qquad 5)$$

wonach in unserm Fall bei Beachtung von Beisp. 23:

$$e = \frac{\Delta l}{51286} \, 34066 = 0{,}6642 \, \Delta l,$$

und speziell für $\Delta l = 2$ cm:

$$e = 1{,}328 \text{ cm}.$$

Bemerkungen. Nach den Formeln für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hätten wir erhalten (Beisp. 42, vergl. indessen Beisp. 41):

im Falle *a*)	$e = 0{,}316$ cm	anstatt	$e = 0{,}269$ cm.
b)	$e = 0{,}299$ „	„	$e = 0{,}320$ „
c)	$e = 5{,}739$ „	„	$e = 5{,}361$ „
d)	$e = 1{,}459$ „	„	$e = 1{,}328$ „

Aufgabe 11 mit Beispiel 26. Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur bei Bogen mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Die in Aufgabe 10 verlangte Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur soll nun für symmetrische Bogen von beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten vorgenommen werden.

Wir gehen wie in Aufgabe 10 vor und ziehen wieder die gleichzeitige Erzeugung eines beliebigen künstlichen Horizontalschubes K in Betracht (vergl. am Schlusse von Aufg. 9, S. 91):

Durch eine beliebige Temperaturänderung τ und eine Aenderung Δl der Spannweite entsteht nach § 16, 14) 15) der Horizontalschub:

$$H = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{w} E. \qquad 1)$$

Zur Erzeugung eines künstlichen Horizontalschubes K ist also eine Verringerung der Spannweite um

$$v = \frac{w}{E} K$$

nöthig. Wir fügen derselben bei

$$v = \alpha l d,$$

unter $d = t_1 - t_n$ die Differenz der Montirungstemperatur t_1 und gewünschten Normaltemperatur t_n verstanden, womit die ganze vorzunehmende Verminderung der Spannweite beträgt:

$$v = \frac{w}{E} K + \alpha l d. \tag{2}$$

Ist dann in der Folge $\tau_1 = t - t_1$ die Abweichung der wirklichen Temperatur t gegen die Montirungstemperatur t_1 (vergl. Fig. 74), und Δl eine etwaige weitere Aenderung der Spannweite, dann liefert 1) den ganzen von der Temperaturänderung und den Längenänderungen v, Δl herrührenden Horizontalschub:

$$H = \frac{\alpha \tau_1 l - (\Delta l - v)}{w} E$$

oder mit 2), wenn wieder

$$\tau = t - t_n = d + \tau_1 \tag{3}$$

die Abweichung der wirklichen Temperatur t gegen die gewählte Normaltemperatur t_n bezeichnet (Fig. 74):

$$H = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{w} E + K, \tag{4}$$

wozu in jedem Falle noch der Horizontalschub durch die Belastung kommt, für welchen die Formeln § 16, 13) 22) 28) u. a. gelten. Es hängt also H nur von der Belastung, der Temperaturänderung τ gegen die gewünschte Normaltemperatur und etwaigen Aenderungen Δl der Spannweite nach Erzeugung von K, v ab.

Der künstliche Horizontalschub, welcher bei Herstellung der Ueberhöhung nach 1) mit Rücksicht auf 2) den Werth:

$$K_1 = \frac{v}{w} E = K + \frac{\alpha l d}{w} E \tag{5}$$

hatte, erreicht nach 4) für $\tau = 0$, $\Delta l = 0$ den verlangten Werth K. Mit Verschwinden der Verringerung v würde auch K wegfallen.

Will man die Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur ohne sonstige Ueberhöhung des Bogens vornehmen, so hat man mit $K = 0$ nach 2) 5):

$$v = \alpha l d, \qquad K_1 = \frac{\alpha l d}{w} E. \tag{6}$$

Will man dagegen einen künstlichen Horizontalschub K ohne Reduktion der Normaltemperatur erzeugen, so liefern jene Gleichungen mit $d = 0$:

$$v = \frac{w}{E} K, \qquad K_1 = K. \tag{7}$$

Dem Bogen der Dourobrücke von $l = 160$ m entspricht nach Beisp. 23 für Meter als Längeneinheit $w = 51286$. Ist nun die gewünschte Normaltemperatur 10°, die Montirungstemperatur $t_1 = 25°$, so hat man $d = 25 - 10 = 15°$ und mit $E = 2000000$ kg per qcm, $\alpha = 0{,}000012$:

$$\alpha l d = 0{,}000012 \,.\, 160 \,.\, 15 = 0{,}02880 \text{ m},$$

$$\frac{E}{w} = \frac{2000000 \,.\, 100^2}{51286} = 386970,$$

sodass wir nach 2) 5) erhalten:

$$v = \frac{K}{389970} + 0{,}0288 \text{ m},$$

$$K_1 = K + 11231 \text{ kg}.$$

Für $K = 0$ würden:

$$v = 2{,}88 \text{ cm}, \qquad K_1 = 11231 \text{ kg}.$$

§ 17. Einfache Bogen ohne Gelenke.

Der Bogen besitze keine Gelenke, doch liegen die Axpunkte der Endquerschnitte in gleicher Höhe, sodass $k = 0$ ist (Fig. 77, 78). Wir haben dann nach § 1, 4)—6) für die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V = \frac{1}{l}\left[M' - M + \sum_0^1 P(l-a)\right], \qquad 1)$$

$$V' = \frac{1}{l}\left[M - M' + \sum_0^1 Pa\right], \qquad 2)$$

$$V + V' = \sum_0^1 P, \qquad 3)$$

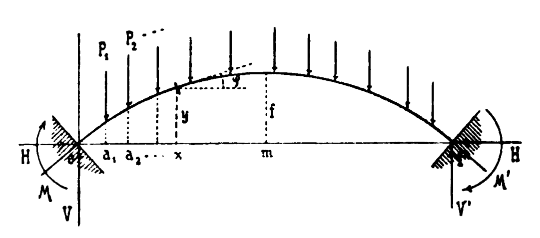


Fig. 77.

während der Horizontalschub H und die Endmomente M, M' durch die Statik allein nicht bestimmt sind und mit Rücksicht auf die Formänderungen ermittelt werden müssen. Sie werden dann von der Form der Bogenaxe und der Veränderlichkeit des Querschnittes abhängig (s. unten).

Das Moment und die Vertikalkraft in einem beliebigen Querschnitt x sind nach § 1, 3) 8) und 2) 7):

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a)$$

$$= \frac{l-x}{l}\left[M + \sum_0^x Pa\right] + \frac{x}{l}\left[M' + \sum_x^1 P(l-a)\right] - Hy, \qquad 4)$$

$$V_x = V - \sum_0^x P$$

$$= \frac{1}{l}\left[M' - M - \sum_0^x Pa + \sum_x^1 P(l-a)\right], \qquad 5)$$

während die Normalkraft bei x wie immer ausgedrückt ist:

$$N_x = V_x \sin\varphi + H\cos\varphi. \qquad 6)$$

Fig. 78.

Auch die in §§ 1, 8 gegebenen Ausdrücke der Transversalkraft T_x, resultirenden Schnittkraft R_x, Normalspannungen σ, σ_o, σ_u bleiben ungeändert, sodass z. B. bei vollwandigen Bogen von symmetrisch zur Axschicht liegenden Querschnitten die Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement (zwischen welchen die Werthe aller übrigen σ des Querschnitts liegen):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \qquad 7)$$

unter F den nutzbaren Querschnitt bei x, unter W dessen Widerstandsmoment verstanden.

Verschiedene Formen.

Bezüglich der Gleichungen und Richtungswinkel der Bogenaxe in den wichtigsten Fällen wird wieder auf § 15 verwiesen. Da bei Bogen ohne Gelenke eine so weitgehende Veränderlichkeit des Querschnitts wie

bei Bogen mit Kämpfergelenken nicht vorkommt (Sichelbogen sind ausgeschlossen), und dieselben, abgesehen von Gewölben, überhaupt seltener ausgeführt werden, so geben wir in diesem § die speziellen Formeln nur für symmetrische Parabelbogen von konstantem (mittleren) $J \cos \varphi$. Die betreffenden Ableitungen sind in §§ 29, 30 zu finden. Ueber Bogen ohne Gelenke von beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten siehe §§ 33, 34, 35, über Gewölbe §§ 18, 19.

Für symmetrische Parabelbogen vom Mittelwerthe c des Ausdrucks $J \cos \varphi$ hat man nach § 29, 24)—26) die durch eine beliebige Belastung erzeugten Werthe von H, M, M':

$$H = \frac{15}{(1+6\varepsilon)\, 4 f l^3} \sum_0^1 P a^2 (l-a)^2, \tag{8}$$

$$M = \frac{1}{(1+6\varepsilon)\, 2 l^3} \sum_0^1 P a (l-a)^2 (5a - 2l - 12\varepsilon l), \tag{9}$$

$$M' = \frac{1}{(1+6\varepsilon)\, 2 l^3} \sum_0^1 P a^2 (l-a)(3l - 5a - 12\varepsilon l). \tag{10}$$

An Stelle der beiden letzten Formeln kann man auch schreiben:

$$M = H\frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2} \sum_0^1 P a (l-a)^2, \tag{11}$$

$$M' = H\frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2} \sum_0^1 P a^2 (l-a), \tag{12}$$

während nach 1) 2) die Vertikalreaktionen der Kämpfer sich mit 11) 12) auch ausdrücken lassen:

$$V = \frac{1}{l^3} \sum_0^1 P (l + 2a)(l-a)^2, \tag{13}$$

$$V' = \frac{1}{l^3} \sum_0^1 P (3l - 2a)\, a^2. \tag{14}$$

Eine beliebige Temperaturänderung τ bewirkt (für Zunahme τ positiv):

$$H = \frac{Ec}{1+6\varepsilon} \frac{45}{4f^2} \alpha \tau, \tag{15}$$

$$M = M' = \frac{Ec}{1+6\varepsilon} \frac{15}{2f} \alpha \tau = H \frac{2f}{3}. \tag{16}$$

Durch kleine Verrückungen und Verdrehungen der Bogenenden, mit welchen jedoch kein Abheben der Endquerschnitte von den Kämpfern verbunden sein darf, würden entstehen:

$$H = -\frac{15 Ec}{(1+6\varepsilon)\, 2 l f} \left(\frac{3 \Delta l}{2f} + \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1\right), \tag{17}$$

$$M = -\frac{3 Ec}{(1+6\varepsilon)\, l} \Bigg(\frac{5 \Delta l}{2f} - \frac{2 \Delta k}{l} + 3 \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1 - 4\varepsilon \left(\frac{3 \Delta k}{l} - 2 \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1\right)\Bigg), \tag{18}$$

$$M' = -\frac{3 Ec}{(1+6\varepsilon)\, l} \Bigg(\frac{5 \Delta l}{2f} + \frac{2 \Delta k}{l} - 3 \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_0 + 4\varepsilon \left(\frac{3 \Delta k}{l} - 2 \Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0\right)\Bigg). \tag{19}$$

Wenn jedoch nur eine Aenderung Δl der Spannweite (bei Zunahme Δl positiv) oder doch sonstige Bewegungen der Stützen nur derart stattgefunden haben, dass $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l}$ ist (vergl. Bemerkungen zu § 29, 21)), so werden einfacher:

$$H = -\frac{Ec}{1+6\varepsilon}\frac{45}{4f^2}\frac{\Delta l}{l}, \tag{20}$$

$$M = M' = -\frac{Ec}{1+6\varepsilon}\frac{15}{2f}\frac{\Delta l}{l} = H\frac{2f}{3}. \tag{21}$$

In vorstehenden Gleichungen wie im Weiteren gilt für ε das am Schlusse von § 15 Gesagte, während die in § 16 noch berücksichtigte, aber auch dort fast immer zu vernachlässigende Grösse β angesichts der bei Bogen ohne Gelenke geringeren erreichbaren Genauigkeit weggeblieben ist. Zur Berücksichtigung derselben wären die Gleichungen § 29, 21)—23) anstatt der vorstehenden zu verwenden. Mit $f = 0$ wird $\varepsilon = \infty^2$, $H = 0$ und gehen alle obigen Gleichungen in die für horizontale Balken mit eingespannten Enden gültigen über.

Nach 15) ist der von einer Temperaturänderung τ herrührende Horizontalschub bei Bogen ohne Gelenke im Allgemeinen etwa sechsmal so gross als bei Bogen mit Kämpfergelenken allein, während bei Dreigelenkbogen überhaupt kein Horizontalschub durch Temperaturänderungen entsteht. Analoges gilt für eine Aenderung Δl der Spannweite.

Verschiedene Belastungen.

Die bis jetzt abgeleiteten Formeln gelten bei beliebiger Belastung. Eine Spezialisirung derselben für stetig vertheilte Lasten kann mit Rücksicht auf § 14 erfolgen.

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit erhält man:

$$V = V' = \frac{ul}{2}, \tag{22}$$

$$V_x = u\left(\frac{l}{2} - x\right), \tag{23}$$

$$M_x = M - Hy + \frac{u}{2}x(l-x), \tag{24}$$

worin für Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$:

$$H = \frac{1}{1+6\varepsilon}\frac{ul^2}{8f}, \tag{25}$$

$$M = M' = -\frac{\varepsilon}{1+6\varepsilon}\frac{ul^2}{2} = -4\varepsilon f H. \tag{26}$$

Wirken dagegen auf die erste und zweite Trägerhälfte verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit, so gelten für Querschnitte x auf der ersten Trägerhälfte (die Behandlung dieser genügt für praktische Berechnungen):

$$V_x = V - u\,x, \tag{27}$$

$$M_x = M + Vx - Hy - \frac{u\,x^2}{2}, \tag{28}$$

während für Parabelbogen von konstantem $J \cos\varphi$:

$$V = \frac{13\,u + 3\,u'}{32}\,l, \qquad V' = \frac{3\,u + 13\,u'}{32}\,l \tag{29}$$

$$H = \frac{u + u'}{1 + 6\,\varepsilon}\,\frac{l^2}{16\,f}, \tag{30}$$

$$M = \frac{u' - u - 2\,\varepsilon\,(11\,u + 5\,u')}{1 + 6\,\varepsilon}\,\frac{l^2}{64}, \tag{31}$$

$$M' = \frac{u - u' - 2\,\varepsilon\,(5\,u + 11\,u')}{1 + 6\,\varepsilon}\,\frac{l^2}{64}, \tag{32}$$

Für eine beliebige zur Trägermitte symmetrische Belastung erhält man aus 1) 2) mit $M = M'$ und 8) 11) 12) auf dem in § 15 (S. 60) gezeigten Wege:

$$V = V' = \sum_0^m P, \tag{33}$$

$$H = \frac{15}{(1 + 6\,\varepsilon)\,2\,f\,l^3}\sum_0^m P\,a^2\,(l-a)^2, \tag{34}$$

$$M = M' = H\,\frac{2\,f}{3} - \frac{1}{l}\sum_0^m P\,a\,(l-a). \tag{35}$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrirte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie zufolge nur die Hälfte derselben in $\sum_0^m$ aufzunehmen.

Ist die Bogenaxe wirklich parabolisch, nicht nur so annähernd, dass man die für parabolische Bogen gültigen Ausdrücke von H, M, M' verwendet, dann folgt aus 24) mit 25) 26) und § 15, 8) für eine gleichmässig vertheilte Last u auf der ganzen Spannweite:

$$M_x = \frac{3\,\varepsilon\,u}{1 + 6\varepsilon}\left[x\,(l-x) - \frac{l^2}{6}\right], \tag{36}$$

und aus 28) mit 29)—32) und § 15, 8) für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$M_x = \frac{u' - u - 12\,\varepsilon\,u}{(1 + 6\,\varepsilon)\,64}\,(l-2\,x)\,(l-8\,x) - \frac{(u + u')\,\varepsilon\,l}{(1 + 6\,\varepsilon)\,32}\,(5\,l - 18\,x), \tag{37}$$

worin die Brüche konstante, für alle x gültige Werthe haben. Bei Vernachlässigung von ε würde aus 36):

$$M_x = 0,$$

und aus 37) auf der ersten Trägerhälfte:

$$M_x = \frac{u' - u}{64}\,(l-2\,x)\,(l-8\,x),$$

sodass die Stützlinie (§ 8) im ersten Falle der Stabaxe nahe liegt und im zweiten Falle die letztere nahe bei $x = \frac{l}{8}, \frac{l}{2}$ und $\frac{7\,l}{8}$ schneidet.

Kämpferdrucklinie. Umhüllungslinien. Kernlinien.

Die Gleichung der Kämpferdrucklinie S ist nach § 2, 1) allgemein:

$$b = \frac{M + Va}{H}, \tag{38}$$

worin H, M, V einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen. Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hat man nach 8) 9) 13):

$$H = \frac{15 P}{(1 + 6\varepsilon) 4 f l^3} a^2 (l - a)^2,$$

$$M = \frac{P}{(1 + 6\varepsilon) 2 l^3} a (l - a)^2 (5a - 2l - 12 \varepsilon l),$$

$$V = \frac{P}{l^3} (l + 2a)(l - a)^2.$$

Durch Substitution dieser Ausdrucke in 38) ergibt sich die Gleichung von S für den vorliegenden Fall:

$$b = \frac{3 + 8\varepsilon}{5} 2f. \tag{39}$$

Die Linie ist also eine horizontale Gerade, welche für die gewöhnlichen kleinen ε nur wenig höher als $\frac{f}{5}$ über dem Scheitel der Bogenaxe hinläuft.

Für die Abscisse u und Ordinate v eines Punktes der Umhüllungslinie U der Kämpferdrücke R hat man nach § 2) 4) 5):

$$u = \frac{H\,dM - M\,dH}{V\,dH - H\,dV}, \qquad v = \frac{V\,dM - M\,dV}{V\,dH - H\,dV}, \tag{40}$$

worin wieder H, M, V, einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen, und die Differentiale sich auf ein variables a beziehen. Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ sind die Ausdrücke von H, M, M' oben vor 39) angeschrieben, sie liefern:

$$dH = \frac{15 P}{(1 + 6\varepsilon) 2 f l^3} a (l - a)(l - 2a)\, da,$$

$$dM = -\frac{15 P}{(1 + 6\varepsilon) 2 f l^3} (l - a)(l^2 - 8la + 10a^2 + 6\varepsilon l (l - 3a))\, da,$$

$$dV = -\frac{6 P}{l^3} a (l - a)\, da.$$

Wir erhalten damit aus 40) für den der Lastlage a entsprechenden Berührungspunkt der Umhüllungslinie U (vergl. Fig. 13 auf S. 9):

$$u = \frac{a}{l + a} \frac{l}{2}, \tag{41}$$

$$v = -\frac{(1 + 6\varepsilon) l^2 - 5a(l + a)}{a(l + a)} \frac{2f}{15}. \tag{42}$$

Eliminirt man mittelst der ersten dieser Gleichungen a aus der zweiten, so ergibt sich die Gleichung der Umhüllungslinie U in gewöhnlicher Form, als Beziehung zwischen den beiden Koordinaten:

$$v = \frac{2f}{3} - \frac{1+6\varepsilon}{15}\frac{f}{lu}(l-2u)^2. \tag{43}$$

Die Linie ist eine Hyperbel, und da nach 43):

$$\frac{dv}{du} = \frac{1+6\varepsilon}{15}\frac{f}{l}\left(\frac{l^2}{u^2} - 4\right), \tag{44}$$

so erhält man:

für	$u = 0$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2}$	l
	$v = -\infty$	$\frac{3-2\varepsilon}{5}f$	$\frac{2}{3}f$	$\frac{3-2\varepsilon}{5}f$
	$\frac{dv}{du} = \infty$	$\frac{1+6\varepsilon}{5}\frac{4f}{l}$	0	$-\frac{1+6\varepsilon}{5}\frac{f}{l}$.

Indessen wird die Linie nur von $u = 0$ bis $u = \frac{l}{4}$ gebraucht, da nach 41) der Berührungspunkt des Kämpferdrucks R für $a = 0$ bei $u = 0$ und für $a = l$ bei $u = \frac{l}{4}$ liegt. Die Umhüllungslinie U' der Kämpferdrücke R' liegt bezüglich der Vertikalen durch die Trägermitte symmetrisch zur Umhüllungslinie U, mit horizontaler Tangente in dieselbe übergehend (Fig. 79).

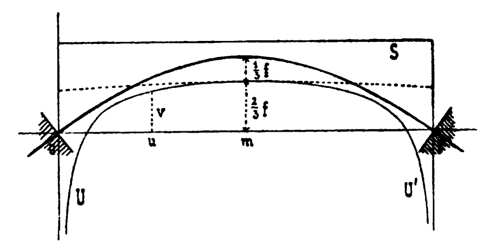


Fig. 79.

Mit Rücksicht auf den Zweck der Linien S, U, U' und den geringen Einfluss der Lasten in der Nähe der Grenzpunkte positiver und negativer Beitragsstrecken könnte, falls die Berechnung damit erleichtert wird, häufig ε in 39)—44) vernachlässigt werden. Für $f = 0$ jedoch hat man nach § 15, 40) $\varepsilon = \infty^2$ und damit:

$$b = \infty, \qquad v = -\infty, \qquad \frac{dv}{du} = \infty,$$

die Stützenreaktionen sind vertikal (vergl. Fig. 13, S. 9).

Bezüglich der Kernlinien gilt das in § 7 Gesagte, sodass z. B. bei symmetrisch zur Axschicht liegenden Querschnitten die Entfernungen des oberen und unteren Kernpunktes von der Axe:

$$k_o = k_u = \frac{W}{F}, \tag{45}$$

während die Kernlinien bei vernachlässigter Füllung (Gitterbogen etc.) mit den Gurtungsschwerlinien zusammenfallen.

Grenzwerthe bei bewegter Last.

Es gilt das in § 15 Gesagte, nur dass an Stelle der Geraden aus beiden Kämpfergelenken Tangenten an die Umhüllungslinien U, U' und an Stelle der Fig. 61—63 die Fig. 40, 41, 39 treten. Bezüglich des Einflusses der Temperaturänderungen ist wie in § 16 zu verfahren, doch hat man zu

berücksichtigen, dass jetzt durch Temperaturänderungen neben einem Horizontalschub H auch Endmomente M, M' entstehen.

Durch beliebigen H, M, M' allein werden nach 4) 6) bei x erzeugt:

$$M_x = M - Hy, \qquad N_x = H\cos\varphi. \tag{46}$$

Die entsprechenden Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement sind in dem gewöhnlichen Falle symmetrisch zur Axschicht liegender Querschnitte nach 7):

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos\varphi}{F} - \frac{y - \frac{M}{H}}{W}\right)H, \tag{47}$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\cos\varphi}{F} + \frac{y - \frac{M}{H}}{W}\right)H, \tag{48}$$

Bei Frmittelung des Einflusses der Temperaturänderungen ist hierin nach 16) und § 34, 34) $\frac{M}{H}$ von H unabhängig, sodass die Grenzwerthe von σ_o, σ_u zugleich mit den Grenzwerthen von H, d. h. nach 15) und § 34, 33) zugleich mit den Grenzwerthen von τ eintreten.

Die Gleichungen 46)—48) bestimmen auch die durch Lagenänderungen der Trägerenden bedingten Beanspruchungen. Treten nur eine Aenderung Δl der Spannweite und eine Aenderung Δk der ursprünglich gleichen Höhenlage der Stützen, keine sonstige Drehung der Endquerschnitte und kein Abheben derselben von den Widerlagern ein, dann sind nach 21) und § 34, 39) wieder $\frac{M}{H}$ konstant und σ_o, σ_u proportional H oder Δl.

Formänderungen.

Wie bei Bogen mit zwei Gelenken führen wir nur die Einsenkungen parabolischer Bogen von konstantem $J\cos\varphi$ in der Trägermitte an, und verweisen hinsichtlich der sonstigen Formänderungen parabolischer Bogen auf § 30, bezüglich der Formänderungen von Bogen mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten auf die §§ 26, 33.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$ erhält man nach der Ableitung in § 30 mit Beachtung von 11) und 12) die von einer beliebigen Belastung herrührende Einsenkung in der Mitte:

$$e = \frac{1}{48\,E\,c}\left[\sum_0^m P(l-2\,a)^3 - \sum_0^l P(l-a)\,(l^2 - 5\,l\,a + 4\,a^2) - H f\,l^2\right] \tag{49}$$

worin H durch 8) bestimmt. Speziell für eine zur Trägermitte symmetrische Belastung hat man:

$$e = \frac{1}{24\,E\,c}\left[\sum_0^m P a^2 (3\,l - 4\,a) - \frac{1}{2}\,H f\,l^2\right]. \tag{50}$$

Liegt gerade in der Mitte eine koncentrirte Last, dann ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in $\sum_0^m$ aufzunehmen, wonach z. B. für eine Einzellast P in der Trägermitte:

$$e = \frac{1 + 96\,\varepsilon}{1 + 6\,\varepsilon}\,\frac{P\,l^3}{3072\,E\,c}. \tag{51}$$

Von 50) kann auch bei unsymmetrischer Belastung Gebrauch gemacht werden, wenn man berücksichtigt, dass die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige Belastung halb so gross als durch eine mittelst Verdoppelung dieser Belastung hergestellte symmetrische Belastung ist (vergl. Beisp. 29, auch 41, 42, 44).

Die Werthe der Summenausdrücke Σ für stetig vertheilte Lasten sind aus § 14 zu entnehmen. Wir erhalten dann für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit aus 50) mit Rücksicht auf 25):

$$e = \frac{\varepsilon}{1+6\varepsilon}\frac{u\,l^4}{64\,E\,c}, \qquad 52)$$

und für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte aus 49) mit Rücksicht auf 30):

$$e = \frac{\varepsilon}{1+6\varepsilon}\frac{u+u'}{128}\frac{l^4}{E\,c}, \qquad 53)$$

welche Gleichung mit $u' = u$ wieder auf 52) führt und auch aus dieser Gleichung hätte erhalten werden können.

Formel 50) liefert für $H = 0$ und Formel 51) sowie 52) für $f = 0$, $\varepsilon = \infty^2$ bekannte Ausdrücke für Balken mit eingespannten Enden (s. Citat S. 85). Bei Vernachlässigung von ε würde diese nothwendige Uebereinstimmung wegfallen und z. B. in den Fällen 52) 53) $e = 0$ werden.

Eine Temperaturänderung τ (bei Zunahme τ positiv) erzeugt die Einsenkung:

$$e = -\frac{l^2}{48\,E\,c}(5\,Hf - 6\,M) - \alpha\tau f \qquad 54)$$

mit H, M nach 15) 16). Durch Einsetzen dieser Ausdrücke folgt:

$$e = -\alpha\tau\left(f + \frac{15}{64f}\frac{l^2}{1+6\varepsilon}\right). \qquad 55)$$

Durch irgendwelche Verrückungen und Verdrehungen der Bogenenden (ohne Abheben von den Kämpfern) würde entstehen:

$$e = \frac{l^2}{16\,E\,c}\left(M + M' - \frac{5}{3}\,Hf\right) - \frac{\Delta k}{2} \qquad 56)$$

mit H, M, M' nach 17)—19). Wenn jedoch nur eine Aenderung Δl der Spannweite (bei Zunahme Δl positiv) und eine Aenderung Δk der ursprünglich gleichen Höhenlage der Stützen stattgefunden hat (bei höherer Stütze l ist Δk positiv), so folgt mit 20) 21):

$$e = \frac{15\,l}{64f}\frac{\Delta l}{1+6\varepsilon} - \frac{\Delta k}{2}. \qquad 57)$$

Für Näherungsrechnungen kann in 54)—57) vielfach ε vernachlässigt werden.

Beispiel 27. Stützenreaktionen eines parabolischen Bogens (auch Gewölbes) ohne Gelenke.

Für einen parabolischen Bogen ohne Gelenke seien die Spannweite $l = 23{,}758$ m, der Pfeil der Axe $f = 4{,}502$ m und in den Formeln für den Horizontalschub H und die Endmomente M, M', $\varepsilon = 0{,}002590$, sowie für Meter als Längeneinheit $c = 0{,}035780$. Es sind H, M, M' und die Vertikalreaktionen V, V' der Kämpfer zu ermitteln: *a*) für das Eigengewicht des Bogens allein, welchem die in der

folgenden Tabelle I eingetragenen Lasten P bei den angeschriebenen Abscissen a und symmetrisch zu diesen Stellen (bezüglich einer Vertikalen durch die Trägermitte) entsprechen; *b*) durch beliebige Lasten P bei Abscissen $a = 0{,}629$ m, 2,879 m, 5,129 m, 7,379 m, 9,629 m, 11,879 m, *c*) durch beliebige Verkehrsbelastungen, zusammengesetzt aus Einzellasten an den unter *b*) angeführten und symmetrisch zu denselben gelegenen Stellen; *d*) durch eine beliebige Temperaturänderung τ; *e*) für eine Aenderung $\Delta\, l$ der Spannweite ohne sonstige Bewegungen der Kämpfer, oder doch nur solche, für welche $\Delta\, \varphi_0 = \Delta\, \varphi_1 = \frac{\Delta\, k}{l}$ ist.

a) Eigengewicht. Für eine beliebige zur Mitte symmetrische Belastung hat man nach § 17, 34) 35):

$$H = \frac{15}{(1+6\,\varepsilon)\,2\,f\,l^3} \sum_0^m P\,a^2\,(l-a)^2, \tag{1}$$

$$M = M' = H\frac{2f}{3} - \frac{1}{l}\sum_0^m P\,a\,(l-a), \tag{2}$$

$$V = V' = \sum_0^m P, \tag{3}$$

worin im vorliegendem Falle:

$$\frac{15}{(1+6\,\varepsilon)\,2\,f\,l} = \frac{1}{1{,}01554\,.\,2\,.\,4{,}502\,.\,23{,}758} = \frac{1}{14{,}4828}.$$

Mit Rücksicht auf die in der folgenden Tabelle I angeführten Werthe ergeben sich also durch das Eigengewicht allein:

$$H = \frac{1}{14{,}4828}\left(897048 - \frac{2\,.\,7712459}{23{,}758} + \frac{77710843}{23{,}758^2}\right) = 25882 \text{ kg},$$

$$M = M' = 25882\,\frac{2\,.\,4{,}502}{3} - 121464 + \frac{897048}{23{,}758} = -\ 6026 \text{ mk},$$

$$V = V' = 24095 \text{ kg}.$$

Parabolischer Bogen ohne Gelenke. Tabelle I. Eigengewicht.

a in m	P in kg	Pa	Pa^2	Pa^3	Pa^4
0,314	2117	665	209	66	21
1,192	3339	3980	4744	5655	6741
2,317	2898	6715	15559	36050	83528
3,442	2571	8849	30458	104836	360846
4,567	2296	10486	47890	218714	998867
5,692	2081	11845	67422	383766	2184396
6,817	1923	13109	89364	609194	4152875
7,942	1818	14439	114675	910749	7233169
9,067	1739	15768	142968	1296291	11753470
10,192	1676	17082	174100	1774427	18084960
11,317	1637	18526	209659	2372711	26851970
	24095	121464	897048	7712459	77710843

b) Beliebige Einzellasten. Nach § 17, 8) 11) 12) 1) 3) gelten für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a:

$$\frac{H}{P} = \frac{15}{(1+6\,\varepsilon)\,4\,f\,l^3}\,a^2\,(l-a^2), \tag{4}$$

$$\frac{M}{P} = \frac{H}{P}\frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2}\,a\,(l-a)^2, \qquad \frac{M'}{P} = \frac{H}{P}\frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2}\,a^2\,(l-a). \tag{5}$$

$$\frac{V}{P} = \frac{1}{l}\left(l-a+\frac{M'-M}{P}\right), \qquad \frac{V'}{P} = 1 - \frac{V}{P}. \tag{6}$$

worin in unserm Falle:

$$\frac{15}{(1+6\varepsilon)\,4fl^3} = \frac{1}{14,8428\,.\,23,758^2} = \frac{1}{16349}.$$

Mit Rücksicht auf die in der nachstehenden Tabelle II zusammengestellten Werthe erhalten wir für $a = 0,629$ m:

$$\frac{H}{P} = \frac{211,84}{16349} = 0,01296,$$

$$\frac{M}{P} = 0,01296\,\frac{2\,.\,4,502}{3} - \frac{336,48}{23,758^2} = -\,0,55723,$$

$$\frac{M'}{P} = 0,01296\,\frac{2\,.\,4,502}{3} - \frac{9,16}{23,758^2} = 0,02267,$$

$$\frac{V}{P} = \frac{23,129+0,57990}{23,758} = 0,9979,$$

$$\frac{V'}{P} = 1-0,9979 = 0,0021.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 8 bis 12 von Tabelle II berechnet.

Parabolischer Bogen ohne Gelenke. Tabelle II. Einzellasten.

a in m	$l-a$ in m	a^2	$(l-a)^2$	$a(l-a)^2$	$a^2(l-a)$	$a^2(l-a)^2$	$\frac{H}{P}$	$\frac{M}{P}$	$\frac{M'}{P}$	$\frac{V}{P}$	$\frac{V'}{P}$
0,629	23,129	0,396	534,951	336,48	9,16	211,84	0,0130	− 0,5572	0,0227	0,9979	0,0021
2,879	20,879	8,289	435,933	1255,05	173,07	3613,45	0,2210	− 1,5602	0,3567	0,9595	0,0405
5,129	18,629	26,307	347,040	1779,97	490,07	9129,58	0,5584	− 1,4775	0,8078	0,8803	0,1197
7,379	16,379	54,450	268,272	1979,58	891,84	14607,41	0,8935	− 0,8255	1,1015	0,7705	0,2295
9,629	14,129	92,718	199,629	1922,23	1310,01	18509,20	1,1321	− 0,0077	1,0770	0,6404	0,3596
11,879	11,879	141,111	141,111	1676,26	1676,26	19912,31	1,2179	0,6857	0,6857	0,5000	0,5000
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

c) Beliebige Verkehrsbelastungen. Um die H, M, M', V, V' für irgendwelche gleichzeitig wirkende Lasten P zu erhalten, braucht man nur deren Werthe für die einzeln P zu addiren. Wirken z. B. auf der ersten Trägerhälfte bei $a = 0{,}629$ m und $a = 11{,}879$ m gleiche Lasten $\frac{P}{2}$, bei den übrigen in Tabelle II angeführten a gleiche Lasten P, so erhält man aus Kolumne 8 der Tabelle:

$$H = P\left(\frac{0{,}0130}{2} + 0{,}2210 + 0{,}5584 + 0{,}8935 + 1{,}1321 + \frac{1{,}2179}{2}\right) = 3{,}4204\ P,$$

und in analoger Weise aus den Kolumnen 9 bis 12:

$$M = -\ 3{,}8067\ P, \qquad M' = 3{,}6972\ P,$$
$$V = 3{,}9996\ P, \qquad V' = 1{,}0004\ P,$$

also beispielsweise für $P = 3430$ kg:

$$H = 11732 \text{ kg}, \qquad M = -\ 13057 \text{ mk}, \qquad M' = 12681 \text{ mk},$$
$$V = 13719 \text{ kg}, \qquad V' = 3431 \text{ kg}.$$

Liegen die besprochenen Lasten, symmetrisch zur Trägermitte übertragen, auf der zweiten Trägerhälfte, so gelten:

$$H = 3{,}4204\ P,$$
$$M = 3{,}6972\ P, \qquad M' = -\ 3{,}8067\ P,$$
$$V = 1{,}0004\ P, \qquad V' = 3{,}9996\ P,$$

und wirken die erwähnten Lasten gleichzeitig auf beiden Bogenhälften, womit auch die Last in der Bogenmitte den Werth P erlangt, dann folgen:

$$H = 2 \,.\, 3{,}4204\ P = 6{,}8408\ P,$$
$$M = M' = -\ 3.8067\ P + 3{,}6972\ P = -\ 0{,}1095\ P,$$
$$V = V' = 3{,}9996\ P + 1{,}0004\ P = 5\ P.$$

Sind die betrachteten Grössen für die angenommenen Verkehrsbelastungen und das Eigengewicht zusammen zu bestimmen, so hat man den jetzt berechneten Werthen die unter *a*) erhaltenen zu addiren.

Anstatt wie hier aus den Beiträgen der Einzellasten hätte man die $H, M, M', V\ V'$ auch wie unter *a*) sofort für die ganze angenommene Belastung ermitteln können, wobei im Falle symmetrischer Belastung wieder die Formeln 1)—3), im Falle unsymmetrischer Belastung aber die Formeln § 17, 8) 9) 10) 1) 3) zu verwenden gewesen wären. Wenn es sich jedoch um Berechnung von Grenzwerthen auf Grund der ungünstigsten Belastungen handelt (§§ 10, 11), so ist das obige Vorgehen oft bequem, weil eben die Beiträge aller für die verschiedenen Grenzwerthe massgebenden Belastungen aus den Beiträgen der einzeln P rasch erhalten werden können. Vergl. auch das Vorgehen im IV. Abschnitt. Ueber die Ermittlung der Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke siehe Beisp. 28.

d) Temperaturänderungen. Für eine beliebige Temperaturänderung τ hat man neben $V = V' = 0$ nach § 17, 15) 16):

$$H = \frac{45\ c}{(1 + 6\ \varepsilon)\ 4 f^2}\ E\ \alpha\ \tau, \tag{7}$$

$$M = M' = H \frac{2f}{3}, \tag{8}$$

woraus in vorliegendem Falle:

$$H = \frac{45 \,.\, 0{,}03578}{1{,}01554 \,.\, 4 \,.\, 4{,}502^2}\ E\ \alpha\ \tau = \frac{E\ \alpha\ \tau}{51{,}135},$$

$$M = M' = 3{,}0013\ H = \frac{E\ \alpha\ \tau}{17{,}037},$$

und beispielsweise mit $E = 175000$ kg per qcm, $\alpha = 0{,}0000118$ (Bruchsteingewölbe), da alsdann für Meter als Längeneinheit $E\ \alpha = 175000 \,.\, 100^2 \,.\, 0{,}00001118 = 20650$:

$$H = 404\ \tau \text{ kg}, \qquad M = M' = 1212\ \tau \text{ mk}.$$

Für $\tau = \pm\ 25^0$ werden $H = \mp\ 10100$ kg, $M = M' = \pm\ 30300$ mk.

e) Bewegungen der Kämpfer. Durch eine Aenderung der Spannweite um $\Delta\, l$ ohne andere als die in der Aufgabe zugelassene Bewegung der Kämpfer entsteht nach § 17, 20):

$$H = \frac{45\ c}{(1 + 6\ \varepsilon)\ 4 f^2}\ \frac{E\ \Delta\, l}{l}, \tag{9}$$

während M, M' durch 8) bestimmt und $V = V' = 0$ sind. In unserm Falle ergeben sich mit Rücksicht auf die Berechnung unter d):

$$H = -\frac{E\Delta l}{51{,}135.23{,}758} = -\frac{E\Delta l}{1214{,}86},$$

$$M = M' = 3{,}0013\, H = -\frac{E\Delta l}{404{,}77}.$$

und beispielsweise mit $E = 175000 . 100^2$ kg per qcm, wenn Δl in cm eingesetzt werden soll, in welchem Falle nach Einsetzen des vorstehenden E noch mit 100 zu multiplizieren ist:

$$H = -\ 14405\, \Delta l \text{ kg}, \qquad M = M' = -\ 43234\, \Delta l \text{ mk}.$$

Für $\Delta l = 1$ cm werden $H = -\ 14405$ kg, $M = M' = -\ 43234$ mk.

Für andere als die oben angenommenen Bewegungen der Kämpfer wären anstatt 8) 9) die Formeln § 17, 17) 18) 19) anzuwenden gewesen, wobei nach § 17, 1) 2) im Allgemeinen auch V, V' beeinflusst werden.

Bemerkungen.

Wir haben oben die Werthe ε, c als gegeben angenommen, weil ihre Berechnung je nach Umständen verschieden erfolgen kann, während vorstehendes Beispiel für beliebige parabolische Bogen ohne Gelenke gelten soll. In Wirklichkeit entsprechen die gegebenen ε, c dem in den Beispielen 33 bis 37 behandelten Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe und ihre Berechnung ist am Schlusse des Beispiels 43 gegeben. Auch die übrige Berechnung hängt etwas von dem System des in Frage stehenden Bogens ab, bietet aber nach Ermittelung der Kämpferdrucklinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke (Beisp. 28 und 1) gegenüber der Berechnung von Bogen mit Kämpfergelenken nichts Neues. Ueber die Berechnung parabolischer Gewölbe ohne Gelenke siehe auch Beisp. 30.

Hätten wir in obigen Gleichungen $\varepsilon = 0$ gesetzt, was der üblichen Vernachlässigung des Einflusses der Axialkraft und der Glieder mit r im Nenner (S. 21) oder der Vernachlässigung von X_2, Y_2, Z_2 in § 26 entspricht, so würden sich die Werthe ergeben haben, welche mit den oben berechneten in der folgenden Tabelle III zusammengestellt sind.

Die Abweichungen können hiernach für die Momente schon bei dem kleinen $\varepsilon = 0{,}00259$ erheblich werden. Nun pflegen aber für eiserne Bogen wesentlich grössere ε als für Gewölbe einzutreten, z. B. für die Dourobrücke 0,004287, für die Oeffnung IV der Cannstatter Brücke 0,012063, für die Coblenzer Brücke 0,04563 und da der Horizontalschub bei Vernachlässigung von ε allgemein $1 + 6\,\varepsilon$ mal so gross als nach den genaueren Formeln resultirt (bei Bogen mit Kämpfergelenken nur $1 + \varepsilon$ mal so gross), so würde er sich in den letzterwähnten Fällen alsdann um 2,57 % bezw. 7,24 % und 27,38 % zu gross ergeben, während für die Momente noch weit grössere Differenzen entstünden.

Da für eine Einzellast P bei a nach § 17, 9):

$$M = \frac{P}{(1 + 6\,\varepsilon)\, 2\, l^3}\, a\, (l - a)^2\, (5\, a - 2\, l - 12\, \varepsilon\, l),$$

oder mit $\mu = \frac{a}{l}$:

$$\frac{M}{P l} = \mu\, (1 - \mu)^2\, \frac{5\,\mu - 2 - 12\,\varepsilon}{1 + 6\,\varepsilon},$$

so folgen z. B.

für	$\frac{a}{l} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
mit $\varepsilon = 0{,}015$	$\frac{M}{Pl} =$	− 0,06242	− 0,06928	− 0,04585	− 0,01189	0,01834
mit $\varepsilon = 0$	$\frac{M'}{Pl} =$	− 0,06075	− 0,06400	− 0,03675	0	0,03125
Abweichungen in % =		2,68	7,62	19,85	100	70,39

Parabolischer Bogen ohne Gelenke. Tabelle III. Vergleiche.

Für	Grösse	Mit $\varepsilon = 0$ berechnet	genauer berechnet	Abweichung in %
Eigengewicht allein	H $M = M'$ $V = V'$	26284 — 4819 24095	25882 — 6026 24095	1,55 20,03 0
Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte allein	$\frac{H}{P}$ $\frac{M}{P}$ $\frac{M'}{P}$ $\frac{V}{P}$ $\frac{V'}{P}$	3,4736 — 3,6472 3,8566 3,9996 1,0004	3,4204 — 3,8067 3,6972 3,9996 1,0004	1,55 4,19 4,31 0,00 0,00
Verkehrsbelastung beider Bogenhälften	$\frac{H}{P}$ $\frac{M}{P} = \frac{M'}{P}$ $\frac{V}{P} = \frac{V'}{P}$	6,9472 0,2094 5	6,8408 — 0,1095 5	1,55 291,23 0
eine Temperaturänderung um τ^0	$\frac{H}{E\alpha\tau}$ $\frac{M}{E\alpha\tau} = \frac{M'}{E\alpha\tau}$ $V = V'$	$\frac{1}{50,352}$ $\frac{1}{16,776}$ 0	$\frac{1}{51,135}$ $\frac{1}{17,037}$ 0	1,55 1,55 0
eine Aenderung der Spannweite um Δl	$\frac{H}{E\Delta l}$ $\frac{M}{E\Delta l} = \frac{M'}{E\Delta l}$ $V = V'$	$-\frac{1}{1196,27}$ $-\frac{1}{398,58}$ 0	$-\frac{1}{1214,86}$ $-\frac{1}{404,77}$ 0	1,55 1,55 0

für	$\frac{a}{l} =$	0,6	0,7	0,8	0,9
mit $\varepsilon = 0,015$	$\frac{M}{Pl} =$	0.03611	0,03815	0,02672	0,00958
mit $\varepsilon = 0$	$\frac{M'}{Pl} =$	0,04800	0,04725	0,03200	0,01125
Abweichungen in %	=	32,93	23,85	19,76	17,43.

Aehnliche Abweichungen können für die übrigen Momente M_x entstehen. Wenn sich dieselben nun auch nicht in gleichem Maasse auf die Normalspannungen durch die Gesammtbelastung fortzupflanzen brauchen (vergl. am Schlusse der Beispiele 33 und Beispiel 35, so erkennt man doch, dass gerade bei Bogen ohne

Gelenke ε im Allgemeinen nicht zu vernachlässigen ist, wie es auch bei Berechnung der Einsenkungen durch die Belastung niemals unberücksichtigt bleiben darf, da sonst z. B. bei gleichmässig vertheilter Belastung auf die ganze Spannweite für parabolische Bogen ohne Gelenke wie mit zwei und drei Gelenken die Einsenkung Null sich ergeben würde.

Beispiel 28. Kämpferdrucklinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke eines parabolischen Bogens (auch Gewölbes) ohne Gelenke.

Für den im vorigen Beispiel betrachteten Bogen die Schnittlinie S und die Umhüllungslinien U, U' der Kämpferdrücke zu bestimmen.

Nach § 17, 39) hat man als Gleichung der Kämpferdrucklinie S:

$$b = \frac{3+8\varepsilon}{5} 2f, \qquad 1)$$

wonach in unserm Falle:

$$b = \frac{3+8 \,.\, 0{,}00259}{5} 2 \,.\, 4{,}502 = 5{,}440 \text{ m.}$$

Die Kämpferdrucklinie ist eine in der Höhe 5,440 m über den Axpunkten der Auflager liegende Gerade. Vergl. S. 104.

Die Gleichung der Umhüllungslinie U ist nach § 17, 43) (u als Abscisse, v Ordinate):

$$v = \frac{2f}{3} - \frac{1+6\varepsilon}{15\,u}\frac{4f}{l}\left(\frac{l}{2} - u\right)^2, \qquad 2)$$

und im vorliegendem Falle mit $l = 23{,}758$ m, $f = 4{,}502$ m, $\varepsilon = 0{,}00259$:

$$v = 1{,}0013 - \frac{(11{,}879 - u)^2}{19{,}4868\,u},$$

wonach beispielsweise:

für	$u =$	0	0,629	2,879	5,129	7,379	9,629	11,879 m:
	$v =$	$-\infty$	$-9{,}324$	$-0{,}468$	0,545	0,860	0,974	1,001 m.

Da die Linie nur bis $u = \frac{l}{4}$ gebraucht wird, so genügt ihre Verzeichnung bis $u = \frac{l}{2} = 11{,}879$ m. Die Umhüllungslinie U' liegt bezüglich der Trägermitte symmetrisch zur Umhüllungslinie U und wird nur im letzten Viertel der Spannweite gebraucht. Vergl. S. 105.

Die in Beispiel 27 angenommenen Verhältnisse entsprechen dem Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe (§ 19, Beispiele 33 bis 37), welches in Wirklichkeit nicht parabolisch ist und dessen Linien S, U, U' mit der den Resultaten des Beispiels 33 entsprechenden Annäherung in Beispiel 1 ermittelt wurden.

Beispiel 29. Einsenkungen eines parabolischen Bogens (auch Gewölbes) ohne Gelenke.

Für den in Beispiel 27 betrachteten Bogen ohne Gelenke die Einsenkungen e in der Mitte durch das Eigengewicht allein, durch die dort behandelten Verkehrsbelastungen, durch eine Temperaturänderung τ und durch die in Beispiel 27 angenommenen Aenderungen Δl, Δk der Spannweite und Stützhöhen zu berechnen.

a) Für eine beliebige symmetrische Belastung hat man nach § 17, 50):

$$e = \frac{1}{24\,E\,c}\left[\sum_0^m P a^2 (3\,l - 4\,a) - H\frac{f\,l^2}{2}\right]. \qquad 1)$$

woraus in unserm Falle mit Rücksicht auf die Tabelle I in Beispiel 27 (S. 108) und das dort berechnete H für Eigengewicht allein:

$$e = \frac{1}{24 \,.\, 0{,}03578\,E} (3 \,.\, 23{,}758 \,.\, 897048 - 4 \,.\, 7712459 - 25882 \,.\, 2{,}251 \,.\, 22{,}758^2)$$

$$= \frac{234938}{E},$$

und für $E = 175000$ kg per qcm (Bruchsteingewölbe):

$$e = \frac{234938}{175000 \,.\, 100^2} \text{ m} = 0{,}013 \text{ cm}.$$

b) Gleichung 1) lässt sich auch schreiben:

$$e = \frac{1}{24\, E\, c}\left[4 \,.\, \sum_0^m P\, a^2\,(l-a) - l \sum_0^m P\, a^2 - H \frac{f\, l^2}{2}\right]. \qquad 2)$$

Für die in Beispiel 27 unter *c*) behandelte symmetrische Verkehrsbelastung hat man mit Rücksicht auf die dortige Tabelle II (S. 109):

$$\sum_0^m P\, a^2\,(l-a) = P\left(\frac{9{,}16}{2} + 173{,}07 + 490{,}07 + 891{,}84 + 1310{,}01 + \frac{1676{,}26}{2}\right) = 3707{,}70,$$

$$\sum_0^m P\, a^2 = P\left(\frac{0{,}396}{2} + 8{,}289 + 26{,}307 + 54{,}450 + 92{,}718 + \frac{141{,}111}{2}\right) = 252{,}5175.$$

und mit dem dort berechneten H:

$$e = \frac{P}{24 \,.\, 0{,}03578\, E}\left(4 \,.\, 3707{,}70 - 23{,}758 \,.\, 252{,}5175 - 6{,}8408 \,.\, 2{,}251 \,.\, 23{,}758^2\right)$$

$$= 1327{,}39\, \frac{P}{E},$$

also beispielsweise für $P = 3430$ kg, $E = 175000 \,.\, 100^2$ kg per qm:

$$e = \frac{1327{,}39 \,.\, 3430}{175000 \,.\, 100^2} \text{ m} = 0{,}260 \text{ cm}.$$

c) Da bei symmetrisch zur Trägermitte liegender Belastung die Belastungen beider Trägerhälften gleichviel zur Einsenkung in der Trägermitte beitragen, so liefert die in Beispiel 27 unter *c*) erwähnte (S. 110) einseitige Belastung:

$$e = \frac{0{,}260}{2} = 0{,}130 \text{ cm}.$$

d) Die Einsenkung in der Trägermitte durch eine beliebige Temperaturänderung τ ist nach § 17, 55):

$$e = -\,\alpha\,\tau\left(f + \frac{15}{64\, f}\,\frac{l^2}{1 + 6\,\varepsilon}\right), \qquad 3)$$

also im vorliegendem Falle:

$$e = -\,\alpha\,\tau\left(4{,}502 + \frac{15 \,.\, 23{,}758^2}{64 \,.\, 4{,}502 \,.\, 1{,}01554}\right) = -\ 34{,}437\ \alpha\,\tau.$$

und für $\alpha = 0{,}0000118$:

$$e = -\ 0{,}000406\ \tau \text{ m} = -\ 0{,}0406\ \tau \text{ cm},$$

beispielsweise für $\tau = \pm 25^0$: $e = \mp 1{,}015$ cm.

e) Durch die in Beispiel 27 angenommenen Aenderungen $\Delta\, l$, $\Delta\, k$ der Spannweite und Stützhöhen ergibt sich nach § 17, 57):

$$e = \frac{15\, l}{64\, f}\,\frac{\Delta\, l}{1 + 6\,\varepsilon} - \frac{\Delta\, k}{2},$$

also in unserm Falle:

$$e = \frac{15 \,.\, 23{,}758}{64 \,.\, 4{,}502}\,\frac{\Delta\, l}{1{,}01554} - \frac{\Delta\, k}{2} = 1{,}218\,\Delta\, l - 0{,}5\,\Delta\, k.$$

und beispielsweise für $\Delta\, l = 1$ cm, $\Delta\, k = 0$: $e = 1{,}218$ cm.

Beispiel 30. Berechnung eines Bogens (Gewölbes) ohne Gelenke (Pruthbrücke bei Jaremcze).

Für das Gewölbe der Pruthbrücke bei Jaremcze (S. 128, vergl. Beisp. 13) beträgt die Spannweite $l = 67{,}62$ m, der Pfeil der Bogenaxe $f = 18{,}1215$ m, die Lagerfugen können als senkrecht zur Bogenaxe gelten. Es sollen für die bei der Berechnung angenommenen, in Kolumne 6 und 8 der folgenden Tabelle eingetragenen Lasten, jedoch unter der Voraussetzung, dass es sich um einen Parabelbogen von konstantem $J \cos\varphi$ handle, (s. Bemerkungen am Schluss), die Kämpferreaktionen und Beanspruchungen σ_0, σ_u berechnet werden: *a*) für die feste Last allein; *b*) für Verkehrsbelastung des ganzen Bogens; *c*) für Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte; *d*) für Verkehrsbelastung der zweiten Bogenhälfte.

Die Normalspannungen im obersten und untersten Element der Lagerfuge x von der Höhe h und Breite b sind unter Voraussetzung genügender Widerstandsfähigkeit der Fuge (eventuell auch gegen Zug) nach § 18, 5) 6):

$$\sigma_o = \frac{1}{b\,h}\left(N_x + \frac{6}{h} M_x\right), \qquad \sigma_u = \frac{1}{b\,h}\left(N_x - \frac{6}{h} M_x\right), \tag{1}$$

worin nach § 17 für beliebige Belastung mit:

$$V_x = V - \sum_0^x P \tag{2}$$

die Normalkraft und das Moment bei x:

$$N_x = (H + V_x \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi, \tag{3}$$

$$M_x = M + V_x\, x - H y + \sum_0^x P a. \tag{4}$$

Für parabolische Axe hat man nach § 15, 8):

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x), \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x), \tag{5}$$

und für beliebige Axe:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \tag{6}$$

Die Gleichungen 5) liefern mit den gegebenen l, f für beliebige x:

$$y = \frac{x\,(67{,}62 - x)}{63{,}0807}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{33{,}81 - x}{31{,}5403}.$$

Da die Berechnung für alle Lagerfugen im Wesentlichen gleich ist, so zeigen wir dieselbe wie in Beisp. 13 für die Kämpferfuge, die Scheitelfuge und eine Zwischenfuge der ersten Bogenhälfte. Nach vorstehenden Gleichungen ergeben sich:

für				
	$x =$	0	20,81	33,81 m $= \frac{l}{2}$:
	$y =$	0	15,4424	18,1215 m,
	$\operatorname{tg} \varphi =$	1,0720	0,4122	0,
	$\cos \varphi =$	0,6821	0,9245	1,

während nach Beispiel 13:

$h =$	3,1	2,24	2,1 m,
$b\,h =$	20,460	11,088	9,975 qm.

Zur Ermittelung der Vertikalreaktionen V, V' und der statisch unbestimmten Grössen H, M, M' haben die in § 17 gegebenen Formeln zu dienen. Da h^2 von $3{,}1^2 = 9{,}61$ bis $2{,}1^2 = 4{,}41$ variirt, so setzen wir den Mittelwerth

$$\gamma = \frac{J}{F} = \frac{h^2}{12} = \frac{7{,}01}{12},$$

und erhalten mit

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = 40{,}6010 \text{ m}$$

nach § 15, 40) in jenen Gleichungen:

$$\varepsilon = \frac{15 \cdot 7{,}01}{8 \cdot 12} \left(\frac{22{,}4795}{40{,}601 \cdot 18{,}1215}\right)^2 = 0{,}00102,$$

$$1 + 6\,\varepsilon = 1{,}00612.$$

Man sieht hier, dass ε bei steilen Gewölben rechteckigen Querschnitts (vergl. am Schlusse von § 15) am ehesten vernachlässigt werden kann, doch macht die Berücksichtigung keine Schwierigkeit. Wir erhalten:

$$\frac{15}{(1 + 6\,\varepsilon)\, 2 f l^3} = \frac{1}{751637}.$$

Die weitere Berechnung hat auf Grund der in nachstehender Tabelle gegebenen Zahlen zu erfolgen. Die σ_o, σ_u drücken wir per qcm aus.

Pruthbrücke bei Jaremoze.*

			Feste Last				Verkehrslast					
a	$l-a$	$a(l-a)$	P	Pa	$Pa(l-a)$	$Pa^2(l-a)^2$	P	Pa	$Pa(l-a)$	$Pa^2(l-a)$	$Pa(l-a)^2$	$Pa^2(l-a)^2$
2,1225	65,4975	139,02	114,8	243,66	15959	2218620						
3,7475	63,8725	239,36	388,1	1454,40	92896	22235587	27	101,182	6462,7	24219	412789	1546912
5,3725	62,2475	334,42	82,2	441,62	29496	9864052						
6,9975	60,6225	424,21	78,2	547,20	33173	14072318						
8,6225	58,9975	508,71	290,5	2504,84	147780	75177164	27	232,807	13735,2	118432	810342	6987234
10,2475	57,3725	587,92	65,6	672,24	38568	22674899						
11,8725	55,7475	661,86	60,3	715,91	39910	26414833						
13,4975	54,1225	730,52	224,7	3032,89	164148	119913397	27	364,432	19724,0	266225	1067512	14408776
15,1225	52,4975	793,89	52,4	792,42	41600	33025824						
16,7475	50,8725	851,99	48,5	812,25	41322	35205931						
18,3725	49,2475	904,80	147,7	2713,62	133639	120916567	18	330,705	16286,4	299222	802064	14735935
19,9975	47,6225	952,33	101,9	2037,75	97042	92416008	9	179,977	8571,0	171399	408172	8162420
21,6225	45,9975	994,58	90,9	1965,49	90407	89916994	9	194,602	8951,2	193547	411733	8902684
23,2475	44,3725	1031,55	81,3	1890,02	83865	86510941	9	209,227	9283,9	215827	411950	9576807
24,8725	42,7475	1063,24	74,3	1848,03	78999	83994897	9	223,852	9569,2	238010	409059	10174356
26,4975	41,1225	1089,64	68,2	1807,13	74313	80974417	9	238,477	9806,8	259856	403280	10685882
28,1225	39,4975	1110,77	64,0	1799,84	71089	78963529	9	253,102	9996,9	281138	394853	11104257
29,7475	37,8725	1126,61	61,0	1814,60	68723	77424019	9	267,727	10139,5	301625	384008	11423262
31,3725	36,2475	1137,17	58,7	1841,57	66752	75908372	9	282,352	10234,6	321085	370979	11638480
32,9975	34,6225	1142,46	57,6	1900,66	65806	75180723	9	296,977	10282,1	339284	355992	11746888
Für das halbe Gewölbe			2216,9	30836,14	1475487	1223009092	180	3175,419	143043,5	3029869	6642733	131093893
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

* Die Längen sind in Metern, die Lasten in Tonnen gegeben.

a) Feste Last allein. Vertikalreaktionen der Kämpfer und Horizontalschub nach § 17, 33) 34):

$$V = V' = 2216{,}9 \text{ t},$$

$$H = \frac{1223009092}{751637} = 1627{,}13 \text{ t},$$

Endmomente nach § 17, 35):

$$M = M' = 1627{,}13 \,.\, 12{,}081 - \frac{1475487}{67{,}62} = -\ 2162{,}19 \text{ mt}.$$

Für $\varepsilon = 0$ hätten sich anstatt der beiden letzten Werthe 1637,09 und 2042,59 ergeben.

Wir erhalten nun entsprechend dem oben Gesagten für die Kämpferfuge mit $V_x = V$, $M_x = M$:

$$N_x = (1627{,}13 + 2216{,}9 \,.\, 1{,}0720)\ 0{,}6821 = 2730{,}89 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{204{,}6}\left(2730{,}89 - \frac{6}{3{,}1}\ 2162{,}19\right) = -\ 7{,}106 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{204{,}6}\left(2730{,}89 + \frac{6}{3{,}1}\ 2162{,}19\right) = 33{,}801 \text{ ,, .}$$

für die Fuge $x = 20{,}81$ m:

$$V_x = 2216{,}9 - (114{,}8 + \ldots + 101{,}9) = 562{,}00 \text{ t},$$

$$N_x = (1627{,}13 + 562 \,.\, 0{,}4122)\ 0{,}9245 = 1718{,}45 \text{ t},$$

$$M_x = -\ 2162{,}19 - 562 \,.\, 2081 - 1627{,}13 \,.\, 15{,}4424 +$$
$$(243{,}66 + \ldots + 2037{,}75) = 375{,}04 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(1718{,}45 - \frac{6}{2{,}24}\ 375{,}04\right) = 24{,}558 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(1718{,}45 + \frac{6}{2{,}24}\ 375{,}04\right) = 6{,}438 \text{ ,, ,}$$

und für die Scheitelfuge mit $V_x = 0$, $N_x = H$:

$$M_x = -\ 2162{,}17 - 1627{,}13 \,.\, 18{,}1215 + 30836{,}14 = -\ 812{,}09 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{99.75}\left(1627{,}13 - \frac{6}{2{,}1}\ 812{,}09\right) = -\ 6{,}949 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{99{,}75}\left(1627{,}13 + \frac{6}{2{,}1}\ 812{,}09\right) = 39{,}573 \text{ ,, .}$$

b) Vollbelastung. Durch die Verkehrslast allein ergeben sich nach den unter *a*) angewandten Formeln die Kämpferreaktionen:

$$V = V' = 180 \text{ t},$$

$$H = \frac{131093893}{751637} = 174{,}41 \text{ t},$$

und die Endmomente:

$$M = M' = 174{,}41 \,.\, 12{,}081 - \frac{143043{,}5}{67{,}62} = -\ 8{,}36 \text{ mt}.$$

Damit folgen weiter für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = M$:

$$N_x = (174{,}41 + 180 \,.\, 1{,}0720)\ 0{,}6821 = 250{,}58 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{204{,}6}\left(250{,}58 - \frac{6}{3{,}1}\ 8{,}36\right) = 1{,}146 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{204{,}6}\left(250{,}58 + \frac{6}{3{,}1}\ 8{,}36\right) = 1{,}304 \text{ ,, ,}$$

für die Fuge $x = 20{,}81$ m:

$$V_x = 180 - 108 = 72 \text{ t},$$

$$N_x = (174{,}41 + 72 \,.\, 0{,}4122)\ 0{,}9245 = 188{,}68 \text{ t},$$

$$M_x = -\ 8{,}36 + 72 \,.\, 20{,}81 - 174{,}41 \,.\, 15{,}4424 + (101{,}182 + \ldots + 179{,}977) = 5{,}75 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(188{,}68 + \frac{6}{2{,}24}\ 5{,}75\right) = 1{,}841 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(188{,}68 - \frac{6}{2{,}24}\ 5{,}75\right) = 1{,}563 \text{ ,, ,}$$

und für die Scheitelfuge mit $V_x = 0$, $N_x = H$:

$$M_x = -8{,}36 - 174{,}41 \,.\, 18{,}1215 + 3175{,}419 = 6{,}49 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{99{,}75}\left(174{,}41 + \frac{6}{2{,}1}\, 6{,}49\right) = 1{,}934 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{99{,}75}\left(174.41 - \frac{6}{2{,}1}\, 6{,}49\right) = 1{,}563 \;\;\text{„},$$

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast erhalten wir:

$$V = V' = 2216{,}9 + 180 = 2396{,}9 \text{ t},$$
$$H = 1627{,}13 + 174{,}41 = 1801{,}54 \text{ t},$$
$$M = M' = -2162{,}19 - 8{,}36 = -2170{,}55 \text{ mt},$$

und bei $x = 0 \quad 20{,}81 \quad 33{,}81$ m:

$\sigma_o = -5{,}960 \quad 26{,}399 \quad -5{,}015$ kg.

$\sigma_u = 35{,}105 \quad 8{,}001 \quad 41{,}136$ „.

c) Verkehrslast von 0 bis m. Die Verkehrslast allein erzeugt nach § 17, 8) 11) 12) den Horizontalschub und die Endmomente:

$$H = \frac{131093893}{2 \,.\, 751637} = 87{,}21 \text{ t},$$

$$M = 87{,}21 \,.\, 12{,}081 - \frac{6642733}{67{,}62^2} = -399{,}19 \text{ mt},$$

$$M' = 87{,}21 \,.\, 12{,}081 - \frac{3029869}{67{,}62^2} = 390{,}95 \;\;\text{„},$$

womit nach § 17, 2) 3) die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V' = \frac{1}{67{,}62}(-399{,}19 - 390{,}95 + 3175{,}419) = 35{,}27 \text{ t},$$
$$V = 180 - 35{,}27 = 144{,}73 \text{ t}.$$

Wir erhalten nun für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = M$:

$$N_x = (87{,}21 + 144{,}73 \,.\, 1{,}0720)\, 0{,}6821 = 165{,}31 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{204{,}6}\left(165{,}31 - \frac{6}{3{,}1}\, 399{,}19\right) = -2{,}968 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{204{,}6}\left(165{,}31 + \frac{6}{3{,}1}\, 399{,}19\right) = 4{,}584 \;\;\text{„},$$

für die Fuge $x = 20{,}81$ m:

$$V_x = 144{,}73 - 108 = 36{,}73 \text{ t},$$
$$N_x = (87{,}21 + 36{,}73 \,.\, 0{,}4122)\, 0{,}9245 = 94{,}62 \text{ t},$$
$$M_x = -399{,}19 + 36{,}73 \,.\, 20{,}81 - 87{,}21 \,.\, 15{,}4424 + (101{,}182 + \ldots + 179{,}977) = 227{,}53 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(94{,}62 + \frac{6}{2{,}24}\, 227{,}53\right) = 6{,}350 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(94{,}62 - \frac{6}{2{,}24}\, 227{,}53\right) = -4{,}643 \;\;\text{„},$$

und für die Scheitelfuge mit $N_x = H$:

$$V_x = 144{,}73 - 180 = -35{,}27 \text{ t},$$
$$M_x = -399{,}19 - 35{,}28 \,.\, 33{,}81 - 87{,}21 \,.\, 18{,}1215 + 3175{,}419 = 3{,}37 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{99{,}75}\left(87{,}21 + \frac{6}{2{,}1}\, 3{,}37\right) = 0{,}965 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{99{,}75}\left(87{,}21 - \frac{6}{2{,}1}\, 3{,}37\right) = 0{,}784 \;\;\text{„}.$$

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast ergeben sich:

$$V = 2216{,}9 + 144{,}73 = 2361{,}63 \text{ t},$$
$$V' = 2216{,}9 + 35{,}27 = 2252{,}17 \text{ t},$$
$$H = 1627{,}13 + 87{,}21 = 1714{,}34 \text{ t},$$
$$M = -2162{,}19 - 399{,}19 = -2561{,}38 \text{ mt},$$
$$M' = -2162{,}19 + 390{,}95 = -1771{,}24 \;\;\text{„},$$

und bei $x = 0 \quad 20{,}81 \quad 33{,}81$ m:
$\sigma_o = -10{,}074 \quad 30{,}908 \quad -5{,}988$ kg,
$\sigma_u = 38{,}385 \quad 1{,}795 \quad 40{,}360$ „ .

d) Verkehrslast von *m* bis *l*. Mit Rücksicht auf die im vorigen Falle gefundenen Werthe hat man, von der Verkehrslast allein herrührend:

$$H = 87{,}21 \text{ t}, \quad M = 390{,}95 \text{ mt}, \quad M' = -399{,}19 \text{ mt},$$
$$V = 35{,}27 \text{ t}, \quad V' = 144{,}73 \text{ t}.$$

Damit folgen für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = M$:

$$N_x = (87{,}21 + 35{,}27 \,.\, 1{,}0720)\, 0{,}6821 = 85{,}28 \text{ t},$$
$$\sigma_o = \frac{1}{204{,}6}\left(85{,}28 + \frac{6}{3{,}1}\, 390{,}95\right) = 4{,}115 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{204{,}6}\left(85{,}28 - \frac{6}{3{,}1}\, 390{,}95\right) = -3{,}282 \text{ „},$$

für die Fuge $x = 20{,}81$ m:

$$V_x = 35{,}27 - 0 = 35{,}27 \text{ t},$$
$$N_x = (87{,}21 + 35{,}27 \,.\, 0{,}4122)\, 0{,}9245 = 94{,}07 \text{ t},$$
$$M_x = 390{,}95 + 35{,}27 \cdot 20{,}81 - 87{,}21 \cdot 15{,}4424 = -221{,}81 \text{ mt},$$
$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(94{,}07 - \frac{6}{2{,}24}\, 221{,}81\right) = -4{,}510 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(94{,}07 + \frac{6}{2{,}24}\, 221{,}81\right) = 6{,}207 \text{ kg},$$

und für die Scheitelfuge mit $N_x = H$:

$$V_x = 35{,}27 - 0 = 35{,}27 \text{ t},$$
$$M_x = 390{,}95 + 35{,}27 \cdot 33{,}81 - 87{,}21 \cdot 18{,}1215 = 3{,}05 \text{ mt},$$
$$\sigma_o = \frac{1}{99{,}75}\left(87{,}21 + \frac{6}{2{,}1}\, 3{,}05\right) = 0{,}962 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{99{,}75}\left(87{,}21 - \frac{6}{2{,}1}\, 3{,}05\right) = 0{,}787 \text{ „}.$$

Da die unter *c)* und *d)* verwendeten Verkehrslasten zusammen die Verkehrslast unter *b)* ausmachen, so müssen die von der Verkehrslast allein herrührenden $V, V', H, M, M', V_x, N_x, M_x, \sigma_o, \sigma_u$ in den Fällen *c)* und *d)* zusammen gleich den entsprechenden Werthen unter *b)* sein (abgesehen vom Einfluss vernachlässigter Dezimalen, der sich im vorliegendem Falle bemerkbar macht), was zur Abkürzung der Rechnung oder zur Kontrolle dienen kann.

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast hat man direkt oder mit Rücksicht auf die unter *c)* berechneten Werthe:

$$V = 2252{,}17 \text{ t}, \quad V' = 2361{,}62 \text{ t}, \quad H = 1714{,}34 \text{ t},$$
$$M = -1771{,}24 \text{ mt}, \quad M' = -2561{,}38 \text{ mt},$$

und bei $x = 0 \quad 20{,}81 \quad 33{,}81$ m:
$\sigma_o = -2{,}991 \quad 20{,}048 \quad -5{,}987$ kg,
$\sigma_u = 30{,}519 \quad 12{,}645 \quad 40{,}360$ „ .

Grenzwerthe. Dieselben haben sich bei den berücksichtigten Belastungsfällen wie folgt ergeben (bei jedem Werthe ist der betreffende Belastungsfall angedeutet):

	V, V'	H	M	M'
	2396,9 (*b*)	1801,54 (*b*)	− 2561,38 (*c*)	− 2561,38 (*d*)
	2216,9 (*a*)	1627,13 (*a*)	− 1771,24 (*d*)	− 1771,24 (*c*)
und bei	$x =$	0	20,81	33,81 m:
	$\sigma_o =$	− 2,991 (*d*)	30,908 (*c*)	− 5,015 (*b*)
		− 10,074 (*c*)	20,048 (*d*)	− 6,949 (*a*)
	$\sigma_u =$	38,385 (*c*)	12,645 (*d*)	41,136 (*b*)
		30,519 (*d*)	1,795 (*c*)	39,573 (*a*).

Der grösste rechnungsmässige Druck für die betrachteten Fugen tritt also mit 41,136 kg per qcm bei Vollbelastung der ganzen Brücke im Scheitel, der

grösste rechnungsmässige Zug mit $-10{,}074$ kg bei Verkehrsbelastung einer Brückenhälfte beim anliegenden Kämpfer ein. Da nicht genau die ungünstigsten Belastungen gewählt wurden, auch Temperaturänderungen u. s. w. gewisse Beiträge liefern können, so müssen die wirklichen Grenzwerthe noch etwas ungünstiger geschätzt werden (vergl. S. 69).

Bemerkungen. Man hat mitunter kreisförmige Bogen nach den Formeln für Parabelbogen berechnet. Ist der Bogen so flach, dass seine Axe mit einem Parabelsegment von gleichen l, f nahezu zusammenfällt, so kann dies zulässig sein. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass ein solches Vorgehen z. B. für den Bogen der Pruthbrücke nicht genügt hätte.

Verwenden wir die für den Parabelbogen gefundenen M, H, indem wir der Berechnung im Uebrigen die in Beisp. 13 ermittelte kreisförmige Axe zu Grunde legen, so ergeben sich für den Belastungsfall a) die V_x wie oben, und in der Lagerfuge $x = 20{,}81$ m mit $V_x = 562$ t.

$$N_x = 592 \cdot 0{,}3202 + 1627{,}13 \cdot 0{,}9474 = 1721{,}50 \text{ t},$$
$$M_x = -2162{,}19 + 562 \cdot 20{,}81 - 1627{,}13 \cdot 15{,}9840 + (243{,}66 + \ldots + 2037{,}75) = -506{,}22 \text{ mt},$$
$$\sigma_o = \frac{1}{110{,}88}\left(1721{,}50 - \frac{6}{2{,}24} 506{,}22\right) = 3{,}297 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{110{,}88}\left(1721{,}50 + \frac{6}{2{,}24} 506{,}22\right) = 27{,}755 \text{ „ },$$

während oben erhalten wurden: $N_x = 1718{,}45$ t, $M_x = 375{,}04$ mt, $\sigma_o = 24{,}558$ kg. $\sigma_u = 6{,}438$ kg. Die Abweichung von N_x beträgt hiernach nur 0.18 %, dagegen ist infolge des um $15{,}9840 - 15{,}4424 = 0{,}5416$ m grösseren y eine Aenderung des Moments um $-1627{,}73 \cdot 0{,}5416 = -881{,}26$ mt eingetreten, der Angriffspunkt von N_x liegt zufolge § 8, 1) im ersten Falle um

$$\frac{375{,}04}{1718.75} = 0{,}218 \text{ m}$$

oberhalb, im zweiten um

$$\frac{506{,}22}{1721{,}50} = 0{,}294 \text{ m}$$

unterhalb der Bogenaxe, wodurch sich die Vertheilung von N_x auf die Fuge vollständig geändert hat.

Nun sind aber auch die verwendeten M, H für den Kreisbogen nicht genau, und da eine Verkleinerung von H um

$$\frac{881{,}26 \cdot 100}{1627{,}13 \cdot 15{,}984} = 3{,}39\ \%$$

die ganze Aenderung wieder rückgängig machen würde, so erkennt man, dass es sich empfiehlt, für nicht ganz flache Bogen die Berechnung auf Grund der wirklichen Axform durchzuführen, was nach den in §§ 34, 35 gegebenen Formeln für beliebige Querschnitte und beliebige Axe keine Schwierigkeiten bietet (Beisp. 34—37 und 1, 43, 44). Für Gewölbe kommt dabei besonders in Betracht, dass man die Druckvertheilung behufs Vermeidung grösserer Zugspannungen genügend genau kennen muss. Nachdem die Axverhältnisse und Grössen H, M, M' bekannt sind, kann die übrige Berechnung natürlich ganz wie oben durchgeführt werden, doch thut man besser, die ungünstigsten Belastungen zu ermitteln (§ 17). Dabei können die für Parabelbogen gültigen Schnittlinien und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke mitunter auch dann verwendet werden, wenn man die Berechnung im Uebrigen für eine etwas andere Axform durchzuführen hat, da die Lasten in der Nähe der Belastungsgrenzen nur wenig beitragen, kleine Aenderungen der letzteren also ohne wesentlichen Einfluss sind. Bezüglich der Ermittelung jener Linien für Bogen von beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten siehe Beisp. 1. In Betreff der Stützlinie und Schubkräfte vergl. die Bemerkungen zu Beispiel 13.

Beispiel 31. Einfluss von Temperaturänderungen (Coblenzer Brücke).

Den Einfluss von Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 30^\circ$ auf die in Beisp. 17 betrachteten Bogen der Coblenzer Brücke unter der Annahme zu ermitteln, dass bei gleichen Dimensionen und parabolischer Axe anstatt der Kämpfergelenke festgespannte Enden angeordnet wären.

Unter den erwähnten Voraussetzungen hat man nach § 17, 16):

$$M = M' = \frac{E\,c}{1 + 6\,\varepsilon} \, \frac{15}{2\,f} \, \alpha\,\tau = H \frac{2\,f}{3}. \tag{1}$$

Im vorliegendem Falle ergeben sich mit $l = 98{,}0775$ m, $f = 8{,}91614$ m, $c = 0{,}36497$ m⁴, $\varepsilon = 0{,}04563$, $E = 2000000$ kg per qcm, $\alpha = 0{,}000012$ (Beisp. 16):

$$M = \frac{2000000 \,.\, 100^2 \,.\, 0{,}36497 \,.\, 15 \,.\, 0{,}000012}{1{,}27378 \,.\, 2 \,.\, 8{,}91614}\,\tau$$

$$= \frac{1313892}{22{,}7144}\,\tau = 57844{,}01\,\tau \text{ mk},$$

$$H = \frac{57844{,}01 \,.\, 3}{8{,}91614 \,.\, 2}\,\tau = 9731{,}33\,\tau \text{ kg},$$

und für $\tau = \pm 30^\circ$:

$$M = \pm 1735320 \text{ mk}, \qquad H = \pm 291940 \text{ kg}.$$

Bei Vernachlässigung von ε hätten sich M, H 1,27378 mal so gross wie hier, das heisst um 27,38 % zu gross ergeben.

Nach § 17, 1) 2) 16) ist die Temperaturänderung auf die Vertikalreaktionen der Kämpfer ohne Einfluss, wogegen nach § 17, 4) 6) und § 1, 10) allgemein und für $\tau = 30^\circ$ mit vorstehendem M, H:

$$M_x = M - H y = 1735320 - 291940\,y \text{ mk},$$
$$N_x = H \cos\varphi = 291940 \cos\varphi \text{ kg},$$
$$T_x = -H \sin\varphi = -291940 \sin\varphi \text{ kg}.$$

Das Moment M_x ändert sich also von $M = 1735320$ mk an den Kämpfern bis $1735320 - 191940 \cdot f = -867658$ mk im Scheitel, während auf der gleichen Strecke N_x von $291940 \cos\varphi_0$ bis 291940 kg wächst und T_x von $-291940 \sin\varphi_0$ numerisch bis 0 abnimmt.

Für die Beanspruchungen des Obergurts und Untergurts durch Temperaturänderungen gelten wie in Beisp. 17:

$$O = \frac{N_x}{2} + \frac{M_x}{h}, \qquad U = \frac{N_x}{2} - \frac{M_x}{h}. \tag{2}$$

also in unserm Falle für $\tau = 30^\circ$ mit obigen Ausdrücken von N_x, M_x und $h = 2{,}97214$ m:

$$O = 145970 \cos\varphi + 583862 - 98226\,y \text{ kg},$$
$$U = 145970 \cos\varphi - 583862 + 98226\,y \;\;„\;.$$

Man erhält z. B. im Scheitel mit $\varphi = 0$, $y = f = 8{,}91614$ m:

$$O = -145965 \text{ kg}, \qquad U = 437605 \text{ kg},$$

und, weil die Gurtungsquerschnitte daselbst $f_o = f_u = 768{,}13$ qcm sind, per qcm:

im Obergurt $\quad -\frac{145965}{768{,}13} = -190{,}0$ kg (Zug),

„ Untergurt $\quad \frac{437605}{768{,}13} = 569{,}7$ „ (Druck).

Bei $x = 0$ hat man $y = 0$ und nach § 15, 8):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{4f}{l} = \frac{4}{11}, \qquad \varphi_0 = 19^\circ 58' 59''$$
$$\cos\varphi_0 = 0{,}93971, \qquad \sin\varphi_0 = 0{,}34193,$$

womit die ganzen Beanspruchungen des Obergurts und Untergurts an den Kämpfern:

$$O = 721031 \text{ kg}, \qquad U = -446693 \text{ kg},$$

und wegen $f_o = f_u = 800{,}624$ qcm per qcm:

im Obergurt $\frac{721031}{800{,}624} = \quad 900{,}6$ kg (Druck),

„ Untergurt $-\frac{446693}{800{,}624} = -557{,}9$ „ (Zug).

Für $\tau = -30^0$ wechseln alle Beanspruchungen ihr Vorzeichen.

Da bei der Berechnung der Coblenzer Brücke die höchste zugelassene Beanspruchung per qcm (für Zusammenwirken von Lasten und Temperaturänderungen) nicht über 783 kg betrug, so würden die jetzigen Querschnitte der Coblenzer Brücke bei eingespannten Enden nicht einmal zur Uebertragung der von den Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 30^0$ allein herrührenden Beanspruchungen mit der vorgeschriebenen Sicherheit genügen.

Beispiel 32. Einsenkungen parabolischer Bogen (Coblenzer Brücke) Die in Beispiel 20 verlangten Einsenkungen für den Fall zu berechnen dass anstatt der Kämpfergelenke festgespannte Enden angeordnet wären.

Eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit erzeugt nach § 17, 52) die Einsenkung:

$$e = \frac{\varepsilon}{1+6\varepsilon} \frac{u\, l^4}{64\, E\, c} \tag{1}$$

also im vorliegendem Falle mit $l = 98{,}0775$ m, $c = 0{,}36497$ m^4, $\varepsilon = 0{,}04563$, $E = 2000000$ kg per qcm:

$$e = \frac{0{,}04563}{1{,}27378} \frac{u \,.\, 98{,}0775^4}{64 \,.\, 2000000 \,.\, 100^2 \,.\, 0{,}36497} = 0{,}0000070075\, u \text{ m} = 0{,}00070075\, u \text{ cm},$$

beispielsweise für die feste Last von $u = 3983$ kg:

$$e = 2{,}791 \text{ cm}, \tag{a}$$

und für Vollbelastung des ganzen Bogens mit $u = 7169$ kg:

$$e = 5{,}024 \text{ cm}, \tag{b}$$

während sich für den gleichen Bogen bei Anwendung von Kämpfergelenken 2,869 und 5,164 cm ergeben haben.

Durch Belastung der ersten Trägerhälfte mit u, der zweiten mit u' entsteht nach § 17, 53):

$$e = \frac{\varepsilon}{1+6\varepsilon} \frac{u+u'}{128} \frac{l^4}{Ec}, \tag{2}$$

wonach in unserm Falle:

$$e = 0{,}00070075 \frac{3983 + 7169}{2} = 3{,}906 \text{ cm}, \tag{c}$$

wie auch aus a) und b) zu entnehmen war (Mittel).

Eine Temperaturänderung τ liefert nach § 17, 55):

$$e = -\alpha\tau \left(f + \frac{15}{64 f} \frac{l^2}{1+6\varepsilon}\right) \tag{3}$$

und mit $l = 11 f = 11 \,.\, 8{,}91614$ m, $\alpha = 0{,}000012$ in Meter:

$$e = -0{,}000012 \,.\, 8{,}91614\, \tau \left(1 + \frac{15 \,.\, 11^2}{64 \,.\, 1{,}27378}\right),$$

$$e = -0{,}2489\, \tau \text{ cm}, \tag{d}$$

und speziell für $\tau = \pm 30^0$:

$$e = \mp 7{,}467 \text{ cm},$$

gegen $\mp 7{,}575$ cm bei zwei Gelenken.

Eine Aenderung der Spannweite um Δl ohne sonstige Bewegung der Bogenenden hätte nach § 17, 57) zur Folge:

$$e = \frac{15\, l}{64 f} \frac{\Delta l}{1 + 6\, \varepsilon}, \tag{4)}$$

also mit den jetzt geltenden Zahlen:

$$e = \frac{15 \,.\, 11}{64} \frac{\Delta l}{1{,}27378} = 2{,}0240\ \Delta l, \tag{e)}$$

und beispielsweise für $\Delta l = 2$ cm:

$$e = 4{,}048 \text{ cm},$$

gegen 4,109 cm bei zwei Gelenken.

Während also für gleiche Dimensionen und Einwirkungen die Beanspruchungen ohne Gelenke bedeutend grösser als bei zwei Gelenken werden können, (Beisp. 31), sind die Einsenkungen im ersten Fall zwar etwas geringer, aber nicht so bedeutend, dass darin ein ausschlaggebender Grund für die Vermeidung von Kämpfergelenken läge.

Aufgabe 12. Stützlinie für Temperaturänderungen bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenke.

Es sind die dem Einflusse der Temperaturänderungen allein entsprechenden Stützlinien zu ermitteln: *a*) für den symmetrischen Bogen mit Kämpfergelenken; *b*) für den symmetrischen Bogen ohne Gelenke.

Die Stützlinie ist die Verbindungslinie der Angriffspunkte der resultirenden Schnittkräfte R_x, und damit auch der Normalkräfte N_x und Transversalkräfte T_x in allen Querschnitten. Man hat nach § 8, 1) im Querschnitt x für die Entfernung dieses Angriffspunktes vom Axpunkte in der Ebene des Querschnitts gemessen:

$$c = \frac{M_x}{N_x}, \tag{1}$$

wobei die c nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet werden.

a) Bogen mit zwei Gelenken. Für diesen Fall hat man (vergl. Beisp. 17) von der Temperaturänderung allein herrührend:

$$M_x = -\, H y, \qquad N_x = H \cos \varphi, \tag{2)}$$

odass nach 1):

$$c = -\frac{y}{\cos \varphi}. \tag{3)}$$

Dies Resultat war vorauszusehen, da durch Temperaturänderung bei Bogen mit zwei Gelenken nur ein in den letzteren angreifender Horizontalschub, keine Vertikalreaktionen und keine Endmomente, entstehen, sodass nach § 1, 11) 12) mit $V_x = 0$ für den Richtungswinkel und die Grösse der resultirenden Schnittkraft bei x:

$$\operatorname{tg} \psi = 0, \qquad R_x = H. \tag{4)}$$

Die Stützlinie ist nach 3) die horizontale Verbindungsgerade der Gelenkpunkte (Fig. 80).

Fig. 80

b) Bogen ohne Gelenke. Für solche sind die Momente und Normalkräfte durch die Temperaturänderung ausgedrückt (vergl. Beisp. 31):

$$M_x = M - H y, \qquad N_x = H \cos \varphi, \tag{5)}$$

wonach Gleichung 1) mit der Bezeichnung $v = \frac{M}{H}$ für die Stützlinien liefert:

$$c = \frac{v - y}{\cos \varphi}. \tag{6)}$$

Die Stützlinie ist hier eine in der Höhe v über den Axpunkten der Endquerschnitte hinlaufende Gerade (Fig. 81). Für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hat man nach § 17, 16) $v = \frac{2}{3} f$, für symmetrische Bogen von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten nach § 34, 34) $v = B : A$. Die Gleichungen 4) gelten auch für Bogen ohne Gelenke.

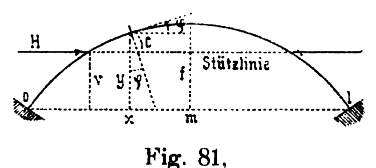


Fig. 81,

§ 18. Gewölbe.

Die Berechnung von Gewölben kann hier nur soweit besprochen werden, als sie mit der Theorie elastischer Bogenträger in Beziehung steht. Es kommen also nur Tonnengewölbe in Betracht. Schon vor Anwendung jener Theorie auf diese Gewölbe wurde für letztere das gleiche (Naviersche) Vertheilungsgesetz der Normalkraft auf die Lagerfugen angenommen, welches die Theorie elastischer Bogenträger als näherungsweise gültig für die Stabquerschnitte nachweist. Dasselbe lantet nach § 6, 10):

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v, \tag{1}$$

oder wenn entsprechend § 8, 1)

$$M_x = c\, N_x \tag{2}$$

gesetzt wird:

$$\sigma = \frac{N_x}{F}\left(1 + \frac{c\, v}{J}\right). \tag{3}$$

Diese Gleichungen erlangten für Gewölbe aus einzeln Steinen nur insofern eine andere Auffassung, als die Lagerfugen x an Stelle der Querschnitte x traten, sodass N_x, T_x die Komponenten der resultierenden Fugenkraft R_x senkrecht und längs der Lagerfuge x und M_x das Moment von R_x oder N_x in Bezug auf den der Bogenaxe angehörigen Punkt x, y der letzteren bezeichnen (Fig. 82). Die in §§ 1, 2 abgeleiteten rein statischen Beziehungen für N_x, T_x, M_x u. s. w. bleiben ebenfalls gültig, wenn die Grenzen der Summen Σ Lagerfugen und φ den Winkel der Normalen zur Lagerfuge x mit der horizontalen x-Axe bedeuten, als Bogenaxe aber die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Lagerfugen angesehen wird. Für Gewölbe mit Lagerfugen senkrecht zur Bogenaxe und für sogenannte homogene Gewölbe (Betonbogen, Monierbogen etc.) besteht in den erwähnten Beziehungen überhaupt kein Unterschied.

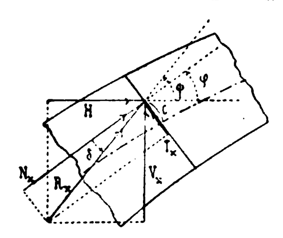


Fig. 82.

Die Grenzwerthe der Normalspannungen σ einer Lagerfuge treten nach 1) im obersten und untersten Elemente derselben ein, sie sind in § 8 ausgedrückt, wonach für den wichtigen Fall symmetrisch zur Axschicht angeordneter Lagerfugen:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \tag{4}$$

und speziell für rechteckige Lagerfugen von der Breite b und Höhe h mit

$$F = b\,h, \qquad W = \frac{b\,h^2}{6}$$

bei Beachtung von 2):

$$\sigma_o = \frac{1}{b\,h}\left(N_x + \frac{6}{h}M_x\right) = \frac{N_x}{b\,h}\left(1 + \frac{6\,c}{h}\right), \tag{5}$$

$$\sigma_u = \frac{1}{b\,h}\left(N_x - \frac{6}{h}M_x\right) = \frac{N_x}{b\,h}\left(1 - \frac{6\,c}{h}\right). \tag{6}$$

Diese Gleichungen gelten auch bei homogenen Gewölben, für welche die Querschnitte hier als Lagerfugen bezeichnet werden. Sollen σ_o, σ_u von gleichem Vorzeichen wie N_x sein, also Druck bedeuten (§ 8), so muss bei rechteckigen Lagerfugen nach 5) 6) c zwischen $-\frac{h}{6}$ und $\frac{h}{6}$, d. h. die Stützlinie (Linie der Angriffspunkte von R_x, N_x in allen Lagerfugen) im mittleren Drittel des Gewölbebogens liegen. Bei beliebigen Lagerfugen hätte nach § 8 c zwischen k_o und $-k_u$ oder die Stützlinie zwischen den Kernlinien zu bleiben, welche eben in jenem Falle mit den Grenzlinien des mittleren Drittels übereinstimmen.

Eine möglichst genaue Berechnung von Tonnengewölben hätten nun den Nachweis zu führen, dass auch bei den ungünstigsten Belastungen und sonstigen Einwirkungen die eintretenden σ_o, σ_u nicht über die zulässigen Grenzen hinausgehen (vergl. Beisp. 13). Man hat sich jedoch bisher gewöhnlich darauf beschränkt, die σ_o, σ_u nur in einzelnen Lagerfugen für wenige im Voraus angenommene Belastungsfälle zu berechnen und von sonstigen Einwirkungen eventuell allein den Erddruck zu berücksichtigen. Daneben wird bei Gewölben aus einzeln Steinen im Allgemeinen verlangt, dass der Transversalkraft T_x durch die Reibung in der Lagerfuge widerstanden werde, also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{T_x}{N_x} \tag{7}$$

unter dem Reibungskoefficienten von Mauer auf Mauer oder δ unter dem Reibungswinkel bleibe, nnr ausnahmsweise soll auf die Schubfestigkeit des Bindemittels Rücksicht genommen werden. Da aber im eigentlichen Gewölbe (abgesehen von den Widerlagern) die Bedingung für δ bei Einhaltung der zulässigen Grenzen von σ_o, σ_u fast immer erfüllt ist (vergl. Bemerk. zu Beisp. 13), so werden bei Berechnung des Gewölbebogens meist nur die σ_o, σ_u in Betracht gezogen. Eventuell könnten jedoch die Längs- und Querschubspannungen nach § 9, also beispielsweise ihre grössten Werthe bei rechteckigen Lagerfugen aus

$$\tau = \frac{3}{2\,b\,h}\,T_x \tag{8}$$

berechnet werden (Beisp. 8, 34, 35).

Es handelt sich nun um die Berechnung der M_x, N_x, T_x in obigen Gleichungen. Damit wird nach 2) auch die Stützlinie bekannt, doch ist diese zur Ermittelung der σ_o, σ_u und sonstigen Beanspruchungen bei Gewölben ebensowenig wie bei eisernen Bogen nothwendig. Die Beziehungen des § 1 für die Schnittkräfte und Schnittmomente enthalten drei Grössen,

zu deren Ermittelung die Gesetze der reinen Statik bei gewöhnlichen Gewölben nicht ausreichen, den Horizontalschub H und die Endmomente M, M'. Um dieser statischen Unbestimmtheit zu begegnen, machten alle älteren Gewölbetheorien willkürliche Annahmen über die Lage der Stützlinie. Brauchbare Begründungen dieser Annahmen wurden zwar gesucht, aber nicht gefunden. Trotzdem wird noch heute meist so gerechnet, als ob ein Gewölbe genügende Sicherheit böte, wenn irgend eine statisch mögliche Stützlinie ohne Ueberschreitung der zulässigen Beanspruchungen eingezeichnet werden kann. Culmann hat dies Verfahren durch ein Raisonnement zu stützen gesucht, nach welchem von allen statisch möglichen Stützlinien diejenige die richtige wäre, bei welcher der Druck in der stärkstgedrückten Fugenkante ein Minimum erreicht, sodass jede den statischen Bedingungen entsprechende Stützlinie entweder die richtige oder eine ungünstigere sein müsste.* Allein das Raisonnement gipfelte in der Annahme: wenn nur eine Stützlinie ohne Ueberschreitung der augenblicklichen Widerstandsfähigkeit möglich sei, so müsse diese auch verwirklicht werden, durch Zunahme der Widerstandsfähigkeit aber (etwa infolge Erhärtens zunächst weich gedachten Materials) trete keine Aenderung der Stützlinie ein; es setzte also gerade das voraus, was bewiesen werden soll, und Culmann selbst ist später nicht mehr darauf zurückgekommen. Ebensowenig Erfolg hatten andere Auskunftsmittel.

Es kann hiernach keinem Zweifel unterliegen, dass die übliche Methode der Stabilitätsuntersuchung von Gewölben einer genügenden theoretischen Grundlage entbehrt. Wenn die darnach berechneten Gewölbe dennoch gehalten haben, so findet dies meist schon in der grossen Sicherheit, mit welcher man zu rechnen pflegt, eine ausreichende Erklärung. Bei Einhaltung dieser Sicherheit mag die fragliche Berechnungsweise in manchen Fällen, insbesondere in solchen, für welche kein besseres Verfahren existirt, als empirische Methode vorläufig eine gewisse Berechtigung behalten. Wenn man jedoch zu Ausführungen übergehen will, für welche noch keine Erfahrungen vorliegen, so macht sich die Mangelhaftigkeit der Theorie in störender Weise geltend. Gewiss liegt hierin ein Hauptgrund, dass gewölbte Brücken bei Weitem noch nicht diejenigen Spannweiten erreicht haben, bis zu welchen sie im Interesse der Solidität und selbst der Schönheit unter Umständen Verwendung finden könnten. Die grössten Lichtweiten von Brückengewölben betragen gegenwärtig 67,1 m für den Cabin-John-Aquaeduct und 65 m bei 17,9 m Laibungspfeil für die Pruthbrücke der österreichischen Staatseisenbahn bei Jaremcze** (vergl. S. 128).

Bei der üblichen Feststellung der Stützlinie wurden meist drei Punkte derselben, und zwar die Durchgangspunkte in Scheitelfuge und Kämpferfugen, frei gewählt, womit drei neue Bedingungen gegeben waren, welche die Grössen H, M, M' bestimmten. Wählte man die Durchgangs-

* Culmann, Die Graphische Statik, Zürich 1866, S. 444. Culmann spricht von der Drucklinie; aber die Drucklinie und Stützlinie, welche das Druckminimum ergeben, bedingen einander.

** Huss, Die grossen gewölbten Brücken der K. K. Staatsbahn Stanislau-Woronienka. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1893, S. 545 und 1894, S. 533.

punkte, in der Bogenaxe, so waren ganz wie bei eisernen Bogen mit drei Gelenken die Endmomente $M = M' = 0$, und der Horizontalschub H durch $M_m = 0$ bestimmt. Die Berechnung hätte sich dann einfach nach § 15 durchführen lassen (Beisp. 13).

Die blose Annahme ist jedoch noch keine Rechtfertigung. Wie verschieden die Resultate je nach den Lagen jener Durchgangspunkte werden können, zeigen schon die Beispiele 13 und 30, nach welchen für die Belastungsverhältnisse der Pruthbrücke beim Durchgange der Stützlinie durch die Mitten der Scheitelfuge und Kämpferfugen in ersterer bei beliebiger Axe Drücke von 18,8 kg, ohne solche Festlegung aber bei parabolischer Axe Drücke von 41,1 kg per qcm entstehen würden. Bei den Kämpfern sänke im ersten Fall der Druck nicht unter 13,6 kg, während im zweiten selbst Zug bis 10,0 kg ermittelt wurde.

Unter solchen Umständen ist es begreiflich, dass man bei Brücken grösserer Spannweiten, für welche genügende Erfahrungen nicht vorlagen, (z. B. Betonbrücken), den üblichen Annahmen durch die Wirklichkeit zu entsprechen suchte. Auf diese Weise sind die Gewölbe mit mehr oder weniger ausgebildeten Kämpfergelenken und Scheitelgelenk entstanden, deren grösstes gegenwärtig die von Präsident v. Leibbrand erbaute Betonstrassenbrücke über die Donau bei Munderkingen in Württemberg aufweist.* Spannweite 50 m, Laibungspfeil 5 m, Gewölbestärke im Scheitel 1,0 m, bei den Kämpfern 1,1 m, dazwischen aber entsprechend den Abweichungen der Stützlinie von der Bogenaxe bis 1,4 m, Gelenke bei 7,5 m Gewölbebreite aus 12 Theilen von 0,5 m Länge in Stahl ausgeführt. Die Einschaltung der Gelenke ergibt den weiteren Vortheil, dass das Setzen sowie kleine Ausweichungen der Widerlager und Temperaturänderungen nur verschwindende Aenderungen der Beanspruchungen zur Folge haben und nicht leicht zu Rissen führen. Nachtheile sind bis jetzt nicht hervorgetreten.

Ein Gewölbe dieser Art ist bei wirksamen Gelenken nach der Anleitung in § 15 zu berechnen (Beisp. 13). Der Einfluss eines in Betracht kommenden Erddrucks kann wie in andern Fällen nachträglich zugefügt werden (s. übrigens Aufg. 8). Bei der Munderkinger Brücke wurden die Gelenke in Cementmörtel eingeschlossen, sobald das Gewölbe unter der Einwirkung des Eigengewichts zur Ruhe gekommen war (Gewölbeschluss 7. August, Ausschalung 4. September, Umhüllung 26. Oktober 1893). Dies sollte Gewähr dafür bieten, dass die Gelenke unversehrt erhalten bleiben, insbesondere nicht durch Rost leiden, nachdem sie dem überwiegenden Einflusse des Eigengewichts gegenüber ihre Dienste geleistet haben. Der Einfluss des Eigengewichts ist auch bei Umhüllung der Gelenke nach § 15 zu berechnen. Bezüglich der Beiträge der Verkehrslast und nachträglicher Temperaturänderungen oder Widerlagerbewegungen kommt es darauf an, in welchem Maasse die Gelenkwirkung als aufgehoben anzunehmen ist. Bei vollständig aufgehobener Wirkung wären die Beziehungen für Bogen ohne Gelenke (§§ 18, 34 35), bei vollständig bleibender Wirkung diejenigen für

* v. Leibbrand, Betonbrücke über die Donau bei Munderkingen, Stuttgart 1894 (auch Zeitschr. f. Bauwesen 1894). Vergl. Köpke, Ueber die Verwendung von drei Gelenken bei Steingewölben, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1888, S. 373. Winkler, Lage der Stützlinie im Gewölbe, Deutsche Bauzeitung 1880, S. 59, 60.

Bogen mit drei Gelenken (§ 15) massgebend. Man würde also am sichersten gehen, wenn man nach beiderlei Formeln rechnen und stets die ungünstigsten Resultate berücksichtigen wollte. Die Beanspruchungen durch Verkehrslast u. s. w. wären den nach § 15 erhaltenen Beanspruchungen durch Eigengewicht allein einfach zu addiren. Uebrigens wurden neuestens durch Landesbaurath Leibbrand in Hohenzollern auch Gewölbe mit offenen Gelenken ausgeführt (bei Inzigkofen und Imnau).

Andere Bestrebungen im Gebiete des Gewölbebaues sind darauf gerichtet, die Gewölbe den Voraussetzungen der Bogentheorie soweit nahe zu bringen, dass dieselben mit genügender Genauigkeit als elastische Bogenträger ohne Gelenke berechnet werden können wie dies für eine Anzahl der grössten Gewölbebrücken bereits geschehen ist.* Man hat also darauf zu achten, dass das Gewölbe bis zu den Kämpfern einen Bogen von angebbarer Axe mit Lagerfugen annähernd senkrecht zu derselben darstellt, dass es bis zum Ausrüsten möglichst spannungslos bleibt oder auf sonstige Art möglichste Uebereinstimmung des spannungslosen mit dem belastungslosen Zustand erreicht wird, dass die Widerlager möglichst wenig nachgeben, aber auch nach etwa eintretenden kleinen Bewegungen keine Zugspannungen oder höchstens so kleine entstehen, welche auch in den Lagerfugen mit Sicherheit übertragen werden, dass infolge geeigneter Wahl des Materials und sorgfältiger Behandlung der Fugen im ganzen Gewölbe innerhalb der Beanspruchsgrenzen ein mittlerer Elasticitätsmodul für Druck angenommen werden darf u. s. w. Der Zahlenwerth dieses konstanten Elasticitätsmoduls kommt für die Beanspruchungen nur bei Berücksichtigung der Temperaturänderungen und Widerlagerbewegungen und daneben bei Ermittelung der Formänderungen (Einsenkungen etc.) in Betracht. Wenn jene Bedingungen möglichst eingehalten werden,** dann ercheint die Berechung von Bogen ohne Gelenke

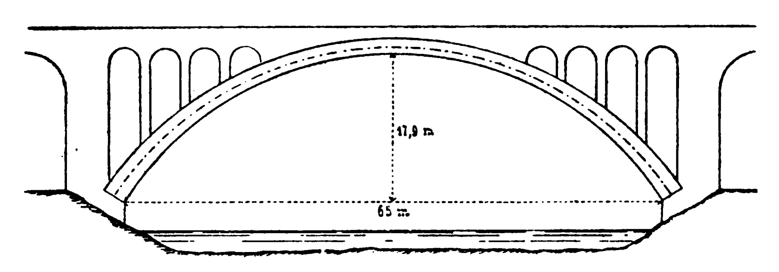


Fig. 83.

auf Grund der Theorie elastischer Bogenträger jedenfalls zuverlässiger als die ganz willkürlichen älteren Methoden. In neuerer Zeit hat man Gewölbe von grosser Spannweite auch hinsichtlich der Lastübertragung und des Aeusseren den eisernen elastischen Bogen näher gebracht, wovon die in Fig. 83 angedeutete Pruthbrücke bei Jaremcze ein Beispiel gibt.

* Siehe z. B. Kulka, Ueber die Berechnung grosser gewölbter Brücken, Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1894, S. 365, 377.

** Vergl. Huss, Vorschläge in Betreff der Ausführung grosser Gewölbe. Bericht des Gewölbeausschusses S. 92, Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Ach.-Vereins 1895. — Deutsche Bauzeitung 1879, S. 117, 127; 1880, S. 58, 184, 210, 243.

Bei ähnlicher Anordnung und sorgfältiger Durchbildung könnten gewölbte Brücken unter günstigen Verhältnissen bis zu weit grösseren Spannweiten als bisher denjenigen Zwecken dienen, für welche sich seit etwa zwanzig Jahren eiserne Bogen nach Art der Dourobrücken bewährt haben. Durch die Pfeiler über den Widerlagern (Fig. 75, 83) wird die Stabilität der letzteren und damit des ganzen Bauwerks wesentlich erhöht.

Soll die Berechnung von Gewölben ohne Gelenke auf Grund der Theorie elastischer Bogenträger erfolgen, so ist nach §§ 17, 34, 35 mit Berücksichtigung der obigen Beziehungen vorzugehen (Beisp. 27—30, 33—37 u. s. w.). Der Einfluss der Temperaturänderungen und etwaiger Widerlagerbewegungen ist in §§ 17, 34, 35 ebenfalls festgestellt; er wurde bisher bei den Beanspruchungen von Gewölben kaum berücksichtigt, ist aber behufs möglichster Vermeidung von Zugspannungen und Rissen immerhin im Auge zu behalten (vergl. Beisp. 37). Bei Gewölben, welche nach den Formeln für Parabelbogen berechnet werden (§ 17), kann der im Ausdrucke von ε vorkommende Werth γ nach § 15, (S. 64) für die gewöhnlichen rechteckigen Querschnitte gesetzt werden:

$$\gamma = \frac{J}{F} = \frac{h^2}{12} \qquad 2)$$

mit einem Mittelwerthe von h^2.

Es empfiehlt sich, die ungünstigsten Belastungen von Gewölben ebenso wie für eiserne Bogen zu bestimmen (§§ 10—12, 17, Beisp. 13 und 1, 9, 10, 11, 28, sowie IV *F, G, H*). Das Vorgehen nach § 11 erfordert besonders dann keinen übermässigen Zeitaufwand, wenn die Verkehrslast nur an wenigen Stellen auf den Bogen übertragen wird (Fig. 83). Die Verkehrslast ist bei gewölbten Brücken im Vergleich zur festen Last kleiner als bei eisernen Brücken, sie wurde z. B. bei der Jaremczer Eisenbahnbrücke gleich 1231 kg, bei der Munderkinger Strassenbrücke gleich 400 kg per qm Fahrbahn angenommen, was etwa $^1/_{12{,}3}$ bezw. $^1/_{16}$ der festen Last ausmacht. Will man mit Rücksicht auf den somit geringeren Einfluss der Verkehrslast nur einige im Voraus gewählte Belastungsfälle behandeln, so bleibt man nicht hinter den bisherigen Anforderungen zurück, wenn bei der (allein nöthigen) Berechnung der ersten Bogenhälfte nebst Widerlager symmetrischer Gewölbe behandelt werden: 1. Feste Last allein; 2. Verkehrbeslastung des ganzen Bogens; 3. Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte; 4. Verkehrsbelastung der zweiten Bogenhälfte (vergl. Beisp. 13, 30). Für gleichmässig vertheilte Last (die Verkehrslast wird meist als solche angenommen) auf dem ganzen Bogen oder einer Bogenhälfte sind in §§ 15—17 besonders einfache Formeln gegeben. Wenn man sich bisher mitunter selbst bei wichtigen Objekten auf die Durchrechnung nur eines Belastungsfalles beschränkte, z. B. Verkehrsbelastung des ganzen Bogens oder einer Bogenhälfte, und nebenbei nur einzelne Fugen ins Auge fasste, so muss dies als gänzlich ungenügend bezeichnet werden (vergl. Beisp. 13, 30).

§ 19. Wiener Versuche mit Gewölben.

In neuester Zeit hat der österreichische Ingenieur- und Architekten-Verein durch einen Ausschuss von geeigneter Zusammensetzung umfassende Versuche über die Formänderungen und Widerstandsfähigkeit

von Gewölben anstellen lassen.* Neben je 7 Hochbaugewölben von 1,35 und 2,70 m Lichtweite, 3 solchen von 4,05 m Weite und 2 Unterbaugewölben von 10 m Weite wurden 4 grössere Objekte von 23 m Lichtweite, 4,6 m Pfeil der Laibung und 2 m Breite erprobt, nämlich:

a) Ein Bruchsteinmauerwerkgewölbe mit kreisbogenförmiger Laibung, Stärke im Scheitel 0,60 m, an den Kämpfern 1,10 m. Versuche mit dem verwendeten Sandstein ergaben: Gewicht per cbm 2580 bis 2620 kg, im Mittel 2590 kg; Elasticitätsmodul für Druck 137000 bis 271000, im Mittel 174000 kg per qcm; Druckfestigkeit 610 bis 920 im Mittel 770 kg. Für Mörtelwürfel aus dem abgebrochenen Mauerwerk wurde das Gewicht per cbm von 1790 bis 2030, im Mittel 1950 kg, die Druckfestigkeit von 56 bis 132, im Mittel 80 kg, gefunden. Inhalt des Gewölbemauerwerks 45 cbm.

b) Ein Ziegelmauerwerkgewölbe mit kreisbogenförmiger Laibung Stärke im Scheitel 0,60 m, an den Kämpfern 1,10 m. Für die verwendeten Ziegel wurden festgestellt: Gewicht des cbm 1420 bis 1700, im Mittel 1580 kg; Elasticitätsmodul für Druck 45000 bis 162000 kg, im Mittel 111000 kg per qcm; Druckfestigkeit 100 bis 290, im Mittel 200 kg. Das Mischungsverhältniss des Mörtels war dasselbe wie im vorigen Falle: ein Raumtheil langsam bindender Kirchdorfer Portlandcement auf ca. 2,6 Raumtheile Sand. Inhalt des Gewölbemauerwerks 45 cbm.

c) Ein Stampfbetongewölbe mit kreisbogenförmiger Laibung und konstanter Stärke von 0,70 m. Für Betonkörper der drei verwendeten Mischungsverhältnisse wurden folgende Zahlen ermittelt:

	1 Portland-cement 3 Sand 5 Schotter	1 Portland-cement 2 Sand 3 Schotter	1 Portland-cement 1 Sand 1 Schotter	
Gewicht per cbm	2170	2100	2220	kg
Elasicitätsmodul f. Druck per qcm	74100	--	264000	„
Druckfestigkeit „ „	107	260	156	„
Elasticitätsmodul f. Zug „ „	98000	280000	250000	„
Zugfestigkeit „ „	9	25	18	„

Der Kern des Gewölbes war aus Beton von 1 : 3 : 5 gebildet, die Mischungsverhältnisse 1 : 2 : 3 und 1 : 1 : 1 kamen an denjenigen Stellen des Rückens bezw. der Laibung zur Verwendung, an welchen infolge der einseitigen Belastung Zugspannungen zu erwarten waren. Mittelbindender Radotiner Portlandcement. Inhalt des Gewölbemauerwerks 38 cbm.

d) Ein Moniergewölbe mit parabolischer Laibung, Stärke im Scheitel 0,35 m, an den Kämpfern 0,60 m. Betonkörper desselben, aus einem Raumtheil mittelbindendem Podoler Portlandcement auf 3 Theile Sand, ergaben folgende Eigenschaften im Mittel: Gewicht per cbm 2310 kg, Elasticitätsmodul für Druck 364000 kg per qcm, Druckfestigkeit 200 kg, Elasticitätsmodul für Zug 400000 kg, Zugfestigkeit 17 kg. Die beiden Einlegegitter bestanden aus Rundeisenstäben von 28,2 m Länge, 1,4 cm

* Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895.

Dicke in der Längsrichtung und 2 m Länge, 0,7 cm Dicke in der Querrichtung. Die Verbindung der Stäbe erfolgte mit doppeltem Draht, Maschenweite 6,5 cm. Inhalt des Gewölbemauerwerks 38 cbm.

Aus den von Professor Brik als einem der Berichterstatter auf Grund des gesammten Versuchsmaterials gezogenen Schlussfolgerungen heben wir folgendes hervor:

I. Die Formänderungen der Bogenaxe der Versuchsgewölbe während der ersten Belastungsstufen wuchsen nahezu proportional der Belastung.

II. Nach Ueberschreiten gewisser Belastungsgrenzen, hier „kritische Belastungen" genannt, entstanden, meist an mehreren Orten der Gewölbe, Risse, welche bei den mit Fugen gemauerten Gewölben durch Ueberwinden des Adhäsionswiderstandes der Mörtelbänder, bei dem Betonbogen und Monierbogen durch Ueberwinden der Zugfestigkeit des Betons hervorgebracht worden sind (vergl. die folgende Tabelle). Es ist also im Einklange mit den bisherigen Anschauungen rathsam, die Querschnittsabmessungen so zu treffen, dass bei den mit Fugen gemauerten Gewölben Zugspannungen überhaupt nicht oder nur in geringem Maasse auftreten.

III. Das Entstehen der ersten Risse erfolgte unmerklich und ohne Begleitung von plötzlichen Formänderungen der Bogenaxe. Die Diagramme der Verschiebungen zeigen vor und nach den ersten Rissebildungen in der Regel keine Unterbrechung ihres stetigen Verlaufes. Die Risse in den mit Fugen gemauerten Gewölben folgten dem Verlaufe der Lagerfugen und bildeten wirkliche „Bruchfugen". In dem Betonbogen und Monierbogen war die Gestalt und Lage der Risse unregelmässig und lief in Verästelungen aus. Nach Entlastung der Gewölbe schlossen sich die Risse mehr oder weniger vollständig; nach erneuter Belastung kamen dieselben jedoch sogleich wieder zum Vorschein, erweiterten sich, auch kamen neue hinzu.

IV. Die Orte der Rissebildungen befanden sich in den Strecken zwischen $^1/_4$ und $^1/_3$ bezw. $^2/_3$ und $^3/_4$ der Stützweite und an den Kämpfern. Sie entsprachen im Allgemeinen den Orten der durch theoretische Untersuchungen ermittelten „gefährlichen" Querschnitte. Nachstehende Tabelle enthält die von den Professoren Melan und Neumann auf Grund der Theorie elastischer Bogenträger berechneten Randspannungen in den Kämpferquerschnitten und gefährlichen Querschnitten (negative Werthe bedeuten Zug). Hierbei wurden für den Monierbogen ein ideelles gleichmässiges Material vorausgesetzt, für den Betonbogen aber, welcher mit ebenen Flächen auf Asphaltplatten zwischen Bogenenden und Kämpferquadern ruhte, die arithmetischen Mittel der mit und ohne Kämpfergelenke erhaltenen Werthe angegeben.

V. Durch das Entstehen der ersten Risse war jedoch der Widerstand der Gewölbe noch nicht erschöpft. Wie die Tabelle zeigt, lag die Bruchbelastung höher als die kritische Belastung: beim Bruchsteingewölbe um 30 %, beim Ziegelgewölbe um 59 %, beim Betonbogen um 31 %, beim Monierbogen um 86 %. Nach Ueberwindung des Zugwiderstandes gelangt nämlich im zusammenhängenden Theile des Gewölbes der weit grössere Druckwiderstand allein zur Geltung. Diese Eigenschaft der

Wiener Versuche mit Gewölben.

Gewölbeart	Proportionalitäts-Grenze						Kritische Belastung						Bruch
	Einseitige Belastung 11,5 p in kg	Randspannungen in kg per qcm	belastete Seite		unbelastete Seite		Einseitige Belastung 11,5 p in kg	Randspannungen in kg per qcm	belastete Seite		unbelastete Seite		Einseitige Belastung 11,5 p in kg
			Kämpferquersch.	Gefährl. Quersch.	Gefährl. Quersch.	Kämpferquersch.			Kämpferquersch.	Gefährl. Quersch.	Gefährl. Quersch.	Kämpferquersch.	
Bruchstein-gewölbe	35075*	σ_o = σ_u =	— 5,4 15,6	14,2 — 2,3	— 3,4 15,8	11,2 — 2,7	56511*	σ_o = σ_u =	— 9,4 21,4	20,8 — 6,7	— 7,5 21,9	17,0 — 7,4	74022
Ziegel-gewölbe	35075	σ_o = σ_u =	— 4,7 12,1	15,8 — 5,6	— 2,5 11,0	9,1 — 3,0	42200	σ_o = σ_u =	— 5,8 13,8	18,0 — 7,0	— 3,5 12,8	10,9 — 4,4	67540
Beton-bogen	56907	σ_o = σ_u =		28,8 — 15,0	— 13,6 26,2		63250	σ_o = σ_u =		31,5 — 17,0	— 15,4 28,4		83275
Monier-bogen	56693	σ_o = σ_u =	— 30,3 43,4	58,1 — 45,5	— 37,0 49,8	36,8 — 27,7	78525	σ_o = σ_u =	— 41,7 58,6	78,0 — 63,8	— 52,0 68,4	51,2 — 40,0	146120

* An Stelle von 35075 und 56511 kg ergaben sich nach Abschluss der Berechnung genauer 34300 und 55736 kg. Auch andere Belastungen wurden nachträglich etwas abweichend von den bei der Berechnung verwendeten gefunden. Vergl. Bericht des Gewölbeausschusses. Wien 1895. Anmerkungen S. 48. 55. 65.

Gewölbe, bei gefährlichen Anlässen die schwächste Seite ihres Widerstands aufzugeben und dafür ihren grössten Widerstand in Wirksamkeit treten zu lassen, ist von hervorragender Bedeutung für den Bestand der Gewölbe.

VI. Bei weiteren Erhöhungen der Belastung wachsen die Deformationen rascher und die Stützlinie nähert sich mehr und mehr den gedrückten Kanten, wodurch die spezifischen Pressungen daselbst immer mehr gesteigert werden, bis der Druck- oder Schubwiderstand des Mauerwerks erschöpft ist und infolge der dadurch bewirkten örtlichen Zerstörungen der Zusammenbruch des ganzen Gewölbes eintritt. Die zulässige Beanspruchung auf Druck ist naturgemäss sowohl von der Qualität der Wölbesteine als von derjenigen des Mörtels abhängig. Zuverlässige Anhaltspunkte können jedoch nur Druckversuche mit gemauerten Versuchskörpern von der Zusammensetzung und Beschaffenheit der auszuführenden Gewölbe bieten.

VII. Aus den vertikalen Verschiebungen von Punkten der Bogenaxen wurden als Näherungswerthe der entsprechenden mittleren „Elasticitätsmoduln" E per qcm berechnet (vergl. S. 19): für das Bruchsteingewölbe 60400 kg, für das Ziegelgewölbe 27800 kg, für den Betonbogen 246000 kg, für den Monierbogen 333800 kg. Inwieferne durch diese Zahlen auch das Gesetz des elastischen Verhaltens dieser Gewölbe zum Ausdruck kommt, entzieht sich der Beurtheilung, weil nur die totalen Verschiebungen erhoben und in Rechnung gezogen wurden. Die Anwendung jener Elasticitätsmoduln auf näherungsweise Berechnung der Verdrehungswinkel der Scheitelquerschnitte aller Versuchsgewölbe für ein und dasselbe Belastungsintervall ergab befriedigende Uebereinstimmung mit den gemessenen Ausschlagwinkeln.

VIII. Alle Ergebnisse, insbesondere jedoch das nachgewiesene Gesetz der Proportionalität von Belastung und Formänderung, führen zu dem Schlusse, dass die erprobten Gewölbe sich im Allgemeinen wie elastische Bogenträger verhalten haben. Es wird daher zutreffend sein, Gewölbe mit ähnlicher Gestalt und gleicher Ausführung wie die Versuchsgewölbe auf Grund der Theorie elastischer Bogenträger ohne Gelenke zu berechnen.

Beispiel 33. Stützenreaktionen eines Bogens von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das vom Gewölbeausschuss des Oesterreichischen Ingenieur- und Architektenvereins erprobte Bruchsteingewölbe* betrugen die Spannweite $l = 2m =$ 23,758 m, die konstante Breite 2 m, der Pfeil der Bogenaxe $f =$ 4,502 m (Lichtweite 23 m, Pfeil der Laibung 4,6 m). Gewölbestärke im Scheitel 0,6 m, an den Kämpfern 1,1 m. Die senkrecht zur Laibung gerichteten Lagerfugen können für die Berechnung als senkrecht zur Bogenaxe gelten. Es sollen nach den einfacheren Formeln für symmetrische Bogen ohne Gelenke von beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten (s. Bemerkungen am Schlusse) der Horizontalschub H, die Endmomente M, M' und die Vertikalreaktionen V, V' berechnet werden, welche durch folgende Einwirkungen entstehen: *a)* Durch das Eigengewicht des Gewölbebogens. *b)* durch beliebige Lasten P bei Abscissen $a =$ 0,629 m, 2,879 m, 5,129 m, 7,379 m, 9,629 m, 11,879 m (wo weitere Versuchslasten angebracht waren,

* Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895, S. 1, 13, 20, 26, 42, 46, 82.

Fig. 84) und symmetrisch zu dieses Punkten, *c*) durch beliebige Verkehrsbelastungen, zusammengesetzt aus Einzellasten an den unter *b*) angeführten Stellen *d*) durch eine Temperaturänderung τ, *e*) durch eine Aenderung Δl der Spannweite ohne Aenderungen der relativen Höhenlage der Kämpfer und Verdrehungen der Endquerschnitte, oder doch nur solche, für welche $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_1 = \frac{\Delta k}{l}$ ist.

Wir haben den Bogen zunächst in eine genügende Anzahl Felder zu theilen, was durch Vertikalschnitte (Beisp. 23, 30) oder Lagerfugen (Querschnitte) geschehen kann. Die Feldergrenzen mögen im vorliegenden Falle Lagerfugen durch die Punkte der Bogenaxe unter den oben erwähnten P und mitten zwischen denselben sein (Fig. 84). Die Abscissen x, Ordinaten y und Gewölbestärken h in den Mitten dieser Felder sind in den Kolumnen 2, 3, 4 der Tabelle II auf S. 135 für die erste Bogenhälfte angeführt, während Kolumne 5 die Längen σ der

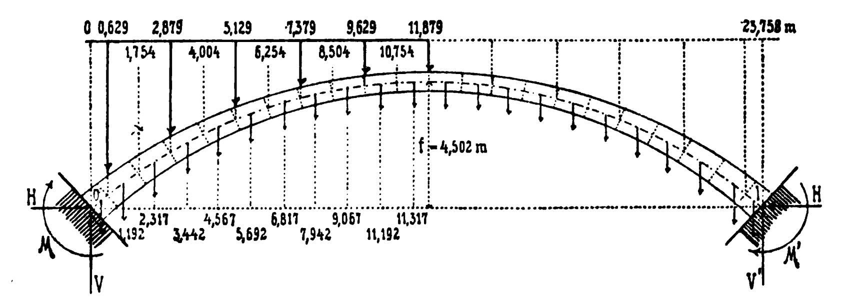


Fig. 84.

Bogenaxe in den fraglichen Feldern enthält (s. Bemerkungen am Schlusse). Die entsprechenden Grössen für die zweite Bogenhälfte sind damit der Symmetrie halber ebenfalls bestimmt. Wir führen die Berechnung für die Gewölbebreite $b = 1$ m durch, dann folgen aus den h der Kolumne 5 unserer Tabelle II die Trägheitsmomente $J = \frac{b h^3}{12}$ der rechteckigen Lagerfugen in Kolumne 6. Die in den übrigen Kolumnen angeführten Werthe ergeben sich ohne Weiteres aus den vorausgegangenen. Alle gelten für Meter als Längeneinheit. Mit $A = 407{,}60$, $B = 1464{,}16$, $C = 5718{,}93$ erhalten wir nach § 34, 7):

$$D = 407{,}60 \cdot 23{,}758^2 - 2 \cdot 23{,}758 \cdot 2975{,}54 + 2 \cdot 25670{,}62 = 140022{,}45,$$

und weiter:

$$A\,C - B^2 = 187271, \qquad \frac{2}{l} D - A\,l = 2102{,}63.$$

a) Eigengewicht.

Die Abscissen a der Angriffspunkte und die Werthe P des Eigengewichts in den einzelnen Feldern sind in den Kolumnen 1 und 2 der Tabelle III (S. 136) eingetragen, womit sich auch die Pa in der dritten Kolumne ergeben. Da nun nach § 34, 15) 16) für beliebige symmetrische Belastung:

$$H = \frac{1}{A\,C - B^2}\left[A \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right) - B \sum_0^m \frac{\sigma}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right)\right], \qquad 1)$$

$$M = M' = \frac{1}{A\,C - B^2}\left[B \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right) - C \sum_0^m \frac{\sigma}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right)\right], \qquad 2)$$

worin nach § 34, 17) gesetzt werden kann:

$$\frac{x}{l} S - S_x = \sum_0^x P a + x \sum_x^m P, \qquad 3)$$

so wurden in Kolumne 5 bis 7 der Tabelle III zunächst diese Summen für die in Kolumne 4 angeführten x der einzeln Felder (vergl. Tab. II) gegeben. Eine gerade, bei x angreifende Last P kann entweder in $\sum_0^x P a$ oder in $x \sum_x^m P$ eingerechnet werden

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle II.* Ax- und Querschnittsverhältnisse.

Feld	x	y	h	σ	$\frac{h^3}{12} = J$	$\frac{\sigma}{J}$	$\frac{\sigma x}{J}$	$\frac{\sigma x^2}{J}$	$\frac{\sigma y}{J}$	$\frac{\sigma y^2}{J}$	$\frac{\sigma x y}{J}$
0	0,314	0,272	1,071	0,825	0,10237	8,06	2,53	0,79	2,19	0,60	0,69
1	1,192	0,967	0,992	1,403	0,08135	17,25	20,56	24,50	16,68	16,13	19,88
2	2,317	1,738	0,910	1,327	0,06280	21,13	48,96	113,44	36,72	63,82	85,09
3	3,442	2,392	0,838	1,278	0,04904	26,06	89,70	308,75	62,34	149,12	214,56
4	4,567	2,943	0,775	1,233	0,03879	31,79	145,18	663,04	93,56	275,35	427,26
5	5,692	3,400	0,722	1,199	0,03136	38,23	217,61	1238,64	129,98	441,93	739,87
6	6,817	3,772	0,683	1,172	0,02655	44,14	300,90	2051,24	166,50	628,04	1134,99
7	7,942	4,064	0,656	1,154	0,02353	49,04	389,48	3093,25	199,30	809,96	1582,85
8	9,067	4,280	0,635	1,140	0,02134	53,42	484,36	4391,69	228,64	978,58	2073,06
9	10,192	4,422	0,618	1,129	0,01967	57,40	585,02	5962,52	253,42	1122,39	2586,96
10	11,317	4,493	0,605	1,127	0,01845	61,08	691,24	7822,76	274,43	1233,01	3105,74
			Summe:	12,987		407,60	2975,54	25670,62	1464,16	5718,93	11970,95
						$= A$			$= B$	$= C$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(jedoch nicht in beide Ausdrücke). Wir nehmen in die erste Summe die in Tabelle III in den Zeilen oberhalb x stehenden P und erhalten so beispielsweise:

für $x = 0,314$: $\quad \sum_0^x P a = 0. \quad \sum_x^m P = 24095 - 0 = 24094$ kg,

$$\frac{x}{l} S - S_x = 0 + 0,314 \,.\, 24095 = 7566 \text{ mk}.$$

für $x = 1,192$ m: $\quad \sum_0^x P a = 665. \quad \sum_x^m P = 24095 - 2117 = 21978$ kg,

$$\frac{x}{l} S - S_x = 665 + 1,192 \,.\, 21978 = 26863 \text{ mk}.$$

* Eine Tabelle für dies Gewölbe ist bereits S. 12 gegeben.

für $x = 2{,}314$ m: $\sum_0^x Pa = 665 + 3980 = 4645$, $\sum_x^m P = 21978 - 3339 = 18639$ kg,

$$\frac{x}{l} S - S_x = 4645 + 2{,}314 \cdot 18639 = 47832 \text{ mk},$$

für $x = 3{,}442$ m: $\sum_0^x Pa = 4645 + 6715 = 11360$, $\sum_x^m P = 18639 - 2898 = 15741$ kg,

$$\frac{x}{l} S - S_x = 11360 + 3{,}442 \,.\, 15741 = 65541 \text{ mk},$$

und in gleicher Weise die übrigen Werthe. Die in Kolumne 8 und 9 der Tabelle III eingetragenen Zahlen ergaben sich dann durch Multiplikation mit den in Tabelle II für die betreffenden x gegebenen $\frac{\sigma}{J}$ und der so entstehenden Werthe mit den y der

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle III. Eigengewicht.

a in m	P in kg	Pa	x in m	$\sum_0^x Pa$	$\sum_x^m P = V_x$	$\frac{x}{l} S - S_x$	$\frac{\sigma}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right)$	$\frac{\sigma y}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right)$	$\frac{\sigma x}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right)$
0,314	2117	665	0,314	0	24095	7566	60980	16590	19142
1,192	3339	3980	1,192	665	21978	26863	463390	448190	552303
2,317	2898	6715	2,317	4645	18639	47832	1010690	1756580	2341855
3,442	2571	8849	3,442	11360	15741	65541	1707800	4085060	5879028
4,567	2296	10486	4,567	20209	13170	80356	2554520	7517950	11666084
5,692	2081	11845	5,692	30695	10874	92590	3539720	12035050	20148510
6,817	1923	13109	6,817	42540	8793	102482	4523560	17062870	30836834
7,942	1818	14439	7,942	55649	6870	110211	5404750	21964900	42924980
9,067	1739	15768	9,067	70088	5052	115894	6191060	26497740	56134418
10,192	1676	17082	10,192	85856	3313	119622	6866300	30362780	69981262
11,317	1637	18526	11,317	102938	1637	121464	7419020	33333660	83960775
Summe:	24095	121464					39741790	155081280	324445191
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tabelle II. Die Werthe der letzten Kolumne in Tabelle III, welche sich durch Multiplikation der Zahlen in Kolumne 7 mit den $\frac{\sigma x}{J}$ in Tabelle II ergaben, wurden im Hinblick auf ein späteres Beispiel beigesetzt.

Mit Rücksicht auf die Summen der Kolumnen 8 und 9 von Tabelle III erhalten wir aus 1) 2) den Horizontalschub und die Endmomente durch das Eigengewicht allein:

$$H = \frac{407{,}60 \,.\, 155081280 - 1464{,}16 \,.\, 39741790}{187271} = 26821 \text{ kg},$$

$$M = M' = \frac{1464{,}16 \,.\, 155081280 - 5718{,}93 \,.\, 39741790}{187271} = -\ 1157 \text{ mk},$$

während mit Rücksicht auf Kolumne 2 unmittelbar oder nach § 17, 33) die entsprechenden Vertikalreaktionen der Kämpfer sind:

$$V = V' = \sum_0^m P = 24095 \text{ kg}.$$

Anstatt wie hier für das gesammte Eigengewicht gleichzeitig hätte man H, M, M', V, V' auch wie unter $b)$ $c)$ aus den Beiträgen der einzeln P oder aus den unter $b)$ bestimmten Influenzlinien (Fig. 85) erhalten können.

b) Beliebige Einzellasten.

Nach § 34, 28)—30) hat man für eine beliebige Einzellast P an beliebiger Stelle a:

$$H = \frac{1}{2}\frac{P}{AC - B^2}\left[a\left(B\sum_0^a\frac{\sigma}{J} - A\sum_0^a\frac{\sigma y}{J}\right) - B\sum_0^a\frac{\sigma x}{J} + A\sum_0^a\frac{\sigma x y}{J}\right], \qquad 4)$$

$$M + M' = \frac{P}{AC - B^2}\left[a\left(C\sum_0^a\frac{\sigma}{J} - B\sum_0^a\frac{\sigma y}{J}\right) - C\sum_0^a\frac{\sigma x}{J} + B\sum_0^a\frac{\sigma x y}{J}\right] - Pa, \qquad 5)$$

$$M - M' = \frac{2Pl}{2D - Al^2}\left[a\left(m\sum_0^a\frac{\sigma}{J} - \sum_0^a\frac{\sigma x}{J}\right) - m\sum_0^a\frac{x\sigma}{J} + \sum_0^a\frac{\sigma x^2}{J}\right] - Pa, \qquad 6)$$

während § 17, 2) 3) liefern:

$$V' = \frac{1}{l}\,(Pa + M - M'), \qquad V = P - V'. \qquad 7)$$

Für $a = m$ können auch die Gleichungen § 34, 35) Verwendung finden.

In Tabelle IV, S. 138, sind zunächst gegeben die den Einzellasten P entsprechenden Abscissen a und sodann die nach Tabelle II erhaltenen Werthe der Summen Σ in 4)—6) für die Felder von 0 bis a (d. h. für die Felder, deren x kleiner als das jeweilige a sind, vergl. Fig. 84), beispielsweise:

für $a = 0{,}629$ m $\quad \sum_0^a \frac{\sigma}{J} = 8{,}06,$

„ $a = 2{,}879$ m $\quad \sum_0^a \frac{\sigma}{J} = 8{,}06 + 17{,}25 + 21{,}13 = 46{,}44,$

„ $a = 5{,}129$ m $\quad \sum_0^a \frac{\sigma}{J} = 46{,}44 + 26{,}09 + 31{,}79 = 104{,}29.$

Damit folgen nach 4)—7) für $a = 0{,}629$ m:

$$H = \frac{P}{374542}\,[0{,}629\,(1464{,}16 \,.\, 8{,}06 - 407{,}60 \,.\, 2{,}19) - 1464{,}16 \,.\, 2{,}53 + 407{,}60 \,.\, 0{,}69]$$
$$= 0{,}0092\ P,$$

$$M + M' = \frac{P}{187271}\,[0{,}629(5718{,}93 \,.\, 8{,}06 - 1464{,}16 \,.\, 2{,}19) - 5718{,}93 \,.\, 2{,}53 + 1464{,}16 \,.\, 0{,}69]$$
$$- 0{,}629\ P = -\ 0{,}5568\ P,$$

$$M - M' = \frac{2P}{2102{,}63}\,[0{,}629\,(11{,}879 \,.\, 8{,}06 - 2{,}53) - 11{,}879 \,.\, 2{,}53 + 0{,}79] - 0{,}629\ P$$
$$= -\ 0{,}6010\ P,$$

(Fortsetzung S. 138 unter der Tabelle).

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle IV: Einzellasten.

a in m	$\sum_0^a \frac{\sigma}{J}$	$\sum_0^a \frac{\sigma x}{J}$	$\sum_0^a \frac{\sigma x^2}{J}$	$\sum_0^a \frac{\sigma y}{J}$	$\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J}$	$\frac{M+M'}{P}$	$\frac{M-M'}{P}$	$\frac{H}{P}$	$\frac{M}{P}$	$\frac{M'}{P}$	$\frac{V}{P}$	$\frac{V'}{P}$
0,629	8,06	2,53	0,79	2,19	0,69	— 0,5568	— 0,6010	0,0092	— 0,5789	0,0221	0,9988	0,0012
2,879	46,44	72,05	138,73	55,59	105,66	— 1,4215	— 2,2477	0,1818	— 1,8346	0,4131	0,9734	0,0266
5,129	104,29	306,93	1110,52	211,49	747,48	— 0,8039	— 2,9942	0,5242	— 1,8990	1,0952	0,9101	0,0899
7,379	186,66	825,44	4400,40	507,97	2622,34	0,6725	— 2,7507	0,9322	— 1,0391	1,7116	0,8052	0,1948
9,629	289,12	1699,28	11885,34	935,91	6278,25	2,1219	— 1,6318	1,2652	0,2450	1,8768	0,6634	0,3366
11,879	407,60	2775,54	25670,62	1464,16	11970,95	2,7259	0	1,3956	1,3629	1,3629	0,5000	0,5000
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

$$M = -\,0{,}5789\,P, \qquad M' = 0{,}0221\,P,$$

$$V' = \frac{P}{23{,}758}\,(0{,}629 - 0{,}6010) = 0{,}0012\,P, \qquad V = P - 0{,}0012\,P = 0{,}9988\,P,$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 7 bis 13 der obenstehenden Tabelle IV berechnet.

Für die zu den obigen Angriffspunkten a der Lasten P hinsichtlich der Bogenmitte symmetrisch gelegenen Lastangriffspunkte ergeben sich die verlangten Grössen nun ohne Rechnung, nämlich:

für $a =$	14,129	16,379	18,629	20,879	23,129 m:
$H : P =$	1,2652	0,9322	0,5242	0,1818	0,0092
$M : P =$	1,8768	1,7116	1,0952	0,4131	0,0221
$M' : P =$	0,2450	— 1,0391	— 1,8990	— 1,8346	— 0,5789
$V : P =$	0,3366	0,1948	0,0899	0,0266	0,0012
$V' : P =$	0,6634	0,8052	0,9101	0,9734	0,9988

Indem die Werthe H, M, M', V, V' für $P = 1$ bei allen jetzt berücksichtigten a in Fig. 85 als Ordinaten aufgetragen wurden, entstunden die verzeichneten Influenzlinien dieser Grössen (§ 12), aus welchen die Beiträge zu letzteren auch für zwischenliegende a entnommen werden können.

c) Beliebige Verkehrsbelastungen.

Um die H, M, M', V, V' für irgend welche bei beliebigen a gleichzeitig wirkenden Lasten P zu erhalten, hat man deren Werthe für die einzeln P einfach zu addiren. Wirken z. B. auf der ersten Trägerhälfte bei $a = 0{,}629$ und $a = 11{,}879$ m gleiche Lasten $\frac{P}{2}$, bei den übrigen in Tabelle IV angeführten a gleiche Lasten P, wie dies bei den Wiener Versuchen der Fall war, dann erhält man aus Kolumne 9 der Tabelle IV:

$$H = P\left(\frac{0{,}0092}{2} + 0{,}1818 + 0{,}5242 + 0{,}9322 + 1{,}2652 + \frac{1{,}3956}{2}\right) = 3{,}6058\, P,$$

und in gleicher Weise aus den Kolumnen 10 bis 13:

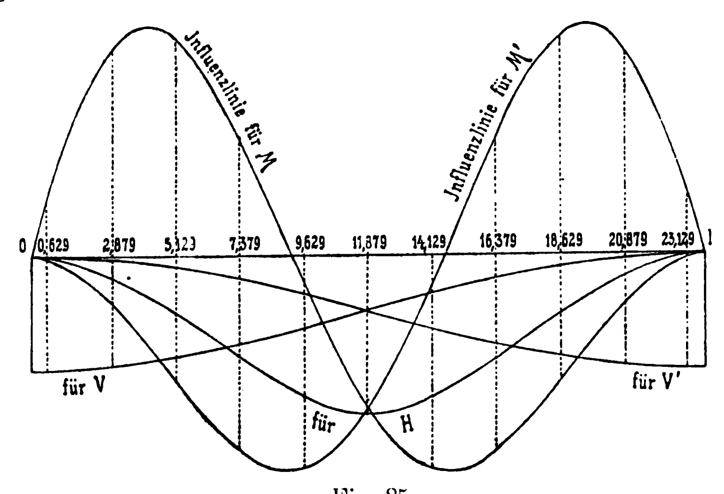


Fig. 85.

$$M = -\,4{,}1357\,P, \quad M' = 5{,}7892\,P,$$
$$V = 4{,}1015\,P, \quad V' = 0{,}8985\,P,$$

also beispielsweise für $P = 3430$ kg (Proportionalitätsgrenze, vergl. S. 132):

$$H = 12368 \text{ kg},$$
$$M = -\,14185 \text{ mk}, \quad M' = 19857 \text{ mk},$$
$$V = 14068 \text{ kg}, \quad V' = 3082 \text{ kg}.$$

Liegen die angeführten Lasten, symmetrisch zur Mitte übertragen, auf der zweiten Trägerhälfte, so hat man:

$$H = 3{,}6058\,P,$$
$$M = 5{,}7892\,P, \quad M' = -\,4{,}1357\,P,$$
$$V = 0{,}8985\,P, \quad V' = 4{,}1015\,P,$$

und wirken die Lasten gleichzeitig auf beiden Bogenhälften, wobei also auch die Last in der Bogenmitte den Werth P erlangt, dann folgen:

$$H = 2\,.\,3{,}6058\,P = 7{,}2112\,P,$$
$$M = M' = -\,4{,}1357\,P + 5{,}7892\,P = 1{,}6535\,P,$$
$$V = V' = 4{,}1015\,P + 0{,}8985\,P = 5\,P.$$

Wären die berechneten Grössen für die jetzt berücksichtigten Belastungen und das Eigengewicht zusammen zu bestimmen, so hätte man den vorstehenden Werthen die unter *a*) erhaltenen zu addiren.

Anstatt wie hier aus den Beiträgen der Einzellasten hätte man die H, M, M', V, V' auch sofort für die ganze angenommene Verkehrsbelastung berechnen können. Es wären die Formeln § 34, 12)—14) zu verwenden gewesen, wozu sich die S_x enthaltenden Summen Σ wie in Beisp. 43 gefunden hätten. Doch ist die Bestimmung der Beiträge der Einzelverkehrslasten besonders dann vorzuziehen, wenn man behufs Ermittelung der ungünstigsten Belastungen auch die Schnittlinien und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke erhalten will (Beisp. 1), ohne hierbei von den in § 16 gegebenen Gleichungen für Parabelbogen Gebrauch zu machen.

d) Temperaturänderungen.

Für eine beliebige Temperaturänderung τ gelten neben $V = V' = 0$ nach § 34, 36) 37):

$$H = \frac{A}{A\,C - B^2}\, m\, E\, \alpha\, \tau, \qquad 8)$$

$$M = M' = \frac{B}{A}\, H, \qquad 9)$$

also im vorliegenden Falle:

$$H = \frac{407{,}60\,.\,11{,}879}{187271}\, E\,\alpha\,\tau = \frac{E\,\alpha\,\tau}{38{,}677},$$

$$M = M' = \frac{1464{,}16}{407{,}60}\, H = 3{,}5921\, H = \frac{E\,\alpha\,\tau}{10{,}767},$$

und beispielsweise für $E = 175000$ kg per qcm, $\alpha = 0{,}0000118$, mit $E\alpha = 175000\,.\,100^2\,.\,0{,}0000118 = 20650$:

$$H = 534\,\tau \text{ kg}, \qquad M = M' = 1918\,\tau \text{ mk}.$$

e) Bewegungen der Kämpfer.

Für eine Aenderung der Spannweite um $\Delta\, l$, ohne andre als die in der Aufgabestellung zugelassenen Bewegungen der Kämpfer, hat man nach § 34, 41) 42) neben $V = V' = 0$;

$$H = -\frac{A}{A\,C - B^2}\,\frac{E\,\Delta\, l}{2}, \qquad 10)$$

$$M = M' = \frac{B}{A}\, H, \qquad 11)$$

also im vorliegenden Falle:

$$H = -\frac{407{,}60}{187271}\,\frac{E\,\Delta\, l}{2} = -\frac{E\,\Delta\, l}{918{,}90},$$

$$M = M' = 3{,}5921\, H = -\frac{E\,\Delta\, l}{255{,}81},$$

und beispielsweise mit $E = 175000\,.\,100^2$ kg per qm, wenn $\Delta\, l$ in cm eingesetzt werden soll, in welchem Falle nach Substitution vorstehenden Werthes von E in unsere für m als Längeneinheit geltenden Gleichungen noch mit 100 zu dividiren ist:

$$H = -\,19045\,\Delta\, l \text{ kg}, \qquad M = M' = -\,68410\,\Delta\, l \text{ mk}.$$

Für andere als die oben angenommenen Bewegungen der Kämpfer würden anstatt 10) 11) die Formeln § 34, 38)--40) anzuwenden sein, wobei nach § 17, 1) 2) im Allgemeinen auch die V, V' beeinflusst werden.

Bemerkungen betreffend die Herbeileitung verwendeter Grössen.

Wir haben oben die Werthe der y, h, σ als gegeben angenommen, da die Anwendung von Formeln für beliebige Axform und beliebige Querschnitte gezeigt werden sollte. In Wirklichkeit war jedoch die Gewölbelaibung nach einem Kreisbogen von der Sehne 23 m und dem Pfeile 4,6 m gekrümmt, während der Gewölberücken einem Kreisbogen durch die Enden der zur Laibung senkrechten Lagerfugen an den Kämpfern und im Scheitel entsprach (Gewölbestärken daselbst 1,1 und 0,6 m), und die Bogenaxe als ein Kreisbogen durch die Mitten dieser Lagerfugen betrachtet wurde.

Nach § 15, 11) hat man für die Radien dieser Kreisbogen

$$r = \frac{l^2}{8\,f} + \frac{f}{2},$$

woraus für die Laibung mit $l = 23$ m, $f = 4{,}6$ m folgt: $r = 16{,}675$ m. Da ferner nach § 15, 10) für letztere

$$\sin\varphi_0 = \frac{l}{2\,r} = \frac{11{,}5}{16{,}675}, \qquad \cos\varphi_0 = \frac{r - f}{r} = \frac{12{,}075}{16{,}675},$$

also für die Horizontalprojektion und Vertikalprojektion der Kämpferfugen d_0 unter Voraussetzung von Lagerfugen senkrecht zur Laibung:

$$d_0 \sin\varphi_0 = 1{,}1\,\frac{11{,}5}{16{,}675} = 0{,}758 \text{ m},$$

$$d_0 \cos \varphi_0 = 1{,}1 \frac{12{,}075}{16{,}675} = 0{,}796 \text{ m},$$

so folgen für den Gewölberücken $l = 23 + 2 . 0{,}758 = 25{,}516$ m, $f = 4{,}6 + 0{,}6 - 0{,}796 = 4{,}404$ m, $r = 19{,}261$ m. Der Bogenaxe aber, auf welche wir in der Folge die Bezeichnungen l, f, r allein beziehen, entsprechen:

die Spannweite $l = 23 + 0{,}758 = 23{,}758$ m,

der Pfeil $f = 4{,}6 + 0{,}3 - 0{,}398 = 4{,}502$ m,

der Radius $r = \frac{23{,}758^2}{8 . 4{,}502} + \frac{4{,}502}{2} = 17{,}923$ m.

Für beliebige Abscissen x der Bogenaxe sind nach § 15, 9) die Ordinaten:

$$y = \sqrt{(r-f)^2 + x(l-x)} - (r-f),$$

während nach § 15, 10) dem Neigungswinkel φ entsprechen:

$$\sin \varphi = \frac{m-x}{r}, \qquad \cos \varphi = \frac{r-f+y}{r}.$$

Nach Einsetzen der Werthe von $l = 2m, f, r$ folgen:

$$y = \sqrt{13{,}421^2 x + (237{,}58 - x)} - 13{,}421,$$

$$\sin \varphi = \frac{11{,}879 - x}{17{,}923}, \qquad \cos \varphi = \frac{13{,}421 + y}{17{,}923}.$$

Diese Formeln haben sowohl die y der Feldermitten in Tabelle II als die y, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ und φ der Feldergrenzen in Tabelle V geliefert.

Nachdem der Gewölbebogen auf Grund der angeführten l, f, r in grossem Maassstabe verzeichnet und die Eintheilung in Felder vorgenommen war, liessen sich die Gewölbestärken in den Mitten wie an den Enden der letzteren am einfachsten aus dieser Darstellung entnehmen (Tabellen II, V). Auch die Axlängen σ in den einzelnen Feldern hätten sich bei der geringen Krümmung der Axe in denselben graphisch ermitteln lassen. Indessen wurden sie aus

$$\sigma = r(\varphi - \varphi')$$

berechnet, worin r den Radius der Bogenaxe und φ, φ' die Neigungswinkel der letzteren am Anfange und Ende des betreffenden Feldes in Bogenlängen bezeichnen. So ergab sich z. B. für Feld 1 (vergl. Tabelle V):

$$\sigma = 17{,}923 \, (0{,}724603 - 0{,}678595) = 0{,}825.$$

Die Axlänge für den halben Bogen findet sich:

$$\frac{s}{2} = r \varphi_0 = 17{,}923 . 0{,}724603 = 12{,}987 \text{ m},$$

sie muss natürlich mit der Summe der σ für denselben übereinstimmen.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle V. Feldergrenzen.

x in m	y in m	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	φ^0	$\varphi^0 \frac{\pi}{180}$	h in m
0	0	0,6628	0,7488	41,5167	0,724603	1,100
0,629	0,531	0,6277	0,7784	38,8806	0,678595	1,035
1,754	1,368	0,5649	0,8251	34,3953	0,600311	0,948
2,879	2,077	0,5023	0,8647	30,1522	0,526255	0,872
4,004	2,679	0,4394	0,8983	26,0656	0,454931	0,805
5,129	3,182	0,3766	0,9264	22,1233	0,386125	0,748
6,254	3,596	0,3138	0,9495	18,2883	0,319191	0,700
7,379	3,928	0,2511	0,9680	14,5425	0,253815	0,668
8,504	4,181	0,1883	0,9821	10,8536	0,189431	0,645
9,629	4,360	0,1255	0,9921	7,2097	0,125833	0,627
10,754	4,467	0,0628	0,9980	3,6006	0,062842	0,611
11,879	4,502	0	1	0	0	0,600

Das Gewicht des Gewölbemauerwerks betrug 2400 kg per cbm. Es wurden demgemäss die Belastungen durch das Eigengewicht des Gewölbes in den einzelnen Feldern anf die Breite 1 gesetzt:

$$P = 2400\,\sigma\,\frac{h_a + 2\,h + h_e}{4} = 600\,\sigma\,(h_a + 2\,h + h_e),$$

unter h_a, h, h_e die Gewölbestärken am Anfang, in der Mitte und am Ende des betreffenden Feldes verstanden. Doch hätte es auch genügt, einfacher anzunehmen:

$$P = 2400\,\sigma\,h.$$

So erhält man nach beiden Gleichungen für das erste Feld:

$$P = 600 . 0{,}825\,(1{,}1 + 2 . 1{,}071 + 1{,}035) = 2117 \text{ kg},$$
$$P = 2400 . 0{,}825 . 1{,}071 = 2121 \text{ kg},$$

und für das letzte Feld der ersten Bogenhälfte:

$$P = 600 . 1{,}127\,(0{,}611 + 2 . 0{,}605 + 0{,}600) = 1637 \text{ kg},$$
$$P = 2400 , 1{,}127 . 0{,}605 = 1636 \text{ kg}.$$

Bemerkungen betreffend die Genauigkeit berechneter Grössen.

Die in § 34 abgeleiteten Formeln zur unmittelbaren Berechnung von H, M, M', welche oben verwendet wurden, beruhen auf den gewöhnlichen Vernachlässigungen des Einflusses der Axialkraft N_x und der Glieder mit r im Nenner (d. h. auch der Ausdrücke X_2, Y_2, Z_2 in § 26, entsprechend der Vernachlässigung von ε, β bei Parabelbogen). Sie liefern also für Bogen von beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten diejenigen Werthe, welche man sonst auf umständlichere Weise zu berechnen gewohnt ist. Dass jene Vernachlässigungen für Bogen mit zwei Gelenken zulässig sein können, ist in § 32 bewiesen und geht auch daraus hervor, dass der fragliche Einfluss für Halbkreisbogen mit zwei Gelenken verschwindet (wegen $f = r$). Inwieweit die Vernachlässigung bei Bogen ohne Gelenke gestattet ist, können nur Proberechnungen lehren. Wir haben in § 35 auch genauere Formeln für Bogen von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten abgeleitet, und nach diesen in Beisp. 43 die wichtigsten der oben verlangten Grössen berechnet. Die Resultate beider Berechnungen sind in der folgenden Tabelle VI zusammengestellt.

Hiernach können besonders bezüglich der Momente durch Belastung sehr grosse Abweichungen gegen die genaueren Werthe eintreten. Da nun z. B. die Einsenkungen wesentlich durch die Momente bedingt sind, so wird man bei Berechnung derselben unter den oben erwähnten Vernachlässigungen im Allgemeinen keine genügend genauen Resultate zu erwarten haben, was denn auch entsprechende Berechnungen bestätigen (Beisp. 44). Bei Parabelbogen würde bei Vernachlässigung von ε, β für eine beliebige auf die Spannweite gleichmässig vertheilte Last mit $M_x = 0$ auch die Einsenkung in der Trägermitte $e = 0$. Vergl. S. 72). Indessen kommt es bei der Berechnung von Bogenträgern in erster Linie auf die Beanspruchungen des Materials an, vor allem auf die Normalspannungen σ_o, σ_u in den obersten und untersten Querschnittselementen. Wie diese durch jene Vernachlässigungen beeinflusst werden, muss die Fortsetzung vergleichender Berechnungen ergeben, weshalb in den Tabellen der folgenden Beispiele 34, 35 den mit den genaueren H, M, M', V, V' berechneten Spannungen die mit den obigen in ganz gleicher Weise erhaltenen in kleinem Drucke beigesetzt sind. Die wichtigsten Resultate enthält die Tabelle des Beisp. 35, welche zeigt, dass die von der gesammten Belastung herrührenden Spannungen σ_o, σ_u, τ weit weniger ungünstig als die M, M' durch die fraglichen Vernachlässigungen beeinflusst werden. Vergl. auch die entsprechenden Stützlinien in Beisp. 36.

Man könnte noch fragen, ob in Fällen wie dem vorliegenden die einfacheren Formeln für parabolische Bogen von konstantem (mittlerem) $J \cos\varphi$ zur Berechnung von H, M, M', V, V' verwendet werden dürfen. Wir haben deshalb in Beisp. 27 alle oben verlangten Grössen nach diesen Formeln berechnet und die wichtigsten Resultate in einer der Tabelle VI (S. 143) ganz entsprechenden Tabelle zusammengestellt (S. 112). Der Vergleich zeigt, dass die Berechnung nach jenen Formeln im vorliegenden Falle nicht genügend gewesen wäre. Die in Beisp. 27 vewendeten Werthe von c, ε ergaben sich wie folgt. Nach § 15 oder §§ 27, 29 sind Mittelwerthe für den Bogen

$$\gamma = \frac{J}{F}, \qquad c = J \cos\varphi,$$

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle VI. Vergleiche.

Für	Grösse	oben berechnet	genauer berechnet	Abweichung in %
Eigengewicht allein	H	26821	25796	3,97
	$M = M'$	— 1157	— 4902	76,40
	$V = V'$	24095	24095	0
Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte allein	$\frac{H}{P}$	3,6058	3,8836	7,15
	$\frac{M}{P}$	— 4,1357	— 3,1460	31,46
	$\frac{M'}{P}$	5,7892	6,8320	15,26
	$\frac{V}{P}$	4,1015	4,1038	0,06
	$\frac{V'}{P}$	0,8985	0,8962	0,26
Verkehrsbelastung beider Bogenhälften	$\frac{H}{P}$	7,2112	7,7672	7,15
	$\frac{M}{P} = \frac{M'}{P}$	1,6535	3,6860	55,14
	$\frac{V}{P} = \frac{V'}{P}$	5	5	0
eine Temperaturänderung um τ^0	$\frac{H}{E\alpha\tau}$	$\frac{1}{38,677}$	$\frac{1}{39,993}$	3,40
	$\frac{M}{E\alpha\tau} = \frac{M'}{E\alpha\tau}$	$\frac{1}{10,767}$	$\frac{1}{11,140}$	3,46
	$V = V'$	0	0	0
eine Aenderung der Spannweite um Δl	$\frac{H}{E\Delta l}$	$-\frac{1}{918,90}$	$-\frac{1}{950,16}$	3,40
	$\frac{M}{E\Delta l} = \frac{M'}{E\Delta l}$	$-\frac{1}{255,81}$	$-\frac{1}{264,68}$	3,46
	$V = V'$	0	0	0

während

$$\varepsilon = \frac{15\gamma}{8}\left(\frac{r-f}{rf}\right)^2 \qquad \text{mit } r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}.$$

Da nun für rechteckige Querschnitte $\frac{J}{F} = \frac{h^2}{12}$, so hat man bei beliebigen Feldlängen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Mittelwerthe

$$\gamma = \frac{1}{6l}\sum_0^m \lambda h^2, \qquad c = \frac{2}{l}\sum_0^m \lambda J \cos\varphi.$$

Verwendet man hierin die in Tabelle II (S. 135) gegebenen h, J für die Feldermitten und mit den dortigen y

$$\cos\varphi = \frac{13,421 + y}{17,923},$$

so folgen:

$$\gamma = \frac{1}{6 \,.\, 23{,}758} [0{,}629 \,.\, 1{,}071^2 + 1{,}125 \,(0{,}992^2 + \ldots + 0{,}605^2)] = 0{,}049922,$$

$$c = \frac{1}{11{,}879} [0{,}629 \,.\, 0{,}10237 \,.\, 0{,}7640 + 1{,}125 \,(0{,}08135 \,.\, 0{,}8028 + \ldots + 0{,}01845 \,.\, 0{,}9995)]$$
$$= 0{,}035780,$$

$$\varepsilon = \frac{15 \,.\, 0{,}049922}{8} \left(\frac{17{,}923 - 4{,}502}{17{,}923 \,.\, 4{,}502}\right)^2 = 0{,}002590.$$

Anstatt wie hier hätten wir c, γ auch wie am Schlusse des Beispiels 37 berechnen können.

Beispiel 34. Beanspruchungen eines Bogens ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das im vorigen Beispiel behandelte Versuchsgewölbe des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins sollen die Momente M_x, Normalkräfte N_x, Transversalkräfte T_x, nebst den davon herrührenden Normalspannungen σ und Schubspannungen τ in den unten angeführten Querschnitten x (Lagerfugen, s. Tabelle V und Fig. 84) bestimmt werden: *a*) für Belastung durch das Eigengewicht des Gewölbebogens allein; *b*) für beliebige gleiche Lasten P bei a = 2,879 m, 5,129 m, 7,379 m, 9,629 m und halb so grosse Lasten bei a = 0,629 m, 11,879 m, wie solche bei den Versuchen wirksam waren.

Nach § 17 hat man die Vertikalkraft, das Moment und die Trasversalkraft bei x:

$$V_x = V - \sum_0^m P, \tag{1}$$

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) = M - Hy + V_x x + \sum_0^x Pa, \tag{2}$$

$$N_x = V_x \sin\varphi + H\cos\varphi, \tag{3}$$

$$T_x = V_x \cos\varphi - H\sin\varphi. \tag{4}$$

Speziell für symmetrische Belastung sind:

$$V = \sum_0^m P, \quad \text{für } x < m \qquad V_x = \sum_x^m P. \tag{5}$$

Die y, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ zu den in Frage kommenden x (Feldgrenzen) sind in Tabelle V des Beispiels 33 (S. 141) gegeben.

Werden vorstehende Grössen wie im vorigen Beispiel auf die Gewölbebreite b = 1 m = 100 cm bezogen, so hat man nach § 18, 5) 6) die Normalspannungen σ_o, σ_u im obersten und untersten Querschnittselement, welche alle übrigen σ einschliessen, per qcm:

$$\sigma_o = \frac{1}{10000\,h}\left(N_x + \frac{6}{h} M_x\right) \tag{6}$$

$$\sigma_u = \frac{1}{10000\,h}\left(N_x - \frac{6}{h} M_x\right) \tag{7}$$

und nach § 18, 8) die numerisch grösste Schubspannung, welche in der Axschicht auftritt, per qcm:

$$\tau = \frac{1{,}5\, T_x}{10000\, h}. \tag{8}$$

In diesen Formeln ist, wie schon im vorigen Beispiel, h in Metern auszudrücken.

Bei den folgenden Angaben bezüglich des Gangs der Berechnung verwenden wir die in den Schlussbemerkungen zum vorigen Beispiel angeführten genaueren H, M, V, während in den Tabellen die in ganz gleicher Weise mit den im vorigen Beispiel erhaltenen H, M, V berechneten Werthe in kleinerem Drucke beigefügt sind.

Wie schon anderwärts erwähnt (§ 9 mit Beisp. 8) braucht man die Schubspannnngen τ bei vollwandigen Bogen gewöhnlich nicht zu berücksichtigen, was durch die hier beabsichtigte Berechnung und die sich anschliessende des Beispiels 35 insbesondere für Gewölbe bestätigt werden soll.

a) Eigengewicht.

Die Werthe a, P, Pa sind entsprechend den Angaben des Beispiels 33 (S. 136) in der folgenden Tabelle VII angeführt. Mit $V = 24095$ kg, $H = 25796$ kg, $M = -4902$ mk erhalten wir für $x = 0$:

$$V_x = V = 24095 \text{ kg}, \qquad M_x = M = -4902 \text{ mk},$$
$$N_x = 24095 \,.\, 0{,}6628 + 25796 \,.\, 0{,}7488 = 35286 \text{ kg},$$
$$T_x = 24095 \,.\, 0{,}7488 - 25796 \,.\, 0{,}6628 = 945 \text{ ,, },$$
$$\sigma_o = \frac{1}{11000}\left(35286 - \frac{6}{1{,}1}\, 4902\right) = 0{,}77 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{11000}\left(35286 + \frac{6}{1{,}1}\, 4902\right) = 5{,}64 \text{ ,, };$$
$$\tau = \frac{1{,}5 \,.\, 945}{11000} = 0{,}13 \text{ kg};$$

bei $x = 0{,}629$ m:

$$V_x = 24095 - 2117 = 21978 \text{ kg}, \qquad \sum_0^x Pa = 665 \text{ mk},$$
$$M_x = -4902 - 25796 \,.\, 0{,}531 + 21978 \,.\, 0{,}629 + 655 = -4110 \text{ mk},$$
$$N_x = 21978 \,.\, 0{,}6277 + 25796 \,.\, 0{,}7784 = 33875 \text{ kg},$$
$$T_x = 21978 \,.\, 0{,}7784 - 25796 \,.\, 0{,}6277 = 916 \text{ ,, },$$
$$\sigma_o = \frac{1}{10350}\left(33875 - \frac{6}{1{,}035}\, 4110\right) = 0{,}97 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{10350}\left(33875 + \frac{6}{1{,}035}\, 4110\right) = 5{,}57 \text{ ,, },$$
$$\tau = \frac{1{,}5 \,.\, 916}{10350} = 0{,}13 \text{ kg};$$

bei $x = 1{,}754$ m:

$$V_x = 21978 - 3339 = 19639 \text{ kg}, \qquad \sum_0^x Pa = 665 + 3980 = 4645 \text{ mk},$$
$$M_x = -4902 - 25796 \,.\, 1{,}368 + 18639 \,.\, 1{,}754 + 4645 = -2853 \text{ mk},$$
$$N_x = 18639 \,.\, 0{,}5649 + 25796 \,.\, 0{,}8251 = 31813 \text{ kg},$$
$$T_x = 18639 \,.\, 0{,}8251 - 25796 \,.\, 0{,}5649 = 807 \text{ ,, },$$
$$\sigma_o = \frac{1}{9489}\left(31813 - \frac{6}{0{,}948}\, 2853\right) = 1{,}45 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{1}{9480}\left(31813 + \frac{6}{0{,}948}\, 2853\right) = 5{,}26 \text{ ,, },$$
$$\tau = \frac{1{,}5 \,.\, 807}{9480} = 0{,}13 \text{ kg}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Tabelle VII berechnet.

b) Einseitige Belastung.

Die Abscissen a der Lastangriffspunkte sind in der ersten Kolumne der nachstehenden Tabelle VIII eingetragen (vergl. Fig. 84). Aus den Schlussbemerkungen des Beisp. 33 entnehmen wir $V = 4{,}1038\, P$, $H = 3{,}8836\, P$, $M = -3{,}1460\, P$. Es folgen damit nach 1)—8) bei Beachtung der Tabelle VIII für $x = 0$:

$$V_x = V = 4{,}1038\, P, \quad \sum_0^x Pa = 0, \quad M_x = M = -3{,}1460\, P,$$
$$\frac{N_x}{P} = 4{,}1038 \,.\, 0{,}6628 + 3{,}8836 \,.\, 0{,}7488 = 5{,}6280,$$
$$\frac{T_x}{P} = 4{,}1038 \,.\, 0{,}7488 - 3{,}8836 \,.\, 0{,}6628 = 0{,}4988,$$

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle VII. Eigengewicht.

a in m	P in kg	Pa	x in m	V_x	$\sum_0^x Pa$	M_x	N_x	T_x	σ_o	σ_u	τ
0,314	2117	665	0	24095	0	− 4902	35286	945	0,77	5,64	0,13
				"	"	− 1157	36054	265	2,70	3,85	0,04
1,192	3339	3980	0,629	21978	665	− 4110	33875	916	0,97	5,57	0,13
				"	"	− 910	34673	272	2,83	3,86	0,04
2,317	2898	6715	1,754	18639	4645	− 2853	31813	807	1,45	5,26	0,13
				"	"	− 510	32659	228	3,10	3,79	0,04
3,442	2571	8849	2,879	15741	11360	− 1802	30212	654	2,04	4,89	0,11
				"	"	− 166	31099	139	3,46	3,68	0,02
4,567	2296	10486	4,004	13170	20209	− 1068	28828	496	2,59	4,57	0,09
				"	"	− 69	29748	45	3,63	3,76	0,01
5,692	2081	11845	5,129	10874	30695	− 517	27992	359	3,19	4,30	0,07
				"	"	− 34	28942	− 27	3,83	3,91	− 0,01
6,817	1923	13109	6,254	8793	42540	− 133	27252	254	3,73	4,06	0,06
				"	"	− 74	28226	− 67	3,94	4,12	− 0,01
7,942	1818	14439	7,379	6870	55649	114	26696	173	4,15	3,84	0,04
				"	"	− 167	27688	− 85	3,92	4,37	− 0,02
9,067	1739	15768	8,504	5052	70088	295	26286	104	4,50	3,65	0,02
				"	"	− 243	27292	− 89	3,88	4,58	− 0,02
10,192	1676	17082	9,629	3313	85856	385	26008	55	4,74	3,56	0,01
				"	"	− 340	27025	− 79	3,79	4,88	− 0,02
11,317	1637	18526	10,754	1637	102938	410	25847	14	4,89	3,57	0,00
				"	"	− 424	26872	− 51	3,72	5,08	− 0,01
			11,879	0	121464	428	25796	0	5,01	3,59	0
				"	"	− 463	26821	0	3,78	5,21	0

$$\frac{10000\,\sigma_o}{P} = \frac{1}{1,1}\left(5,6280 - \frac{6}{1,1}\,3,1460\right) = -\,10,484, \qquad \frac{10000\,\sigma_u}{P} = \frac{1}{1,1}\left(5,6280 + \frac{6}{1,1}\,3,1460\right) = 20,716,$$

$$\frac{10000\,\tau}{P} = \frac{1,5\,.\,0,4988}{1,1} = 0,680;$$

für $x = 0,629$ m, wobei zu beachten, dass die erste, bei $a = 0,629$ m wirkende Last nach dem Querschnitt x angreift:

$$V_x = V = 4,1038\,P, \qquad \sum_0^x Pa = 0,$$

$$\frac{M_x}{P} = -\,3,1460 - 3,8836\,.\,0,531 + 4,1038\,.\,0,629 = -\,2,6269,$$

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle VIII. Einseitige Verkehrslast. Belastete Seite.

a in m	Last	x in m	$\frac{V_x}{P}$	$\frac{\sum_0^x P a}{P}$	$\frac{M_x}{P}$	$\frac{N_x}{P}$	$\frac{T_x}{P}$	$\frac{10000\,\sigma_o}{P}$	$\frac{10000\,\sigma_u}{P}$	$\frac{10000\,\tau}{P}$
		0	4,1038	0	— 3,1460	5,6280	0,4988	— 10,484	20,716	0,680
			4,1015	"	— 4,1357	5,4185	0,6813	— 15,582	25,433	0,929
0,629	$\frac{P}{2}$	0,629	4,1038	0	— 2,6269	5,5990	0,7567	— 9,304	20,123	1,097
			4,1015	"	— 3,4706	5,3813	0,9290	— 14,240	24,638	1,346
		1,754	3,6038	0,3145	— 1,8232	5,2402	0,7797	— 6,645	17,700	1,234
			3,6015	"	— 2,4369	5,0096	0,9347	— 10,985	21,554	1,479
2,879	P	2,879	3,6038	0,3145	— 0,5220	5,1683	1,1655	2,494	9,359	2,005
			3,6015	"	— 0,9417	4,9269	1,3030	— 1,781	13,081	2,241
		4,004	2,6038	3,1935	0,0689	4,6327	0,6325	6,393	5,117	1,178
			2,6015	"	— 0,1857	4,3822	0,7525	3,724	7,163	1,402
5,129	P	5,129	2,6038	3,1935	1,0448	4,5784	0,9496	17,325	— 5,083	1,904
			2,6015	"	0,9272	4,3201	1,0521	15,719	— 4,167	2,110
		6,254	1,6038	8,3225	1,2413	4,1908	0,3041	21,186	— 9,213	0,652
			1,6015	"	1,2361	3,9263	0,3891	20,745	— 9,527	0,834
7,379	P	7,379	1,6038	8,3225	1,7561	4,1620	0,5773	29,843	— 17,382	1,296
			1,6015	"	1,8407	3,8925	0,6449	30,577	— 18,923	1,448
		8,504	0,6038	15,7015	1,4529	3,9278	— 0,1383	26,814	— 14,635	— 0,322
			0,6015	"	1,6052	3,6556	— 0,0883	28,818	— 17,483	— 0,205
9,629	P	9,629	0,6038	15,7015	1,4370	3,9287	0,1116	28,198	— 15,665	0,267
			0,6015	"	1,6363	3,6528	0,1442	30,799	— 19,148	0,345
		10,754	— 0,3962	25,3305	0,5758	3,8509	— 0,6393	15,556	— 2,952	— 1,569
			— 0,3985	"	0,8022	3,5736	— 0,6241	18,742	— 7,044	— 1,532
11,879	$\frac{P}{2}$	11,879	— 0,3962	25,3305	— 0,0060	3,8836	— 0,3962	6,372	6,572	— 0,990
			— 0,3985	"	0,2277	3,6058	— 0,3985	9,805	2,215	— 0,996

$$\frac{N_x}{P} = 4{,}1038 \,.\, 0{,}6277 + 3{,}8836 \,.\, 0{,}7784 = 5{,}5990,$$

$$\frac{T_x}{P} = 4{,}1038 \,.\, 0{,}7784 - 3{,}8836 \,.\, 0{,}6277 = 0{,}7567,$$

$$\frac{10000\,\sigma_o}{P} = \frac{1}{1{,}035}\left(5{,}5990 - \frac{6}{1{,}035}\,2{,}6269\right) = -\,9{,}304,$$

$$\frac{10000\,\sigma_u}{P} = \frac{1}{1{,}035}\left(5{,}5990 + \frac{6}{1{,}035}\,2{,}6269\right) = 20{,}123,$$

$$\frac{10000\,\tau}{P} = \frac{1{,}5\,.\,0{,}7567}{1{,}035} = 1{,}097;$$

für $x = 1{,}754$ m, da vor x bei $a = 0{,}629$ m eine Last $\frac{P}{2}$ angreift:

$$V_x = 4{,}1038\,P - \frac{P}{2} = 3{,}6015, \qquad \sum_0^x P\,a = \frac{P}{2}\,0{,}629 = 0{,}3145,$$

$$\frac{M_x}{P} = -\,3{,}1460 - 3{,}8836\,.\,1{,}368 + 3{,}6015\,.\,1{,}754 + 0{,}3145 = -\,1{,}8232,$$

$$\frac{N_x}{P} = 3{,}6015\,.\,0{,}5649 + 3.8836\,.\,0{,}8251 = 5{,}2402,$$

$$\frac{T_x}{P} = 3{,}6015\,.\,0{,}8251 - 3{,}8836\,.\,0{,}5649 = 0{,}7797,$$

$$\frac{10000\,\sigma_o}{P} = \frac{1}{0{,}948}\left(5{,}2402 - \frac{6}{0{,}948}\,1{,}8232\right) = -\,6{,}645,$$

$$\frac{10000\,\sigma_u}{P} = \frac{1}{0{,}948}\left(5{,}2402 + \frac{6}{0{,}948}\,1{,}8232\right) = \quad 17{,}700,$$

$$\frac{10000\,\tau}{P} = \frac{1{,}5\,.\,0{,}7797}{0{,}948} = 1{,}234.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Tabelle VIII berechnet.

Zur unbelasteten Bogenhälfte übergehend, die wir nun als erste Bogenhälfte ansehen, entnehmen wir den Schlussbemerkungen des Beispiels 33 $V = 0{,}8962\,P$, $H = 3{,}8836\,P$, $M = 6{,}8320\,P$, und haben dann für alle Querschnitte (Lagerfugen) $V_x = V$, $\sum_0^x P\,a = 0$, während die Hy, $H \sin\varphi$, $H \cos\varphi$ wie bei der Berechnung der belasteten Bogenhälfte bleiben und demgemäss vorgemerkt wurden. Wir erhalten damit bei $x = 0$, wo $M_x = M$:

$$\frac{N_x}{P} = 0{,}8962\,.\,0{,}6628 + 3{,}8836\,.\,0{,}7488 = \quad 3{,}5020,$$

$$\frac{T_x}{P} = 0{,}8962\,.\,0{,}7188 - 3{,}8836\,.\,0{,}6628 = -\,1{,}9030,$$

$$\frac{10000\,\sigma_o}{P} = \frac{1}{1{,}1}\left(3{,}5020 + \frac{6}{1{,}1}\,6{,}8320\right) = \quad 37{,}061,$$

$$\frac{10000\,\sigma_u}{P} = \frac{1}{1{,}1}\left(3{,}5020 - \frac{6}{1{,}1}\,6{,}8320\right) = -\,31{,}368,$$

$$\frac{10000\,\tau}{P} = -\,\frac{1{,}5\,.\,1{,}9030}{1{,}1} = -\,2{,}595,$$

und bei $x = 0{,}639$ m:

$$\frac{M_x}{P} = 6{,}8320 - 3{,}8836\,.\,0{,}531 + 0{,}8962\,.\,0{,}629 = 5{,}3335,$$

$$\frac{N_x}{P} = 0{,}8962\,.\,0{,}6277 + 3{,}8836\,.\,0{,}7784 = \quad 3{,}5855,$$

$$\frac{T_x}{P} = 0{,}8962\,.\,0{,}7784 - 3{,}8836\,.\,0{,}6277 = -\,1{,}7401,$$

$$\frac{10000\,\sigma_o}{P} = \frac{1}{1{,}035}\left(3{,}5855 + \frac{6}{1{,}035}\,5{,}3335\right) = \quad 33{,}337,$$

$$\frac{10000\,\sigma_u}{P} = \frac{1}{1{,}035}\left(3{,}5855 - \frac{6}{1{,}035}\,5{,}3335\right) = -\,26{,}409,$$

$$\frac{10000\,\tau}{P} = -\,\frac{1{,}5\,.\,1{,}7401}{1{,}035} = -\,2{,}522.$$

In derselben Weise sind die übrigen Werthe der Tabelle IX berechnet.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle IX. Einseitige Verkehrslast. Unbelastete Seite.

x in m	$\frac{M_x}{P}$	$\frac{N_x}{P}$	$\frac{T_x}{P}$	$\frac{10000\,\sigma_o}{P}$	$\frac{10000\,\sigma_u}{P}$	$\frac{10000\,\tau}{P}$
0	6,8320	3,5020	— 1,9030	37,061	— 31,368	— 2,595
	5,7892	3,2955	— 1,7171	31,703	— 25,711	— 2,341
0,629	5,3335	3,5855	— 1,7401	33,337	— 26,409	— 2,522
	4,4397	3,3708	— 1,5642	28,124	— 21,610	— 2,267
1,754	3,0911	3,7107	— 1,4543	24,551	— 16,723	— 2,301
	2,4325	3,4827	— 1,2955	19,914	— 12,566	— 2,050
2,879	1,3460	3,8083	— 1,1758	14,988	— 6,254	— 2,023
	0,8868	3,5692	— 1,0343	11,091	— 2,904	— 1,779
4,004	0,0162	3,8824	— 0,9014	4,973	4,673	— 1,680
	— 0,2731	3,6339	— 0,7773	1,986	7,043	— 1,448
5,129	— 0,9290	3,9353	— 0,6324	— 4,701	15,224	— 1,268
	— 1,0761	3,6788	— 0,5255	— 6,622	16,458	— 1,054
6,254	— 1,5286	3,9687	— 0,3678	— 13,048	24,387	— 0,788
	— 1,5581	3,7056	— 0,2784	— 13,785	24,372	— 0,597
7,379	— 1,8097	3,9843	— 0,1077	— 18,369	30,298	— 0,242
	— 1,7444	3,7160	— 0,0357	— 17,893	29,018	0,080
8,504	— 1,7840	3,9829	0,1489	— 19,554	31,904	0,346
	— 1,6458	3,7105	0,2034	— 17,983	2[illegible]89	0,473
9,629	— 1,4710	3,9654	0,4017	— 16,126	2[illegible],775	0,961
	— 1,2804	3,6901	0,4389	— 13,656	[illegible].427	1,050
10,754	— 0,8783	3,9321	0,6505	— 7,681	20,552	1,597
	— 0,6554	3,6550	0,6703	— 4,552	16,516	1,645
11,879	— 0,0060	3,8836	0,8962	6,372	6,572	2,260
	0,2292	3,6058	0,8985	9,830	2,190	2,246

In der Mitte müssen sich auf der belasteten und unbelasteten Bogenhälfte die gleichen M_x, N_x, σ_o, σ_u ergeben, was bei der genaueren Berechnung vollständig (Tabellen VIII und IX grosse Zahlen) bei der einfacheren Berechnung (dieselben Tabellen, kleine Zahlen) soweit bei Vernachlässigung von Dezimalen zu erwarten, ebenfalls zutrifft.

Beispiel 35. Beanspruchungen bei Versuchen mit einem Bogen ohne Gelenke Wiener (Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Bei den Gewölbeversuchen des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins wurde das in Beisp. 33, 34 behandelte Bruchsteingewölbe durch sein Eigengewicht und einseitige Belastung bis zur Bogenmitte, bestehend aus gleichen Lasten P bei $a = 2{,}879$ m, 5,129 m, 7,379 m, 9,629 m und halb so grosse Lasten bei $a = 0{,}629$ m, 11,879 m zum Bruche gebracht (§ 19). Bis $P = 3430$ kg wuchsen die Formänderungen der Bogenaxe nahezu proportional der Belastung durch die P (Proportionalitätsgrenze), während bei $P = 5574$ kg die ersten Risse in einer der Stirnflächen konstatirt wurden (kritische Belastung, vergl. Fig. 86), und für $P = 7402$ kg der Bruch eintrat (Bruchbelastung).* Die ungünstigsten Normalspannungen σ und grössten Schubspannungen τ in den unten angeführten Querschnitten x (Lagerfugen, s. Tabelle V, S. 141, und Fig. 84, S. 134) für die zwei ersterwähnten Belastungsstufen zu berechnen.

In Beispiel 34 haben wir bereits die σ_o, σ_u, τ durch das Eigengewicht allein erhalten und für eine einseitige Belastung durch beliebige P allein die Werthe

$$\frac{10000\,\sigma_o}{P} = Z_o, \qquad \frac{10000\,\sigma_u}{P} = Z_u, \qquad \frac{10000\,\tau}{P} = Z.$$

---

* Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895, S. 87, 88. Bezüglich der Zahlen 3430 und 5574 kg siehe die zweite Fussnote auf S. 48 des Berichts.

Hierbei bedeuten σ_o, σ_u die Normalspannungen im oberen und unteren Querschnittselement, wo die Grenzwerthe der Normalspannungen eines Querschnitts eintreten, und τ die Quershubspannung und Längsschubspannung bei der Axschicht, wo diese Schubspannungen ihre grössten Zahlenwerthe erreichen. Demnach erhalten wir als Beiträge der einseitigen Belastung für $P = 3430$ kg:

$$\sigma_o = 0{,}3430\, Z_o, \qquad \sigma_u = 0{,}3430\, Z_u, \qquad \tau = 0{,}3430\, Z,$$

und für $P = 0{,}5574$ kg:

$$\sigma_o = 0{,}5574\, Z_o, \qquad \sigma_u = 0{,}5574\, Z_u, \qquad \tau = 0{,}5574\, Z.$$

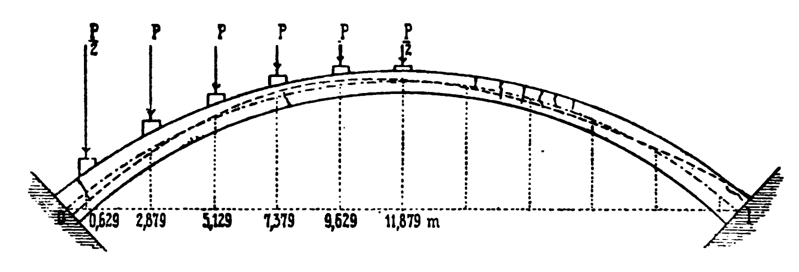


Fig. 86

Die Zahlen Z_o, Z_u, Z sind obigen Ausdrücken zufolge für die belastete Bogenhälfte aus den drei letzten Kolumnen der Tabelle VIII, für die unbelastete Bogenhälfte aus den drei letzten Kolumnen der Tabelle IX zu entnehmen, während die σ_o, σ_u, τ durch das Eigengewicht allein nach den drei letzten Kolumnen der Tabelle VII in der folgenden Tabelle X, S. 151, wiederholt sind.

Wir erhalten nun die Gesammtspannungen durch Eigengewicht und einseitige Belastung im Falle $P = 3430$ kg z. B. $x = 0$ auf der belasteten Seite:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= 0{,}77 - 0{,}3430 \,.\, 10{,}484 = -\ \ 2{,}83 \text{ kg}, \\ \sigma_u &= 5{,}64 + 0{,}3430 \,.\, 20{,}716 = \ \ 12{,}75 \text{ „ }, \\ \tau &= 0{,}13 + 0{,}3430 \,.\, \ \ 0{,}680 = \ \ \ \ 0{,}36 \text{ „ }, \end{aligned}$$

auf der unbelasteten Seite:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= 0{,}77 + 0{,}3430 \,.\, 37{,}061 = \ \ 13{,}48 \text{ kg}, \\ \sigma_u &= 5{,}64 - 0{,}3430 \,.\, 31{,}368 = -\ \ 5{,}12 \text{ „ }, \\ \tau &= 0{,}13 - 0{,}3430 \,.\, \ \ 2{,}595 = -\ \ 0{,}76 \text{ „ }. \end{aligned}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Tabelle X für $P = 3430$ kg berechnet. Für $P = 5574$ kg tritt in vorstehenden und den übrigen Ansätzen nur 0,5574 an Stelle von 0,3430. Den Fall $P = 7402$ kg (Bruchbelastung) in gleicher Weise zu verfolgen, bietet kein Interesse, weil infolge der eingetretenen Risse und des Aufhörens der entsprechenden Zugwiderstände die angewandten Formeln nicht mehr zutreffend sind, auch abgesehen davon, dass ihre Voraussetzungen überhaupt nie bis zum Bruche Gültigkeit behalten.

Wir haben oben die Spannungen bis zu den ersten Rissebildungen auf Grund der Elasticitätslehre berechnet, wobei man sich einen mittleren Elasticitätsmodul eingeführt zu denken hat,* welcher jedoch aus den Formeln für den Einfluss der Belastung wegfällt. Unter Voraussetzung der Zulässigkeit dieses Vorgehens und abgesehen von Einflüssen der Temperatur und Widerlagerbewegungen (s. über dieselben Beisp. 37) zeigt sich nun zunächst, dass die Schubspannungen τ für das Eintreten von Rissen nicht in Betracht kommen, da sie auch an den

* Vergl. in Luegers Lexikon der gesammten Technik, Bd. III, Stuttgart 1896, Artikel Elasticitätsmodul und Druckelasticität.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle X. Beanspruchungen, kg per qcm.

Belastungs-stufe	Bogen-hälfte	$x =$ in m	0 Kämpfer	0,629	1,754	2,879	4,004	5,129	6,254	7,379	8,504	9,629	10,754	11,870 Scheitel
$P = 0$. Eigengewicht allein	Beide Hälften	$\sigma_o =$	0,77 2,70	0,97 2,83	1,45 3,10	2,04 3,46	2,59 3,63	3,19 3,83	3,73 3,94	4,15 3,92	4,50 3,88	4,74 3,79	4,89 3,72	5,01 3,73
		$\sigma_u =$	5,64 3,85	5,57 3,86	5,26 3,79	4,89 3,68	4,57 3,76	4,30 3,91	4,06 4,12	3,84 4,37	3,65 4,58	3,56 4,83	3,57 5,08	3,59 5,21
		$\tau =$	0,13 0,04	0,13 0,04	0,13 0,04	0,11 0,02	0,09 0,01	0,07 — 0,01	0,06 — 0,01	0,04 — 0,02	0,02 — 0,02	0,01 — 0,02	0,00 — 0,01	0 0
$P = 3430$ kg. Proportionalitätsgrenze	belastete	$\sigma_o =$	— 2,83 — 2,64	— 2,22 — 2,05	— 0,83 — 0,87	2,90 2,85	4,78 4,91	9,13 9,22	11,00 11,06	14,39 14,41	13,70 13,76	14,41 14,35	10,23 10,15	7,20 7,09
		$\sigma_u =$	12,75 12,57	12,47 12,31	11,33 11,18	8,10 8,17	6,33 6,22	2,56 2,48	0,90 0,85	— 2,12 — 2,12	— 1,37 — 1,42	— 1,81 — 1,74	2,56 2,66	5,84 5,97
		$\tau =$	0,36 0,36	0,51 0,50	0,55 0,55	0,80 0,79	0,49 0,49	0,72 0,71	0,28 0,28	0,48 0,48	— 0,09 — 0,09	0,10 0,10	— 0,54 — 0,56	— 0,34 — 0,34
	unbelastete	$\sigma_o =$	13,48 13,57	12,40 12,48	9,87 9,93	7,18 7,26	4,30 4,31	1,58 1,56	— 0,74 — 0,79	— 2,15 — 2,22	— 2,21 — 2,29	— 0,79 — 0,89	2,26 2,16	7,20 7,10
		$\sigma_u =$	— 5,12 — 4,97	— 3,49 — 3,55	— 0,48 — 0,52	2,74 2,68	6,17 6,18	9,52 9,56	12,42 12,48	14,23 14,02	14,59 14,69	13,43 13,55	10,62 10,74	5,84 5,96
		$\tau =$	— 0,76 — 0,76	— 0,74 — 0,74	— 0,66 — 0,66	— 0,58 — 0,59	— 0,49 — 0,49	— 0,36 — 0,37	— 0,21 — 0,21	— 0,04 0,01	0,10 0,14	0,34 0,34	0,55 0,55	0,78 0,77
$P = 5574$ kg. Erste Rissebildungen	belastete	$\sigma_o =$	— 5,07 Risse — 5,99	— 4,22 — 5,11	— 2,25 — 3,02	3,43 2,47	6,15 5,71	12,85 12,59	15,54 15,50	20,78 20,96	19,45 19,94	20,35 20,96	13,56 14,17	8,56 9,20
		$\sigma_u =$	17,19 18,03	16,79 17,59	15,13 15,80	10,11 10,97	7,42 7,75	1,47 1,59	— 1,08 — 1,19	— 5,85 Risse — 6,18	— 4,51 — 5,17	— 5,17 — 5,84	1,92 1,15	7,25 6,44
		$\tau =$	0,51 0,56	0,74 0,79	0,82 0,86	1,23 1,27	0,75 0,79	1,13 1,17	0,42 0,45	0,76 0,79	— 0,16 — 0,13	0,16 0,17	— 0,87 — 0,86	— 0,55 — 0,56
	unbelastete	$\sigma_o =$	21,43 20,37	19,55 18,51	15,13 14,20	10,39 9,64	5,36 4,74	0,57 0,14	— 3,54 — 3,74	— 6,09 Risse — 6,05	— 6,40 — 6,14	— 4,25 — 3,82	0,61 1,18	8,56 9,21
		$\sigma_u =$	— 11,84 (Risse) — 10,48	— 9,15 — 8,19	— 4,06 — 3,21	1,40 2,04	7,17 7,69	12,79 13,08	17,65 17,70	20,73 20,54	21,43 21,02	19,60 19,00	15,03 14,29	7,25 6,43
		$\tau =$	— 1,32 — 1,26	— 1,28 — 1,22	— 1,15 — 1,10	— 1,02 — 0,97	— 0,85 — 0,80	— 0,64 — 0,60	— 0,38 — 0,34	0,17 0,02	0,21 0,24	0,56 0,57	0,89 0,91	1,26 1,25

ungünstigsten Stellen (bei der Axschicht, vergl. § 9) nicht über 1,32 kg hinaus gehen. Die durch

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{T_x}{N_x}$$

besimmten Winkel δ der resultirenden Kräfte R_x in den Querschnitten (Lagerfugen) mit den Normalen zu letzteren bleiben weit unter dem Reibungswinkel von Mauer auf Mauer (s. die N_x, T_x in Tabelle VII, VIII, IX), sodass die Reibung allein, ohne jedes Bindemittel, genügt hätte, den Transversalkräften T_x zu widerstehen. Auch die berechneten Druckspannungen erklären nicht den Eintritt von Trennungen, da sie noch nicht 22 kg per qcm erreichen, während Würfel aus dem verwendeten Sandstein und Mörtel Druckfestigkeiten von etwa 850 kg bezw. 78 kg auswiesen.*

Die ersten Risse entstanden denn auch an denjenigen Stellen, an welchen sich für $P = 5574$ kg die grössten Zugspannungen ergaben (vergl. Tabelle X und Fig. 86). Wenn diese feinen Haarrisse zunächst nur an einer Stirnfläche beobachtet wurden, so lässt sich dies durch Ungleichmässigkeiten des Materials und der Druckübertragung genügend erklären, vollständig radiale Bruchflächen von einer Stirnfläche bis zur andern wird hier Niemand erwarten. Von diesem Standpunkte aus sehen wir auch die sonst schwer erklärlichen Längsrisse nächst dem Gewölberücken beim Kämpfer der unbelasteten Seite (Fig. 86) als sekundäre Erscheinungen an, hervorgerufen durch Risse von der Laibung aus und dementsprechende Concentration des Druckes im oberen Theil der Fugen, da letzterwähnte Risse bis zum Bruche auch an den Stirnflächen aufs Kräftigste hervortraten (Fig. 88), für die andern Versuchsgewölbe schon bei der kritischen Belastung. Ueber alle Risse in der Nähe der Kämpfer (Fig. 87, 88) kann die ältere Berechnungsweise der Gewölbe keinen Aufschluss geben, da sie die Stützlinie durch das

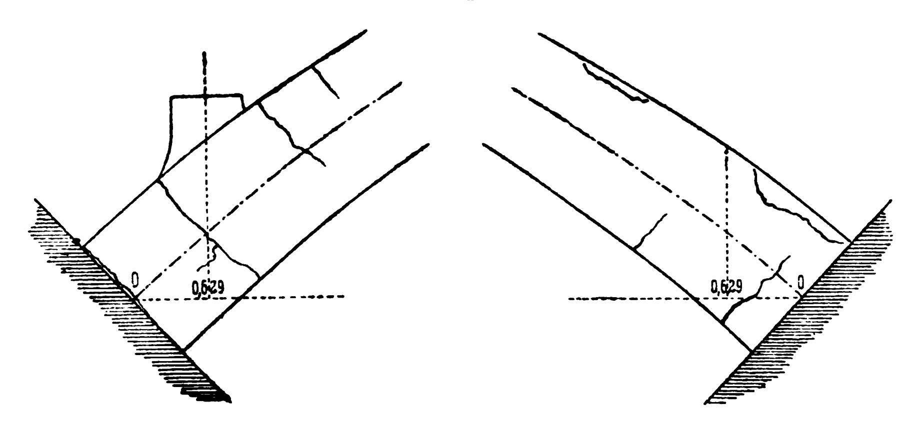


Fig. 87 Fig. 88

mittlere Drittel der Kämpferfugen gehen lässt und damit Zugspannungen bei letzteren willkürlich ausschliesst. Die verdienstvolle Feststellung des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, dass auch bei den Kämpfern erhebliche Zugspannungen auftreten können, welche mit den übrigen Zugspannungen allein für den Beginn der Zerstörung massgebend sind, und nur durch die Theorie der elastischen Bogenträger rechnerisch nachgewiesen werden können, sollte dahin führen, alle wichtigeren Gewölbe als elastische Bogenträger zu berechnen. Selbstverständlich sind dann auch die Voraustetzungen der Theorie elastischer Bogenträger soweit erreichbar zu erfüllen, und durch sorgfältige Formgebung und geeignete Ausführung Zugspannungen möglichst zu vermeiden. Da dies durch Anordnung von Gelenken (§ 18) erleichtert wird, so ist zu wünschen, dass sich die letzteren auch ferner bewähren möchten.

* Bericht des Gewölbeausschusses Wien 1895. S. 42.

Die in Tabelle X klein gedruckten Zahlen haben sich in gleicher Weise wie die darüber stehenden mit den in den Tabellen VII, VIII, IX klein gedruckten σ_o, σ_u, τ ergeben, sie entsprechen also den am Schlusse des Beispiels 33 erwähnten gebräuchlichen Vernachlässigungen. Die Uebereinstimmung ist für die Gesammtspannungen durch Eigengewicht und Verkehrslast weit besser, als nach den grossen am Schlusse jenes Beispiels und in den Tabellen des Beispiels 34 bezüglich der Momente nachgewiesenen Abweichungen vermuthet hätte werden können (vergl. Beispiel 36). Jedenfalls ist auch die Berechnung mit jenen Vernachlässigungen dem ganz willkürlichen gewöhnlichen Verfahren bei Weitem vorzuziehen.

Bei den obigen Ermittelungen kam die Lage der Stützlinie des Gewölbes überhaupt nicht zur Sprache da ihre Feststellung für die Beurtheilung der Standsicherheit desselben überflüssig ist. Das gewöhnliche Verfahren, die Beanspruchungen nur an den Stellen zu berechnen, wo die Stützlinie den Gewölbegrenzen am nächsten kommt (Bruchfugen), ist nebenbei insofern nur annähernd richtig, als die Beanspruchungen auch von der Höhe der Lagerfugen und den ganzen Werthen der Normalspannungen N_x abhängen, welche im Allgemeinen von Fuge zu Fuge veränderlich sind. Will man jedoch aus irgend einem Grund, z. B. der Anschaulichkeit halber, die Stützlinie auftragen, so kann dieselbe auf Grund der für obige Berechnung ermittelten Grössen sofort erhalten werden (Beisp. 36).

Beispiel 36. Stützlinie eines Bogens (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe). Für das in den Beispielen 33, 34, 35 behandelte Versuchsgewölbe des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins die Stützlinie durch diejenige Belastung zu ermitteln, bei welcher die ersten Risse beobachtet wurden (einseitige Verkehrsbelastung bis $P = 5574$ kg). Vorausgesetzt sei, dass die Beziehungen der Theorie elastischer Bogenträger bis dahin als gültig angesehen werden können.

Nach § 8, 1) hat man die Entfernung der Stützlinie von der Bogenaxe beim Querschnitt x, gemessen in der Ebene des letzteren:

$$c = \frac{M_x}{N_x}, \tag{1}$$

wobei die c nach oben positiv, nach unten negativ zu rechnen sind. Wir machen nun von den Resultaten des Beispiels 34 Gebrauch.

Bezeichnen M_e, N_e die Werthe von M_x, N_x durch das Eigengewicht allein (Tabelle VII), $M_x = mP$, $N_x = nP$ ihre Werthe durch die einseitige Verkehrslast allein (Tabellen VIII und IX), so erhalten wir beim Zusammenwirken von Eigengewicht und beliebigen Werthen der P:

$$c = \frac{M_e + mP}{N_e + nP}. \tag{2}$$

Speziell für die oben erwähnte Belastung mit $P = 5574$ kg wird auf der belasteten Seite bei $x = 0$:

$$c = \frac{-4902 - 3,1460 \,.\, 5574}{35286 + 5,6280 \,.\, 5574} = -\ 0,368 \text{ m},$$

bei $x = 0,629$ m:

$$c = \frac{-4110 - 2,6269 \,.\, 5574}{33875 + 5,9990 \,.\, 5574} = -\ 0,315 \text{ m};$$

auf der unbelasteten Seite bei $x = 0$:

$$c = \frac{-4902 + 6,8320 \,.\, 5574}{35286 + 3,5020 \,.\, 5574} = 0,578 \text{ m},$$

bei $x = 0,629$ m:

$$c = \frac{-4110 + 5,3335 \,.\, 5574}{33875 + 3,5855 \,.\, 5574} = 0,557 \text{ m}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen c der folgenden Zusammenstellung berechnet. Die entsprechende Stützlinie ist in Fig. 86 (S. 150) gestrichelt eingetragen.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle XI. Stützlinie (Fig. 86).

Für die Fuge $x =$		0	0,629	1,754	2,879	4,004	5,129	6,254	7,379	8,504	9,629	10,754	11,897 m
Belastete Bogenhälfte	$c =$	− 0,337 − 0,365 Risse	− 0,288 − 0,313 oben	− 0,213 − 0,233	− 0,080 − 0,092	− 0,013 − 0,020	0,099 0,097	0,134 0,136	0,198 0,204 Risse	0,174 0,183 unten	0,175 0,185	0,077 0,087	0,008 m 0,018 m
Unbelastete Bogenhälfte	$c =$	0,605 0,572 (Risse	0,476 0,446 unten)	0,274 0,251	0,111 0,094	− 0,019 − 0,032	− 0,114 − 0,122	− 0,175 − 0,179	− 0,204 − 0,204 Risse	− 0,199 − 0,196 oben	− 0,162 − 0,157	− 0,094 − 0,086	0,008 m 0,018 m

Die in Tabelle XI klein gedruckten Zahlen haben sich in gleicher Weise wie die darüber stehenden mit den in den Tabellen VII, VIII, IX, klein gedruckten M_x, N_x ergeben, sie entsprechen also den am Schlusse des Beispiels 33 erwähnten Vernachlässigungen und bestätigen das am Schlusse des vorigen Beispiels bezüglich der letzteren Gesagte.

Um die Stützlinie für $P = 3430$ kg (Proportionalitätsgrenze, vergl. S. 149, 131) zu erhalten, hätte man nur in obigen Ansätzen auf Grund von 2) 3430 an Stelle von 5574 zu setzen gehabt. Die Stützlinie für Eigengewicht allein würde sich unmittelbar nach 1) mit den in Tabelle VII angeführten Werthen von M_x, N_x ergeben haben.

Beispiel 37. Aenderungen der Temperatur und der Spannweite eines Bogens ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das in den Beispielen 33—36 behandelte Versuchsgewölbe des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins den Einfluss von Temperaturänderungen τ des Bogens und kleiner Aenderungen Δl, Δk der Spannweite und Stützhöhen (ohne sonstige Verdrehung der Endquerschnitte) auf die Normalspannungen σ_o, σ_u in den obersten und untersten Elementen der Querschnitte (Lagerfugen, vergl. Beisp. 33) festzustellen.

Für die Normalspannungen σ_o, σ_u durch einen beliebigen Horizontalschub H und beliebige Endmomente M, M' hat man nach § 17, 47) 48):

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos\varphi}{F} - \frac{y - \frac{M}{H}}{W}\right) H, \qquad 1)$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\cos\varphi}{F} + \frac{y - \frac{M}{H}}{W}\right) H \qquad 2)$$

und im vorliegendem Falle für den rechteckigen Querschnitt der Breite $b = 1$ und Höhe h mit $F = h$, $W = \frac{h^2}{6}$:

$$\sigma_o = \left[\cos\varphi - \frac{6}{h}\left(y - \frac{M}{H}\right)\right]\frac{H}{h}, \qquad 3)$$

$$\sigma_u = \left[\cos\varphi + \frac{6}{h}\left(y - \frac{M}{H}\right)\right]\frac{H}{h}. \qquad 4)$$

Hierin ist unter obigen Voraussetzungen nach der genaueren Berechnung in Beispiel 43 $M:H = 3{,}5899$, während die Berechnung in Beispiel 33 $M:H = 3{,}5921$ ergab. Wir erhalten mit den genaueren Werthen bei Beachtung der Tabelle V des Beispiels 33, wenn die σ_o, σ_u auf qcm bezogen werden, für $x = 0$:

$$10000\,\sigma_o = \left(0{,}7488 - 6\,\frac{0 - 3{,}5899}{1{,}1}\right)\frac{H}{1{,}1} = \quad 18{,}48\,H,$$

$$10000\,\sigma_u = \left(0{,}7488 + 6\,\frac{0 - 3{,}5899}{1{,}1}\right)\frac{H}{1{,}1} = -\,17{,}12\,H,$$

und für $x = 0{,}629$ m:

$$10000\,\sigma_o = \left(0{,}7784 - 6\,\frac{0{,}531 - 3{,}5899}{1{,}035}\right)\frac{H}{1{,}035} = \quad 17{,}89\,H,$$

$$10000\,\sigma_u = \left(0{,}7784 + 6\,\frac{0{,}531 - 3{,}5899}{1{,}035}\right)\frac{H}{1{,}035} = -\,16{,}38\,H,$$

In gleicher Weise sind die übrigen $\frac{\sigma_o}{H}$, $\frac{\sigma_u}{H}$ der folgenden Tabelle XII berechnet.

Nach der Zusammenstellung am Schlusse des Beispiels 33 hat man mit dem Elasticitätsmodul $E = 175000 \,.\, 100^2$ kg per qm und dem Ausdehnungskoefficienten $\alpha = 0{,}0000118$ den Horizontalschub durch eine Temperaturänderung τ:

$$H = \frac{E\,\alpha\,\tau}{39{,}993} = 516\,\tau \text{ kg},$$

und den Horizontalschub durch die vorausgesetzen Δl, Δk wenn Δl in cm eingesetzt werden soll:

$$H = -\,\frac{E\,\Delta l}{95016} = -\,18418\,\Delta l \text{ kg},$$

während die weniger genaue Berechnung des Beisp. 33 bezw. $534\,\tau$ und $-\,19045\,\Delta l$ ergeben hatte.

Will man nun die Einflüsse der Kämpferbewegungen weiter verfolgen, so fehlen die entsprechenden Messungen. Bei den übrigen erprobten Gewölben waren z. B. für die Belastungsstufe $P = 3430$ kg $\Delta l = 0{,}075$ cm (Ziegelgewölbe), $0{,}065$ cm (Stampfbetongewölbe), $-\,0{,}035$ cm (Moniergewölbe). Dem Mittelwerthe $0{,}035$ dieser Zahlen würde entsprechen $H = -\,18418 \,.\, 0{,}035 = -\,645$ kg. Nun können aber auch Verdrehungen der Endquerschnitte stattgefunden haben, welche H, M, M' beeinflussen würden (§§ 17, 34, 35), aber ebenfalls nicht bekannt sind.

Unter diesen Umständen kann auch die Berücksichtigung des Einflusses der Temperaturänderungen kaum neue Aufklärung bringen, umsomehr, als die wirksame Temperaturänderung nicht genau angebbar ist. Die Temperatur der Luft betrug am 26. 9. 91 vor der Ausschalung 19° R, am 28. 9. 91 nach der Ausschalung 18° R, am 12. 10. 91 bei der kritischen Belastung ($P = 5574$ kg, erste Rissebildungen) 14,1° R. Ob nun die Differenz von 4,9° R = 6,125° C als Temperaturänderung gegen die dem spannungslosen Zustande entsprechende Normaltemperatur in Betracht gezogen werden kann, lässt sich nicht sagen, da weder der Spannungszustand des Gewölbes vor der Ausschalung noch die Temperaturen des Gewölbeinnern am Anfang und Ende des Versuchs genau bekannt sind. Setzen wir jedoch $\tau = -\,6{,}125°$, so folgen

$$H = -\,516 \,.\, 6{,}125 = -\,3160 \text{ kg},$$

und aus den in Tabelle XII für beliebige H gegebenen Ausdrücken die entsprechenden Normalspannungen bei $x = 0$:

$$\sigma_o = -\,18{,}48 \,.\, 0{,}316 = -\,5{,}84 \text{ kg}, \qquad \sigma_u = 17{,}12 \,.\, 0{,}316 = 5{,}41 \text{ kg},$$

also einsschliesslich der in Tabelle X gegebenen Normalspannungen durch die kritische Belastung auf der belasteten Seite:

$$\sigma_o = -5{,}84 - 5{,}07 = -10{,}91 \text{ kg}, \qquad \sigma_u = 5{,}41 + 17{,}19 = 22{,}60 \text{ kg},$$

auf der unbelasteten Seite:

$$\sigma_o = -5{,}84 + 21{,}43 = 15{,}59 \text{ kg}, \qquad \sigma_u = 5{,}41 - 11{,}84 = -6{,}43 \text{ kg},$$

In gleicher Weise sind die übrigen σ_o, σ_u der folgenden Tabelle berechnet.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle XII. Temperaturänderungen etc.

Für	Bogenhälften	$x =$	0 Kämpfer	0,629	1,754	2,879	4,004	5,129	6,254	7,379	8,504	9,629	10,754	11,879 m Scheitel
beliebige τ, Δl	beide	$\frac{10000\,\sigma_o}{H} =$	18,48	17,89	15,70	12,93	9,55	5,61	1,28	− 3,10	− 7,00	− 10,17	− 12,46	13,53
		$\frac{10000\,\sigma_u}{H} =$	− 17,12	− 16,38	13,96	− 10,95	− 7,32	− 3,14	1,43	6,00	10,05	13,34	15,73	16,87
$\tau = -6{,}125^0$ $H = -3160$ kg	beide	$\sigma_o =$	− 5,84	− 5,65	− 4,96	− 4,09	− 3,02	− 1,77	− 0,40	0,98	2,21	3,21	3,94	4,28
		$\sigma_u =$	5,41	5,18	4,41	3,46	2,31	0,99	− 0,45	− 1,90	− 3,18	− 4,22	− 4,97	− 5,33
die kritische Belastung und $\tau = -6{,}125^0$	belastete	$\sigma_o =$	− 10,91	− 9,87	− 7,21	− 0,66	3,13	11,08	15,14	21,76	21,66	23,56	17,50	12,84
		$\sigma_u =$	22,60	21,97	19,54	13,57	9,73	2,46	− 1,53	− 7,75	− 7,69	− 9,39	− 3,05	1,92
			Risse	oben						Risse	unten			
	unbelastete	$\sigma_o =$	15,59	13,90	10,17	6,30	2,34	− 1,20	− 3,94	− 5,11	− 4,19	− 1,04	4,55	12,84
		$\sigma_u =$	− 6,43	− 3,97	− 0,35	4,86	9,48	13,78	17,20	18,83	18,25	15,38	10,06	1,92
			(Risse	unten)						Risse	oben			

Mit Rücksicht auf das oben Gesagte lässt sich nicht entscheiden, inwieweit diese Werthe den wirklichen Normalspannungen bei der kritischen Belastung näher kommen, als die für diese Belastung allein in Tabelle X eingetragenen. Eine wesentlich bessere oder weniger gute Erklärung der eingetretenen Risse geben sie nicht. Die Berücksichtigung von Temperaturänderungen und Stützenbewegungen bei Gewölben wird auch infolge des Zusammenhangs zwischen Bogen und Widerlager immer an grösserer Unsicherheit als bei eisernen Bogen leiden, womit aber der Nachweis seinen Werth nicht verliert, dass ein berechnetes Gewölbe auch derartigen Einflüssen gegenüber genügende Sicherheit bietet. — Ueber die Einsenkungen des betrachteten Versuchsgewölbes siehe Beispiel 44.

§ 20. **Bogen mit Zugstange.**

Als Dachbinder hat man mitunter einfache Bogen mit zwei Gelenken ausgeführt, bei welchen der Horizontalschub nicht durch die Widerlager, sondern durch eine die Endgelenke verbindende Zugstange aufgenommen wurde (Bahnhofshallen in Metz, Genua u. s. w.). Der so aus Bogen und Zugstange kombinirte Träger (Fig. 89, 90) bildet einen Balken, da er bei beliebiger Belastung nur vertikale Drücke auf die Stützpunkte ausübt (S 2). Hierin kann ein statischer Grund seiner Anwendung liegen, man wird horizontale Drücke auf die Stützen im Interesse der Stabilität der letzteren und mit Rücksicht auf die Widerstandsfähigkeit des Fundamentbodens vermeiden wollen. Da dies aber auch durch Balkenfachwerke, z. B. von Segmentform oder Sichelform, erreichbar ist, so müssen bei Wahl der fraglichen Trägerart noch andere Gründe mitsprechen, im Allgemeinen werden konstruktive oder ästhetische Gesichtspunkte den Ausschlag geben.

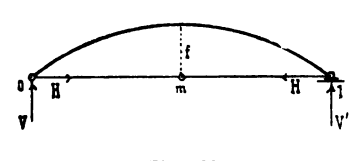


Fig. 89

Der Bogen für sich ist ein Zweigelenkbogen (§ 16) mit nicht vollständig festliegenden Enden. Da aber bei der Betrachtung des Bogens mit zwei Gelenken kleine Aenderungen $\Delta\, l$ der Spannweite zugelassen wurden, so bleiben die erhaltenen allgemeinen Gleichungen gültig; wir wollen dieselben mit Rücksicht auf den eintretenden besonderen Werth von $\Delta\, l$ spezialisiren.

Ist die Zugstange vom Querschnitte $\mathfrak{F}$ und horizontal, dann bewirken der Horizontalschub H und eine Temperaturänderung τ' der Zugstange die Längenänderung:

$$\Delta\, l = \left(\frac{H}{E\,\mathfrak{F}} + \alpha\,\tau'\right) l. \qquad 1)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass keine Aenderung der Spannweite durch Einsenkung der Zugstange in Betracht kommt, was man durch Aufhängen der letzteren in der Mitte (Fig. 89) und nach Bedürfniss noch an weiteren Stellen zu erreichen sucht.

Ist die Zugstange vom Querschnitt $\mathfrak{F}$ selbst gesprengt (Fig. 90) und bezeichnen vorübergehend ζ, ξ, Z ihre Länge, Horizontalprojektion und Beanspruchung in einem beliebigen Felde, dann ist die Längenänderung dieses Stangenabschnittes

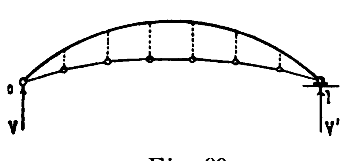


Fig. 90

$$\left(\frac{Z}{E\,\mathfrak{F}} + \alpha\,\tau'\right)\zeta,$$

was eine horizontale Verlängerung im betreffenden Felde um

$$\left(\frac{Z}{E\,\mathfrak{F}} + \alpha\,\tau'\right)\zeta\,\frac{\xi}{\zeta}$$

ergibt. Da aber das Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung der einzelnen Zugstangenknotenpunkte verlangt, dass die Horizontalkomponenten aller Z von gleichem Werthe und also gleich H seien, so lässt sich vor-

stehende Verlängerung auch ausdrücken:

$$\left(\frac{H}{E\mathfrak{F}}\frac{\zeta}{\xi}+\alpha\tau'\right)\xi.$$

Die Summe aller dieser Verlängerungen für den ganzen Träger ergibt sich, wenn z die Gesammtlänge der Zugstange bedeutet:

$$\Delta l = \frac{Hz}{E\mathfrak{F}} + \alpha\tau' l. \qquad 2)$$

Für eine starre Zugstange würden die Gleichungen 1) 2) wegen $E = \infty$, $\alpha = 0$ die Aenderung der Spannweite $\Delta l = 0$ ergeben, woraus schon folgt, dass ein Bogen mit starrer Zugstange sich wie ein Bogen ohne Zugstange mit absolut unnachgiebigen Widerlagern verhielte. Wir wollen jedoch im Folgenden für Bogen und Zugstange gleiche E, α (gleiches Material) voraussetzen, während die Temperaturänderung τ' der Zugstange von derjenigen τ des Bogens verschieden sein darf. Da die Zugstange vor unmittelbarer Einwirkung der Sonne geschützt zu sein pflegt, so können solche Verschiedenheiten leicht eintreten. Im übrigen fassen wir wieder den einfachsten Fall parabolischer Bogen ins Auge, für Bogen mit beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten kann auf Grund der in §§ 16, 32 angeführten Ausdrücke von H ganz in gleicher Weise vorgegangen werden. (Vergl. Aufg. 15). Da die Berechnung abgesehen von dem Ausdrucke des Horizontalschubs ganz wie in § 16 bleibt, so stellen wir unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen nur fest, inwiefern sich Abweichungen gegen das daselbst Gesagte ergeben.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$ hat man nach § 27, 18) im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{5}{(1+\varepsilon)\,8fl^3}\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2-\beta l^2) + \frac{15\,Ec}{(1+\varepsilon)\,8f^2}\left(\alpha\tau - \frac{\Delta l}{l}\right), \qquad 3)$$

worin β fast immer vernachlässigt werden kann (§ 28). Führen wir nun Δl entsprechend 1) 2) ein und setzen zur Abkürzung bei horizontaler Zugstange:

$$h = (1+\varepsilon)\,8f^2 + \frac{15\,c}{\mathfrak{F}}, \qquad 4)$$

bei gesprengter Zugstange:

$$h = (1+\varepsilon)\,8f^2 + \frac{15\,cz}{\mathfrak{F}\,l}, \qquad 5)$$

so ergibt sich der von einer beliebigen Belastung herrührende Horizontalschub:

$$H = \frac{5f}{hl^3}\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2-\beta l^2) \qquad 6)$$

und der von beliebigen Temperaturänderungen τ, τ' herrührende Horizontalschub:

$$H = \frac{15\,c}{h}\,E\alpha(\tau-\tau') \qquad 7)$$

speziell für $\tau' = \tau$ also $H = 0$.

Nach 4) 5) nähert sich h umsomehr dem für Zweigelenkbogen ohne Zugstange geltenden Werthe $(1+\varepsilon)\,8f^2$, je grösser $\mathfrak{F}$ ist, für $\mathfrak{F} = \infty$ würde jener Werthe und damit derselbe Horizontalschub wie beim gewöhnlichen Zweigelenkbogen erreicht. Dass für vorläufige Berechnungen ganz wie in § 16 neben $\beta = 0$ meist $\varepsilon = 0$ und in 3) mitunter anstatt $l^2 + l\,a - a^2$ sein Mittelwerth $\frac{7}{6}l^2$ gesetzt werden können, bedarf keiner Erwähnung. Bei Berechnung von $\mathfrak{F}$ kann man h mit $\mathfrak{F} = \infty$ verwenden, womit man die Beanspruchung der Zugstange etwas zu gross erhält.

Verschiedene Belastungen.

Für stetig vertheilte Lasten lassen sich die allgemeinen Formeln wieder mit Rücksicht auf § 14 spezialisiren. So erhält man für eine auf der ganzen Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit:

$$H = \left(1 - \frac{5}{6}\beta\right)\frac{u}{h}f\,l^2, \qquad 8)$$

und für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$H = \left(1 - \frac{5}{6}\beta\right)\frac{u + u'}{2h}f\,l^2, \qquad 9)$$

während für die Stützenreaktionen V, V', die Vertikalkraft V_x und das Moment M_x in beliebigen Querschnitten des Bogens im ersten Falle die Gleichungen § 16, 18)—20), im zweiten Falle die Gleichungen § 16, 25)--27) gültig bleiben.

Auch bezüglich der Kernlinien und der Grenzwerthe bei bewegter Last bleibt es bei dem in § 16 Gesagten, nur dass die Kämpferdrucklinie S eine etwas andere Lage hat. Da nämlich jetzt nach § 16, 2) und obiger Gleichung 6) für eine bei a angreifende Einzellast P:

$$V = P\frac{l-a}{l}, \qquad H = \frac{5f}{h\,l^3}P\,a\,(l-a)\,(l^2 + l\,a - a^2 - \beta\,l^2),$$

so liefert die allgemeine Formel § 16, 39) für unsern Fall:

$$b = \frac{h}{5f}\,\frac{l^2}{l^2 + l\,a - a^2 - \beta\,l^2}. \qquad 11)$$

Der Vergleich mit § 16, 38) zeigt, dass sämmtliche Ordinaten b jetzt in gleichem Verhältnisse $\frac{h}{(1+\varepsilon)\,8f^2}$ grösser sind, als bei Zweigelenkbogen ohne Zugstange, was von der Verkleinerung des Horizontalschubes herrührt.

Formänderungen.

Die Formänderungen dürften im vorliegendem Falle selten interessiren, da es sich im Allgemeinen um Dachbinder handeln wird. Doch gelten die in § 30 für Oeffnungen mit Endgelenken abgeleiteten Beziehungen wonach auch die Einsenkungen in der Trägermitte durch beliebige Belastung, symmetrische Belastung und beliebige Temperaturänderungen

nach § 16, 47) 48) 52) bestimmt bleiben. In letzteren Formeln ist jedoch jetzt H für beliebige Belastung durch 6), für beliebige Temperaturänderungen durch 7) bestimmt, womit der Einfluss von Δl schon berücksichtigt ist.

Wir können demnach die Einsenkung in der Trägermitte, entsprechend dem Vorgehen in § 16, auch wie folgt ausdrücken. Für eine Einzellast P in der Bogenmitte:

$$e = \left(1 - \frac{125 f^2}{16 h}\right) \frac{P l^3}{48 E c} \qquad 11)$$

für eine gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit auf der ganzen Spannweite:

$$e = \left(1 - \frac{8 f^2}{h}\right) \frac{5 u l^4}{384 E c}, \qquad 12)$$

für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$e = \left(1 - \frac{8 f^2}{h}\right) \frac{u + u'}{768} \frac{5 u l^4}{E c} \qquad 13)$$

für Temperaturänderungen τ, τ' von Bogen und Zugstange:

$$e = - \alpha \tau f - \frac{25 f l^2}{16 h} \alpha (\tau - \tau'), \qquad 14)$$

speziell für $\tau' = \tau$ also $e = - \alpha \tau f$, und für eine Erhöhung Δk von Stütze l gegen Stütze 0:

$$e = - \frac{\Delta k}{2}. \qquad 15)$$

Die Formänderungen für beliebige Axform und beliebige Querschnitte würden sich aus § 33 ergeben.

Dreigelenkbogen mit Zugstange.

Wird in dem betrachteten Bogen noch ein Zwischengelenk angeordnet, (Fig. 91, 92), so entsteht eine statisch bestimmte Trägerart. Die Berechnung des Horizontalschubs wie sämmtlicher Schnittkräfte und Beanspruchungen

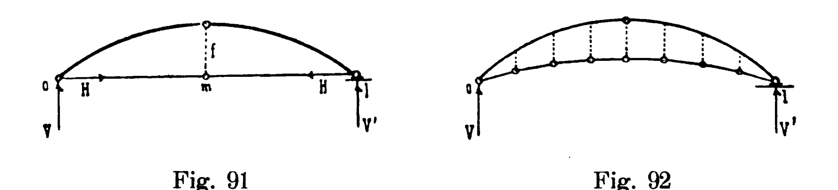


Fig. 91 Fig. 92

bleibt vollständig wie für gewöhnliche Dreigelenkbogen (§ 15). Den so bestimmten Horizontalschub hat die Zugstange aufzunehmen, wonach sich deren Querschnitt ohne Rücksicht auf die Formänderungen ergibt. Die Einsenkungen lassen sich ebenso aus § 15 entnehmen, wie sie im obigen Falle aus § 16 folgten. Wir können jedoch umsomehr auf ihr Anschreiben verzichten, als Dreigelenkbogen mit Zugstange bis jetzt nicht ausgeführt wurden.

§ 21. **Kontinuirliche Bogen.**

Bogenträger, welche ungetrennt über zwei und mehr Oeffnungen reichen, können verschieden angeordnet werden. Im Falle der Fig. 93 lassen sich von den angedeuteten Komponenten der Sützenreaktionen

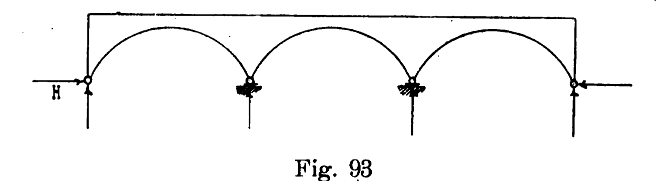


Fig. 93

durch welche diese selbst vollständig bestimmt sind, drei nicht aus rein statischen Gleichungen ermitteln. Bei n Oeffnungen wären n nothwendige Reaktionskomponenten statisch unbestimmt. Im Falle von Fig. 94, 95

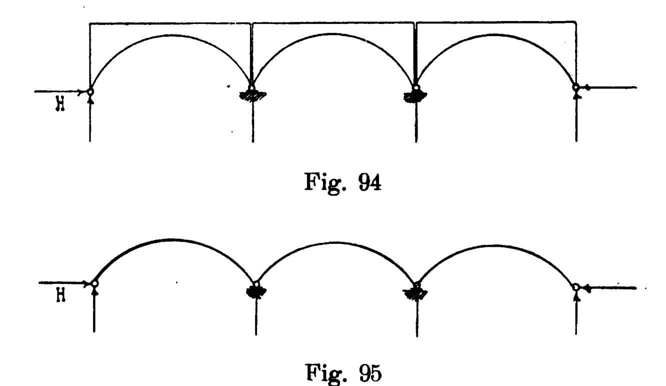


Fig. 94

Fig. 95

ist nur der Horizontalschub nicht aus rein statischen Gleichungen bestimmbar. Im Falle von Fig. 96 schliesslich können die Stützenreaktionen aus rein statischen Beziehungen, also ohne Hülfe der Elasticitätslehre,

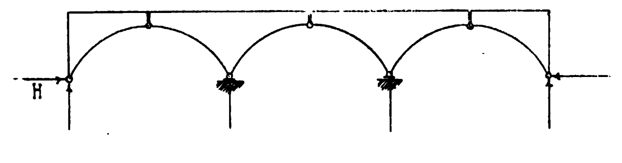


Fig. 96

vollständig bestimmt werden, wir haben eine statisch bestimmte Trägerart.

Ausgeführt ist bis jetzt keine der angeführten Bogenarten, sodass ein dringendes Bedürfniss zu ihrer rechnerischen Behandlung nicht vorliegt. Dagegen ist der Träger Fig. 94, 95 mehrfach zur Ausführung empfohlen worden,* und es lässt sich nicht leugnen, dass er unter Umständen gewisse Vortheile bietet. Balken gegenüber kann besonders der

* Zuerst von Schmidt, Die kontinuirlichen Bogen, Wien 1878.

aesthetische Gesichtspunkt neben geringerem Materialverbrauch, mehreren einfachen Bogen gegenüber aber der Umstand in Betracht kommen, dass die Zwischenstützen nur vertikalen Druck aufzunehmen haben, womit dieselben schlanker gehalten werden können und geringere Beanspruchungen des Fundamentbodens der Pfeiler entstehen. Durch Einschalten eines Zwischengelenkes lässt sich aus der Trägerart Fig. 94, 95 eine statisch bestimmte Trägerart herstellen (Fig. 97, 98), welche als Fachwerk (feste Hängebrücke, Fig. 98) mehrfach Verwendung gefunden hat, aber nicht

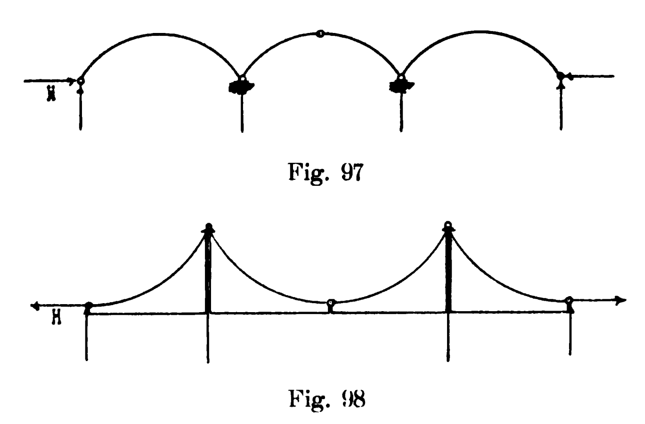


Fig. 97

Fig. 98

zu den elastischen Bogenträgern gehört (S. 3) und an anderer Stelle ausführlich behandelt worden ist.*

Wir wollen nun den Bogen Fig. 94, 95 mit gleich hohen Stützen und beliebig vielen Oeffnungen ins Auge fassen. In jeder Oeffnung l hat man:

$$M = M' = 0, \qquad k = 0, \qquad 1)$$

womit für die Schnittkräfte und Schnittmomente (§ 1) dieselben Ausdrücke wie bei einfachen Bogen mit Kämpfergelenken entstehen und z. B. die Gleichungen § 16, 1)—6) gelten. Da die Reibung gegen horizontale Verschiebung des Trägers über den Zwischenstützen (wo Rollenlager oder Flachrollenlager anzuordnen sind) mit dem gleichen Rechte wie bei kontinuirlichen Balken vernachlässigt werden kann, so ist die resultirende Horizontalkraft in allen Querschnitten aller Oeffnungen gleich dem Horizontalschub H (§ 1), welcher mit Rücksicht darauf zu ermitteln ist, dass zwar die einzelnen Spannweiten bei Einwirkung von Lasten und Temperaturänderungen kleine Aenderungen Δl erleiden können, die Gesammtlänge derselben

$$L = \Sigma l \qquad 1)$$

aber ungeändert bleiben soll. Wir werden indessen auch hier, wie bei einfachen Bogen, etwaige unbeabsichtigte Aenderungen ΔL mit in Rechnung ziehen. Es genüge vorläufig, bei Ableitung von H in den einzeln Oeffnungen symmetrische Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$

* Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1887. S. 272—288. Derselbe. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger. Leipzig 1888. S. 412—464.

vorauszusetzen, für beliebige Axform und beliebige Querschnitte könnte die Ableitung auf Grund von § 31, 32 in ganz analoger Weise erfolgen wie im Folgenden auf Grund von § 27. Die in § 16 verwendeten Bezeichnungen werden beibehalten, wie überhaupt das für einfache Bogen mit Endgelenken gegebene nur mit Rücksicht auf die Kontinuität zu ergänzen ist.

Nach § 24, 15) mit den dortigen Bezeichnungen 16) 17) hat man für eine beliebige Oeffnung l im allgemeinsten Falle:

$$\Delta l = \frac{f}{3 E c l^2} \sum_0^l P a (l-a)(l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) + \alpha \tau l - H(1+\varepsilon) \frac{8 l f^2}{15 E c}, \tag{3}$$

wofür wir mit

$$A = \frac{f}{c l^2} \sum_0^l P a (l-a)(l^2 + l a - a^2 - \beta l^2), \tag{4}$$

$$T = \tau l, \tag{5}$$

$$h = (1+\varepsilon) \frac{l f^2}{c} \tag{6}$$

auch schreiben können:

$$\Delta l = \frac{A}{3 E} + \alpha T - H \frac{8 h}{15 E}. \tag{7}$$

Hiernach gelten in den Oeffnungen $l_1, l_2, \ldots l_n$, wenn gleiche E, α (gleiches Trägermaterial) in denselben vorausgesetzt werden:

$$\Delta l_1 = \frac{A_1}{3 E} + \alpha T_1 - H \frac{8 h_1}{15 E},$$

$$\Delta l_2 = \frac{A_2}{3 E} + \alpha T_2 - H \frac{8 h_2}{15 E},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta l_n = \frac{A_n}{3 E} + \alpha T_n - H \frac{8 h_n}{15 E}.$$

Die Addition dieser n Gleichungen ergibt:

$$\Delta L = \frac{1}{3 E} \Sigma A + \alpha \Sigma T - \frac{8 H}{15 E} \Sigma h, \tag{8}$$

woraus der gesuchte Horizontalschub im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{5}{8} \frac{\Sigma A + 3 E \alpha \Sigma T - 3 E \Delta L}{\Sigma h}. \tag{9}$$

Die Summen Σ sind auf sämmtliche Oeffnungen zu erstrecken. Ist hiernach H bestimmt, so kann aus 3) oder 7) auch die Aenderung Δl jeder einzelnen Spannweite ermittelt werden, was jedoch für die Dimensionenfeststellung ohne Interesse ist. Nach 9) ist der Einfluss beliebiger Belastung aller Oeffnungen, beliebiger Temperaturänderungen der letzteren und einer Aenderung der Gesammtlänge ΔL allein:

$$H = \frac{5 \Sigma A}{8 \Sigma h}, \qquad H = \frac{15 E \alpha \Sigma T}{8 \Sigma h}, \qquad H = -\frac{15 E \Delta L}{8 \Sigma h}. \tag{10}$$

Wie bei einfachen Bogen (§ 16), so kann auch im vorliegendem Falle β fast immer vernachlässigt werden. Für vorläufige Berechnungen darf meist auch ε in 6) unberücksichtigt bleiben und in 4) an Stelle von $l^2 + l\,a - a^2$ der Mittelwerth $\frac{7}{6}\,l^2$ gesetzt werden.

Verschiedene Belastungen.

Für stetig vertheilte Lasten können die allgemeinen Formeln mit Rücksicht auf § 14 spezialisirt werden. So gelten in einer Oeffnung, welche mit u per Längeneinheit überall gleichmässig belastet ist:

$$A = \left(1 - \frac{5}{6}\beta\right)\frac{u\,f\,l^3}{5\,c} \qquad 11)$$

und die Gleichungen § 16, 18)—20), in einer Oeffnung mit verschiedenen gleichmässig vertheilten Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Hälfte:

$$A = \left(1 - \frac{5}{6}\beta\right)\frac{u + u'}{10}\,\frac{f\,l^3}{c} \qquad 12)$$

und die Gleichungen § 16, 25)—27).

Bezüglich der Umhüllungslinien U, U' der Kämpferdrücke und der Kernlinien in jeder betrachteten Oeffnung l bleibt es bei dem in § 16 für einfache Bogen mit zwei Gelenken Gesagten (S. 82). Um die Schnittlinie S der Kämpferdrücke zu erhalten, berücksichtigen wir, dass für eine bei a in l angreifende Einzellast P nach § 16, 2) und obigen Gleichungen 4) 9):

$$V = P\frac{l-a}{l}, \qquad H = \frac{5}{8\,\Sigma\,h}\,\frac{f}{c\,l^2}\,P\,a\,(l-a)(l^2 + l\,a - a^2 - \beta\,l^2),$$

womit nach § 16, 39) die Gleichung der Kämpferdrucklinie S in der Oeffnung l:

$$b = \frac{8\,l}{5\,f}\,\frac{c\,\Sigma\,h}{l^2 + l\,a - a^2 - l\,\beta^2}. \qquad 13)$$

Der Vergleich mit § 16, 40) zeigt, dass alle Ordinaten b

$$\frac{c}{l\,f^2}\,\frac{\Sigma\,h}{1 + \varepsilon} \text{ mal}$$

so gross sind, als wenn die betrachtete Oeffnung einen einfachen Bogen mit Kämpfergelenken bildete. Für einen solchen geht 13) mit $\Sigma\,h = h$ und 6) in § 16, 40) über.

Bei bewegter Last sind die Grenzwerthe der Beanspruchungen in jeder bestimmten Oeffnung l durch die Belastung der letzteren ganz so zu berechnen, als wenn der Trägerabschnitt dieser Oeffnung ein einfacher Bogen mit zwei Gelenken wäre (§ 16), selbstverständlich unter Verwendung der nun gültigen Kämpferdrucklinie 13). Mit diesen Grenzwerthen sind die durch die Belastung ausserhalb l und die Temperaturänderungen erzeugten Grenzwerthe, welche durch die Gleichungen § 16, 46) mit den betreffenden Grenzwerthen von H nach 10) ausgedrückt sind, so zu kombiniren, dass möglichst ungünstige (möglichst weit auseinander gelegene) Grenzwerthe im Ganzen entstehen.

Stützenreaktionen.

Als Vertikalreaktionen der Endstützen hat man natürlich das V der ersten und das V' der letzten Oeffnung (S. 77), deren Grenzwerthe stets leicht anzugeben sind (§ 12). Dagegen ist die Vertikalreaktion einer Zwischenstütze gleich dem V' der vorhergehenden, plus dem V der folgenden Oeffnung, d. h. nach § 16, 2) im allgemeinsten Falle:

$$R = \frac{1}{l_v} \sum_v Pa + \frac{1}{l_n} \sum_n P(l-a), \tag{14}$$

wenn die Summen $\sum_v$, $\sum_n$ sich auf alle Lasten in der vorhergehenden und nachfolgenden Oeffnung beziehen. Die Influenzlinie von R (vergl. § 12) verläuft hiernach wie in Fig. 99. Der untere Grenzwerth $\mathfrak{R}$ tritt stets bei Belastung durch das Eigengewicht der Konstruktion allein ein, er hat für ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht von g per Längeneinheit nach 14) mit Rücksicht auf § 14 oder nach § 12 mit Rücksicht auf Fig. 99 den Werth:

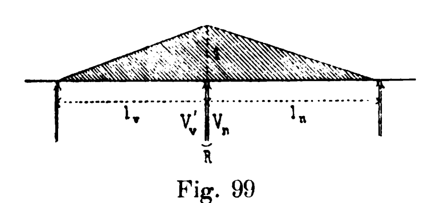


Fig. 99

$$\mathfrak{R} = (l_v + l_n)\frac{g}{2}. \tag{15}$$

Der obere Grenzwerth entsteht, wenn die beiden anliegenden Oeffnungen möglichst stark belastet sind, wobei jedoch die einzelnen Lasten umsomehr beitragen, jemehr sie sich der fraglichen Stütze selbst nähern. Man erhält ihn bei gleichmässig vertheilter Verkehrslast von g per Längeneinheit:

$$R = \mathfrak{R} + (l_v + l_n)\frac{p}{2}, \tag{16}$$

und bei bewegten Radlastzügen, wenn ein Zug mit möglichst grossen Lasten möglichst dicht um ein Rad O mit diesem Rade über der fraglichen Stütze beide anliegenden Spannweiten belastet:

$$R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l_v} \sum_v Pa + \frac{1}{l_n} \sum_n P(l-a), \tag{17}$$

worin sich die Summen Σ nur noch auf die Radlasten beziehen

Der grösste Horizontalschub H entsteht bei Vollbelastung (Eigengewicht plus Verkehrslast) aller Oeffnungen und höchster Temperatur, wobei im Falle bewegter Radlastzüge die grössten Lasten den Oeffnungs**mitten** möglichst zu nähern sind, der kleinste Horizontalschub tritt für Eigengewicht allein und bei niederster Temperatur ein.

Formänderungen.

Für die Formänderungen in jeder Oeffnung l gelten die in § 30 für Oeffnungen mit zwei Gelenken abgeleiteten Gleichungen, worin jedoch jetzt H durch 9) bestimmt ist. Die Einsenkungen in der Mitte einer Oeffnung l durch beliebige Belastung und beliebige Temperaturänderungen aller Oeffnungen, sowie durch symmetrische Belastung der betrachteten Oeffnung bei beliebiger Belastung der übrigen Oeffnungen, bleiben demnach durch § 16, 47) 52) 48) mit H nach obigen Gleichungen 10) bestimmt (wobei

β in A zu vernachlässigen ist, wie es bei Angabe der Einsenkungen in § 16 geschah). Man erhält also z. B. für eine Einzellast P in der Mitte von l nach § 16, 48):

$$e = \frac{P\,l - 5\,H f}{48\,E\,c}\,l^2, \tag{18}$$

für eine gleichmässig vertheilte von u per Längeneinheit auf der ganzen Spannweite nach § 16, 48) mit Rücksicht auf § 14:

$$e = \frac{u\,l^2 - 8\,H f}{384\,E\,c}\,5\,l^2, \tag{19}$$

für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Hälfte der Spannweite nach § 16, 47) mit Rücksicht auf § 14:

$$e = \frac{(u + u')\,l^2 - 16\,H f}{768\,E\,c}\,5\,l^2. \tag{20}$$

Hierbei können die andern Oeffnungen noch ganz beliebig belastet sein. Soll jedoch auch H nur von der angeführten Belastung herrühren, so hat man nach 4) 10) im Falle von 18):

$$H = \frac{25\,P f\,l^2}{128\,c\,\Sigma h},$$

im Falle von 19):

$$H = \frac{u f\,l^3}{8\,c\,\Sigma h},$$

und im Falle von 20):

$$H = \frac{u + u'}{16}\,\frac{f\,l^3}{c\,\Sigma h}.$$

Eine Temperaturänderung τ in der betrachteten Oeffnung l (für Zunahme τ positiv) erzeugt nach § 16, 52) mit H nach 10) 5):

$$e = -\,\alpha\,\tau f\left(1 + \frac{25\,l^3}{128\,c\,\Sigma\,h}\right), \tag{21}$$

und eine Aenderung ΔL der Gesammtlänge aller Oeffnungen (für Zunahme ΔL positiv) nach § 16, 54) mit 10):

$$e = \frac{25 f\,l^2}{128\,c}\,\frac{\Delta L}{\Sigma\,h}, \tag{22}$$

während eine Aenderung der relativen Höhenlage der Stützen, welche die Oeffnung l begrenzen (bei höherem Stützpunkt l ist Δk positiv) ergibt:

$$e = -\,\frac{\Delta k}{2} \tag{23}$$

Sonstige Höhenänderungen der Stützen sind ohne Einfluss auf e.

Gleiche Oeffnungen.

Werden die Bogenabschnitte in allen Oeffnungen mit gleichen l, f und gleichen Dimensionen (Querschnitte etc.) hergestellt, dann erhält man mit der Bezeichnung

$$B = \sum_0^1 P a\,(l-a)\,(l^2 + l\,a - a^2 - \beta\,l^2) = A\,\frac{c\,l^2}{f} \tag{24}$$

nach 4)—12) den Horizontalschub durch beliebige Belastung aller Oeffnungen:

$$H = \frac{5}{(1+\varepsilon)\,8\,f\,l^3}\,\frac{\Sigma B}{n}, \tag{25}$$

und speziell für beliebige gleichmässig vertheilte Lasten u in den einzelnen Oeffnungen:

$$H = \frac{1-\frac{5}{6}\beta}{1+\varepsilon}\,\frac{l^2}{8f}\,\frac{\Sigma u}{n}. \tag{26}$$

Der Horizontalschub durch beliebige Temperaturänderungen τ in den einzelnen Oeffnungen ist:

$$H = \frac{E\,c\,\alpha}{1+\varepsilon}\,\frac{15}{8f^3}\,\frac{\Sigma\tau}{n}, \tag{27}$$

und der Horizontalschub durch eine Aenderung ΔL ihrer Gesammtlänge L:

$$H = -\frac{E\,c}{1+\varepsilon}\,\frac{15}{8f^2}\,\frac{\Delta L}{n\,l}. \tag{28}$$

Diese Ausdrücke ergeben bei Belastung und Temperaturänderung nur einer Oeffnung sowie für eine bestimmte Längenänderung ΔL gerade $1/n$ so grosse Werthe als bei gleicher Belastung, Temperaturänderung, und Längenänderung eines einfachen Bogens mit Endgelenken von den Verhältnissen der Bogenabschnitte in den einzelnen Oeffnungen. Sind jedoch die Belastungen und Temperaturänderungen in allen Oeffnungen dieselben, dann hat man in 25)—28):

$$\frac{\Sigma B}{n} = B, \qquad \frac{\Sigma u}{n} = u,$$

$$\frac{\Sigma\tau}{n} = \tau, \qquad \frac{\Delta L}{n} = \Delta l,$$

(die letzte Gleichung mit Rücksicht auf 3)), womit die Gleichungen 25)—28) vollständig mit den entsprechenden für den einfachen Bogen mit zwei Gelenken übereinstimmen.

§ 22. Bogenfachwerke.

Bogenfachwerke sind als Fachwerke gegliederte Bogen. Man kann also einfache und kontinuirliche Bogenfachwerke (S. 2), verschiedene Formen derselben, Bogenfachwerke einfacher und mehrfacher Systeme unterscheiden (S. 57). Bereits in der Einleitung wurde darauf hingewiesen, dass bisher die Stützenreaktionen von Fachwerkbogen und Gitterbogen mit ausgesprochener Axe bis zu den Stützpunkten meist nach Formeln für elastische Bogenträger berechnet wurden (andere Berechnung s. in § 23 u. Citat S. 175). Nach Ermittelung der Stützenreaktionen können natürlich die gewöhnlichen Berechnungsmethoden für Fachwerkträger und Gitterträger zur Verwendung kommen, welche hier zu behandeln zu weit

führen würde. Wir wollen deshalb nur einige Formeln in Erinnerung bringen und auf gewisse Modifikationen aufmerksam machen, welche bei Bogenfachwerken einfachen Systems bezüglich der in § 11 gegebenen Regeln für die ungünstigsten Belastungen nöthig werden.

Es handle sich um die Beanspruchung B irgend eines Stabes eines beliebigen Fachwerkes einfachen Systems, wobei Zug als positiv gilt. Wir legen einen beliebig geformten Schnitt s so durch den Träger, dass Letzterer in zwei Theile I und II zerlegt erscheint (Fig. 100) und der fragliche Stab mit nicht mehr als zwei andern getroffen wird. Bezeichnet dann M_s das statische Moment der äusseren Kräfte des Trägers (Aktivkräfte und Stützenreaktionen) am Trägertheil I in Bezug auf den Durchschnittspunkt der Axen beider mitgetroffenen Stäbe und b das Perpendikel aus diesem Durchschnittspunkt auf die Richtungslinie von B (den Hebelarm von B), dann hat man bei beliebigen Einwirkungen:

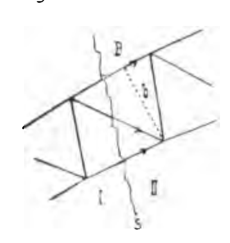


Fig. 100

$$M_s \pm B\,b = 0, \qquad B = \mp \frac{M_s}{b}, \qquad 1)$$

worin das obere oder untere Vorzeichen gilt jenachdem die vom Trägertheil I weggerichtete (als Zug eingeführte, vergl. Fig. 100) Kraft B wie der Uhrzeiger rechts um den Momentendrehpunkt (Fig. 100) oder aber links um denselben wirkt. Das Moment M_s kann in jedem einzelnen Falle numerisch berechnet werden, es lassen sich aber auch allgemeine Ausdrücke für dasselbe ableiten, welche Verallgemeinerungen der in § 1 gegebenen Formeln für ebene Querschnitte x sind.* Auf Grund dieser Ausdrücke von M_s und der zugehörigen Werthe von b können unmittelbar verwendbare Gleichungen für die Stabkräfte aufgestellt werden, von welchen wir diejenigen für den gewöhnlichsten und wichtigsten Fall anführen wollen (Anwendungen von 1) siehe z. B. II, Aufg. 20—23, Beisp. 18—22).

Der Träger sei zwischen zwei aufeinander folgenden Stützpunkten durch Vertikalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt, $l = n\lambda$. In jedem Felde befindet sich eine wirksame Diagonale, die aber zweierlei Stellungen haben kann. Es werden die in Fig. 101, 102 ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt (wonach diejenige Gurtung als X-Gurtung bezeichnet ist, welche man einer Diagonale nach der Seite vom Auflager 0 hin folgend trifft). x_m, z_m, d_m, h_m seien die Längen derjenigen Stäbe, welche durch X_m, Z_m, D_m, V_m beansprucht sind, während für ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit Ursprung der Koordinaten im Auflager 0 und horizontaler Abscissenaxe $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{z}_m$ die Koordinaten der Knotenpunte m d. h. auch der Knotenpunkte für die Abscisse $m\lambda$ in X-Gurtung und Z-Gurtung bedeuten. Dann gelten in allen folgenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei obenliegender X-Gurtung (Fig. 101, 115), die unteren Vorzeichen bei unten liegender X-Gurtung (Fig. 102, 120).

---

* Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887, §§ 7—10. — Derselbe, Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1888, A 4, 5. — Wir werden diese beiden Werke in §§ 22, 23 mit I und II citiren.

Bei beliebig gerichteten Aktivkräften in der Trägerebene (Lasten, Winddruck u. s. w.) hat man:

$$X_m = \mp M_s \frac{x_m}{\lambda h_m}, \qquad Z_m = \pm M_s \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}}, \tag{2}$$

$$D_m = \mp M_s \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, \qquad V_m = \pm M_s \frac{1}{\nu \lambda}, \tag{3}$$

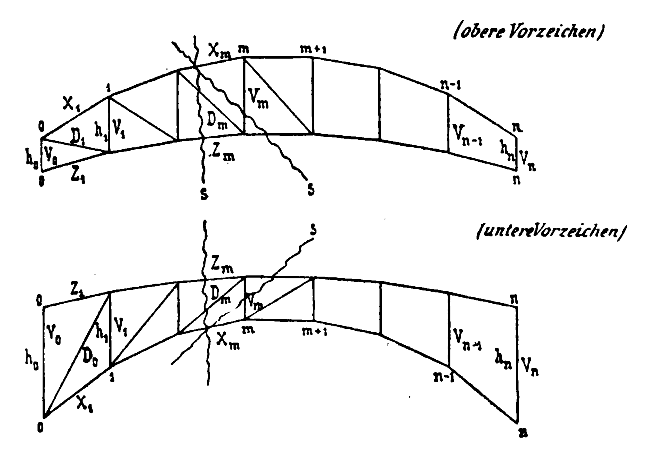


Fig. 101, 102.

worin sich M_s dem zu 1) Gesagten entsprechend, für X_m, Z_m, D_m auf einen Schnitt s durch die Stäbe x_m, z_m, d_m, für V_m auf einen solchen durch x_m, h_m, z_{m+1} bezieht, und allgemein:

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \tag{4}$$

$$\nu = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m+1}}, \tag{5}$$

speziell bei horizontaler X-Gurtung:

$$x_m = \lambda, \qquad \nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}, \tag{6}$$

und bei horizontaler Z-Gurtung:

$$z_m = \lambda, \qquad \nu = \varepsilon. \tag{7}$$

Die Formeln für X_m, Z_m, D_m gelten auch, wenn die Stellung der Diagonalen (und damit die Lage der X-Gurtung) wechselt, während die Formeln für V_m an die Bedingung geknüpft sind, dass sich zu beiden Seiten der Vertikale m Felder mit Diagonalen gleicher Stellung befinden, wobei jedoch eine Diagonale mit einem Gurtungsstabe zusammenfallen darf (Fig. 103, 104). Trifft dies nicht zu (Endvertikalen, Mittelvertikalen), so führen meist die Gleichgewichtsbedingungen für die äusseren Kräfte und Stabkräfte an begrenzenden Knotenpunkten rasch zum Ziel (siehe S. 171 und II A 39, 42, auch A 19, 24, 28. Näheres über vorstehende Gleichungen s. I §§ 16, 17, Anwendungen beispielsweise II. B 50, 58, 86).

Wir wollen nun speziell Bogenfachwerke des besprochenen Systems ins Auge fassen, welche an den Enden der betrachteten Oeffnung l Gelenke haben und nur durch vertikale Aktivkräfte (Lasten) ergriffen sind. Bezeichnen dann S, S' die statischen Momente der Knotenpunktslasten von Auflager 0 bis Schnitt s in Hinsicht des Auflagers 0 bezw. von Schnitt s bis Auflager l in Hinsicht des Auflagers l, so folgen aus 2) 3):

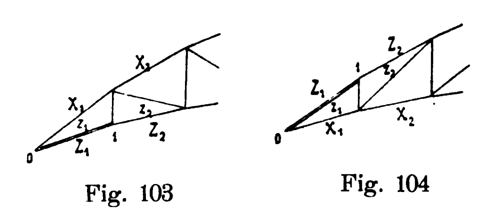


Fig. 103 Fig. 104

$$\left.\begin{aligned} X_m &= \mp [(n-m) S + m S' - H n \mathfrak{z}_m] \frac{x_m}{l h_m}, \\ Z_m &= \pm [(n-m+1) S + (m-1) S' - H n \mathfrak{x}_{m-1}] \frac{z_m}{l h_{m-1}}, \\ D_m &= \mp [(n-m+\varepsilon) S + (m-\varepsilon) S' - H n w_d] \frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}, \\ V_m &= \pm [(n-m+\nu) S + (m-\nu) S' - H n w_v] \frac{1}{\nu l}, \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

worin allgemein die Ordinaten der Durchschnittspunkte von x_m, z_m und von x_m, z_{m+1}:

$$w_d = \mathfrak{x}_m - \varepsilon (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) = \mathfrak{z}_m - \varepsilon (\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}), \quad 9)$$

$$w_v = \mathfrak{x}_m - \nu (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) = \mathfrak{z}_m - \nu (\mathfrak{z}_{m+1} - \mathfrak{z}_m), \quad 10)$$

und speziell bei horizontaler X-Gurtung oder horizontaler Z-Gurtung:

$$w_d = w_v = h_0, \quad 11)$$

unter h_0 die Länge der Vertikale bei Auflager 0 verstanden.

Für eine auf die ganze Spannweite l gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit, wovon u_x auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und u_z auf diejenigen der Z-Gurtung kommen, liefern vorstehende Gleichungen bei beliebigem (nicht nothwendig nur von dieser Belastung herrührendem) Horizontalschub H:

$$\left.\begin{aligned} X_m &= \mp \left[m (n-m) \frac{u \lambda^2}{2} - H \mathfrak{z}_m\right] \frac{x_m}{\lambda h_m}, \\ Z_m &= \pm \left[(m-1)(n-m+1) \frac{u \lambda^2}{2} - H \mathfrak{x}_{m-1}\right] \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}}, \\ D_m &= \mp \left[\varepsilon \left(m \frac{n-m}{\varepsilon} - n + 2m - 1\right) \frac{u \lambda^2}{2} - H w_d\right] \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, \\ V_m &= \pm \left[\nu \left(m \frac{n-m}{\nu} - n + 2m - \frac{u_x - u_z}{u}\right) \frac{u \lambda^2}{2} - H w_v\right] \frac{1}{\nu \lambda}. \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Für einen beliebigen Horizontalschub allein, also z. B. für die Beiträge durch Temperaturänderungen, unbeabsichtigte Aenderungen der Spannweite und, bei kontinuirlichen Bogenfachwerken, der angrenzenden Oeffnungen folgen aus 8):

$$X_m = \pm H \frac{x_m \mathfrak{z}_m}{\lambda h_m}, \qquad Z_m = \mp H \frac{z_m \mathfrak{x}_{m-1}}{\lambda h_{m-1}}. \quad 13)$$

$$D_m = \pm H \frac{d_m\, w_d}{\varepsilon\, \lambda\, h_{m-1}}, \qquad V_m = \mp H \frac{w_v}{\nu\, \lambda}. \tag{14)}$$

Wenn sich die beiden Gurtungen in den Endgelenken treffen, ergeben die Gleichungen 8) 12) 13) für $m = 1$ wegen $h_0 = 0$, $x_0 = 0$, den unbestimmten Ausdruck $Z_1 = 0:0$. Da jedoch fürs Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung des Knotenpunkts 1 im Z-Gurt (Fig. 103, 104):

$$Z_1 \frac{\lambda}{z_1} = Z_2 \frac{\lambda}{z_2},$$

so gilt allgemein:

$$Z_1 = Z_2 \frac{z_1}{z_2}. \tag{15)}$$

Für die Endvertikalen hat man:

im Falle von Fig. 105: $\quad V_0 = K_u - V + H \frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda},$ 16)

„ „ „ „ 106: $\quad V_0 = - K_o,$ 17)

und für die Mittelvertikale zur Mitte symmetrischer Fachwerke, mit $\sigma = \frac{n}{2}$, $\Delta = \mathfrak{x}_\sigma - \mathfrak{x}_{\sigma-1}$,

im Falle von Fig. 107: $\quad V_\sigma = - K_o - X_\sigma \frac{2\Delta}{x_\sigma},$ 18)

„ „ „ „ 108: $\quad V_\sigma = K_u - X_\sigma \frac{2\Delta}{x_\sigma},$ 19)

worin K_o, K_u die in den betreffenden Figuren (105—108) angedeuteten Knotenpunktslasten bezeichnen.

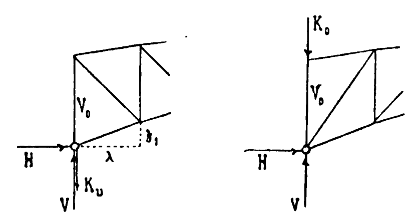


Fig. 105 Fig. 106

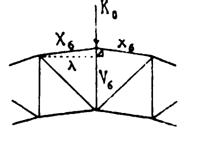


Fig. 107

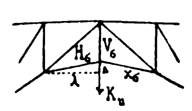


Fig. 108

Weiteres über die Gleichuugen 8)—14) und Ausdehnung derselben auf Bogen mit ungleichen Stützhöhen und mit Endmomenten s. I §§ 18, 19. Wird die Fahrbahnlast bei allen Vertikalen auf die Bogen übertragen, (was z. B. im Falle der Dourobrücke S. 94 nicht zutrifft), so gelten für beliebige Belastung neben 8) und 2) 3) noch andere Gleichungen, welche mitunter bequemer sind und im nächsten § für die wichtigsten hierher gehörigen Träger gegeben werden sollen. Für sonstige Fälle siehe I, § 18.

Obige Gleichungen lassen sich zum Theil für besondere Gurtungsformen vereinfachen, indem man die betreffenden speziellen Werthe von ε, ν, h_m, $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{z}_m$ eingesetzt (siehe dieselben I § 17). So hat man für Sichelträger, deren Gurtungen Parabeln der Pfeile f_x, f_z eingeschrieben sind,

$$\varepsilon = \frac{m\,(n-m)}{n-2m+1}, \qquad \mathfrak{x}_m = m\,(n-m)\,\frac{4 f_x}{n^2},$$

womit nach 9) $w_d = 0$, sodass der Horizontalschub nach 8) oder 14) keinen Einfluss auf die Beanspruchungen der Diagonalen ausübt. Infolgedessen wird für solche Träger nach 12) mit vorstehendem ε durch beliebige auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last $D_m = 0$.

In allen bis jetzt angeführten Formeln ist der Horizontalschub H im Allgemeinen von der Träger**art** abhängig. Derselbe kann aus rein statischen Bedingungen (§ 15) oder nach den abgeleiteten Formeln für elastische Bogenträger (§§ 16, 20, 21) oder auch auf Grund der Theorie statisch unbestimmter Fachwerke (§ 23) zu bestimmen sein. Für einfache Bogenfachwerke mit drei Gelenken und statisch bestimmte kontinuirliche Bogen (§ 21, I § 78) ist derselbe nur von der Belastung abhängig und ohne Rücksicht auf die Formänderungen bestimmt. Die ungünstigsten Belastungen einfacher Bogenfachwerke mit drei Gelenken können zwar ganz wie unten für Bogenfachwerke ohne Zwischengelenk ermittelt werden, wobei die Schnittlinie S der Kämpferdrücke wie in § 15 durch die Verbindungsgeraden der Gelenke bestimmt ist, doch lassen sich für Bogenfachwerke mit drei Gelenken und statisch bestimmte kontinuirliche Bogenfachwerke auch leicht direkt verwendbare Formeln für die Grenzwerthe der Stabkräfte bei gleichmässig vertheilter bewegter Last und bewegten Radlastzügen ableiten. Da wir dies an anderer Stelle gezeigt und durch Berechnung einer ganzen Reihe statisch bestimmter Bogenfachwerke erläutert haben (I §§ 66—75, 78—81; II *B* 84—91, 93—104, *A* 41—43), auch statisch bestimmte Fachwerke nicht zu den elastischen Bogenträgern gerechnet zu werden pflegen (S. 3), so sollen hier in erster Linie statisch **unbestimmte** Bogenfachwerke berücksichtigt werden, wobei es sich im Wesentlichen um Regeln für die ungünstigsten Belastungen entsprechend den in § 11 ür vollwandige Träger gegebenen handelt (für bewegte Radlastzüge siehe auch § 12).

Ungünstigste Belastungen. Für einfache Bogenfachwerke mit Kämpfergelenken und ausgesprochener Axe durch die letzteren kann die Kämpferdrucklinie S häufig nach den Gleichungen für vollwandige Träger verzeichnet werden (§ 16). In anderen Fällen finden sich die Ordinaten b für beliebige Abscissen a entsprechend § 2, 1) aus

$$b = \frac{a\,(l-a)}{H\,l},$$

worin H einer bei a angreifenden Einzellast $P = 1$ entspricht. Bei Feststellung der ungünstigsten Belastungen ist das in § 10 bezüglich der Kämpferdrücke R, R' durch eine Einzellast P Gesagte zu beachten, wonach jetzt die von P herrührende resultirende Schnittkraft in unserm beliebig geformten Schnitte s:

$$\text{für } P \text{ nach } s \qquad R_s = R,$$
$$\text{„ } P \text{ vor } s \qquad R_s = R'.$$

Die P bedeuten hierbei am Träger selbst angreifende Lasten, d. h. Knotenpunktslasten. Man hat ferner zu beachten, dase M_s in 1) das Moment dieser vom Trägertheil I (Fig. 100) her wirkenden Schnittkraft R_s und positiv oder negativ ist, jenachdem es rechts oder links um den be-

treffenden Momentenddrehpunkt wirkt, während positive Stabkräfte B Zug, negative Druck bedeuten. So ergeben sich die folgenden Regeln für Fachwerke mit Vertikalen und gleich oder verschieden langen Feldern, welche leicht auch auf Fachwerke ohne Vertikalen übertragen werden können. Doch halten wir die Anwendung von Vertikalen in fast allen bei diesen Ermittelungen für einzelne Stäbe in Betracht kommenden Fällen für zweckmässig. In Fig. 109—112 deuten wie früher fette Striche möglichst starke Belastung (Eigengewicht plus Verkehrslast), feine Striche möglichst schwache Belastung (Eigengewicht allein) der Knotenpunkte auf den betreffenden Strecken an.

Gurtungen (Fig. 109, 110, 116, 117, 121, 122). Bei Berechnung eines beliebigen Gurtungsstabes ziehe man aus den Endgelenken 0 und l Gerade durch den Schnittpunkt der beiden übrigen Stäbe des gleichen Feldes bis zu den Durchschnitten mit der Kämpferdrucklinie S. Für die eine Grenzbeanspruchung sind die Knotenpunkte zwischen diesen Durchschnitten, für die andere die übrigen Knotenpunkte möglichst stark zu belasten. Im Falle beide Gurtungen in den Endgelenken zusammentreffen, gelten für die Grenzwerthe von Z_1 dieselben Belastungen wie für die Grenzwerthe von Z_2 (siehe S. 171).

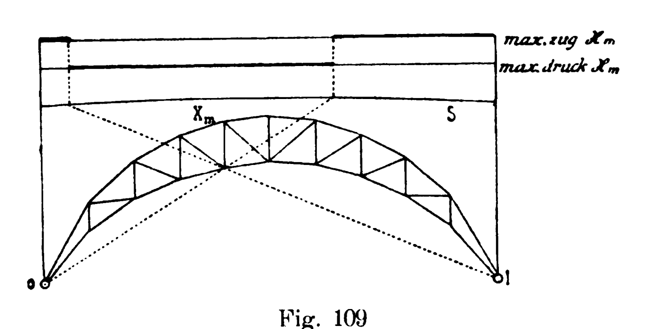


Fig. 109

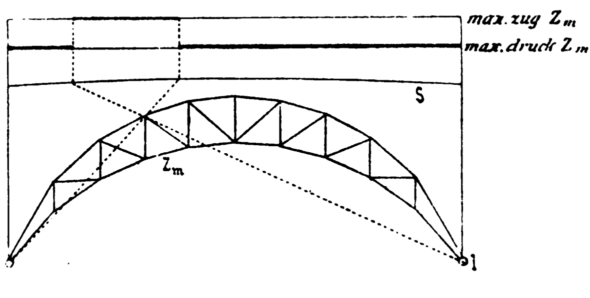


Fig. 110

Diagonalen (Fig. 111, 118, 123.) Bei Berechnung einer Diagonale d_m ziehe man aus den Endgelenken 0 und l Gerade R, R' durch den Schnittpunkt der beiden Gurtungsstäbe x_m, z_m ihres Feldes bis zu den Durchschnitten mit der Kämpferdrucklinie S. Es sind dann Belastungsgrenzen: 1. Der Durchschnitt von S, R', wenn er zwischen 0 und Vertikale h_{m-1} liegt; 2. der Durchschnitt von S, R, wenn er zwischen Vertikale h_m und l liegt; 3. der Schnitt s durch das Feld m selbst, wenn eine Kraft vom Gelenk 0 in der Richtung auf den Durchschnitt von S, h_m (Fig. 111) in andrem Sinne um den Schnittpunkt von x_m, z_m dreht, als eine Kraft vom Durchschnitt der Linien S, h_{m-1} in der Richtung auf das Gelenk l (Fig. 111).

Vertikalen (Fig. 112, 119, 124). Bei Berechnung einer Vertikale h_m ziehe man aus den Endgelenken 0 und l Gerade R, R' durch

den Schnittpunkt der Gurtungsstäbe x_m, z_{m+1} in den anliegenden Feldern bis zu den Durchschnitten mit der Kämpferdrucklinie S. Es sind dann Belastungsgrenzen:

1. Der Durchschnitt von S, R', wenn er zwischen 0 und dem letzten Angriffspunkte der Verkehrslast (Fahrbahnlast) vor dem Schnitte s durch x_m, h_m, z_{m+1} liegt; 2. der Durchschnitt von S, R, wenn er zwischen dem ersten Angriffspunkte der Verkehrslast nach jenem Schnitte s und l liegt; und der Schnitt s selbst, wenn eine Kraft vom Gelenk 0 in der Richtung auf den Punkt von S senkrecht über dem ersten Angriffspunkt der Verkehrslast nach s in anderem Sinne um den Schnittpunkt der Gurtungsstäbe x_m, z_{m+1} dreht, als eine Kraft von dem Punkte senkrecht über dem letzten Angriffspunkte der Verkehrslast vor s in der Richtung auf das Gelenk l. — Für die Kämpfervertikale 0 trifft der Schnitt s nur die Stäbe h_0, z_1 und tritt dann im Falle von Fig. 105 der Knotenpunkt 1 des Untergurts an Stelle des Schnittpunktes von x_m, z_{m+1}, während im Falle von Fig. 106 die Grenzbeanspruchungen zufolge 17) bei möglichst grossem und möglichst kleinem K_0 entstehen. Wenn bei Mittelvertikalen symmetrischer Bogenfachwerke $\Delta = x_\sigma - x_{\sigma-1} = 0$ ist (horizontale X-Gurtung), dann führen nach 18) 19) im Falle von Fig. 107 die Grenzwerthe von K_0, im Falle von Fig. 108 die Grenzwerthe von K_u zu den Grenzbeanspruchungen V_σ.

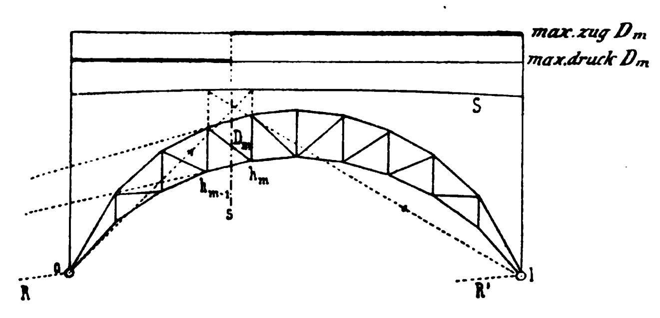


Fig. 111

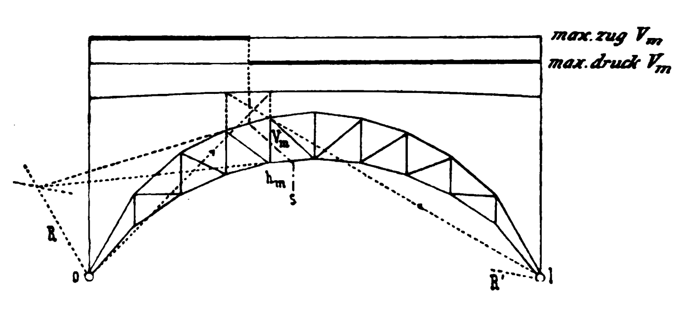


Fig. 112

Ist Δ von 0 verschieden, so kann man die Grenzbeanspruchungen V_σ (eventuell etwas zu ungünstig) aus 18) 19) mit den Grenzwerthen von K_0, X_σ, bezw. K_u, X_σ ohne Rücksicht auf gleichzeitiges Eintreten dieser Grenzwerthe berechnen (genaueres Vorgehen II A 28).

Durch vorstehende Regeln sind für jeden Stab zwei Belastungen bestimmt, welche die Grenzbeanspruchungen desselben liefern. Welche der beiden Belastungen den grössten Druck (oder kleinsten Zug) und den grössten Zug (oder kleinsten Druck) bedingt, ergibt sich natürlich bei der Berechnung von selbst, es kann jedoch auch aus den S. 172 erwähnten

allgemeinen Gesichtspunkten im Voraus festgestellt werden. Dabei genügt es, den Sinn des Beitrags einer Last P auf irgend einer der Beitragsstrecken zu ermitteln, da bei allen Grenzpunkten der letzteren Zeichenwechsel des Beitrags stattfinden. Die Grenzwerthe der Stützenreaktionen treten wie bei vollwandigen Bogen bei möglichst starker Belastung des ganzen Trägers ein. Mit den von der Belastung herrührenden Grenzwerthen sind in allen Fällen die durch andere Einwirkungen (Temperaturänderungen u. s. w.) bedingten so zu kombiniren, dass möglichst ungünstige (möglichst weit auseinander gelegene) Grenzwerthe im Ganzen entstehen.

Bogenfachwerke ohne Gelenke. Kontinuirliche Bogenfachwerke. Die gegebenen Regeln, eventuell mit Berücksichtigung von § 12, genügen für einfache Bogenfachwerke mit zwei und drei Gelenken bei gleich oder verschieden langen Feldern. Für einfache Bogenfachwerke ohne Gelenke tritt nur insofern eine Modifikation ein, als alle Linien, welche oben durch die Kämpfergelenke 0 und l zu ziehen waren, nun tangential den Umhüllungslinien U, U' zu ziehen sind (§ 2). Die Linien S, U, U' wurden übrigens in den bisher praktisch gewordenen Fällen entweder nicht verwendet oder auf Grund von Gleichungen für vollwandige Bogen verzeichnet (§ 17), doch steht nichts im Wege, R, R' für eine genügende Anzahl Lagen der Last P nach Beziehungen für das Fachwerk* zu ermitteln, und U als Umhüllungslinie dieser R, wie U' als Umhüllungslinie dieser R' zu erhalten (vergl. Beisp. 1).

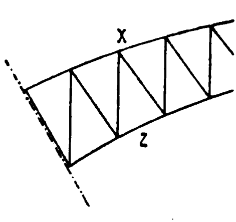


Fig. 113

Für die in § 21 behandelten kontinuirlichen Bogen, angeordnet nach dem S. 168 besprochenen Fachwerksystem, liefern obige Regeln die von der Belastung innerhalb einer betrachteten Oeffnung l herrührenden Grenzwerthe ihrer Stabkräfte, mit welchen die von der Belastung ausserhalb l und durch Temperaturänderungen erzeugten Grenzwerthe, ausgedrückt durch 13) 14) mit den betreffenden Grenzwerthen von H so zu kombiniren sind, dass möglichst ungünstige Grenzwerthe im Ganzen entstehen (§ 21). Bezüglich der Stützenreaktionen bleibt es bei dem in § 21 Gesagten. Ueber kontinuirliche Bogenfachwerke von statisch bestimmter Art siehe S. 172.

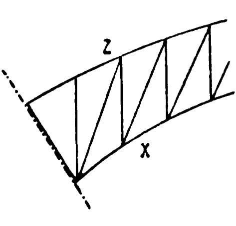


Fig. 114

Formänderungen. Die Einsenkungen und sonstigen Formänderungen von Bogenfachwerken mit ausgesprochener Axe hat man bisher nach Formeln für entsprechende vollwandige Bogen berechnet. Genauer ist wie am Schlusse des nächsten Paragraphen angegeben zu verfahren.

§ 23. **Bogenfachwerke mit Horizontalgurt.**

Während bei Bogenfachwerken mit ausgesprochener Axe durch die Stützpunkte die endgültige Berechnung des Horizontalschubes und der

---

* Luegers Lexikon der gesammten Technik, Bd. IV, Stuttgart 1897, Art. Fachwerke, statisch unbestimmte. — Die dort gegebenen Formeln genügen für alle hier nicht behandelten statisch unbestimmten Bogenfachwerke. Ueber statisch bestimmte Bogenfachwerke s. oben S. 172 und Citat S. 168.

Endmomente häufig nach den Formeln für elastische Bogenträger erfolgt, und nicht selten auch die Stabkräfte aus den Schnittkräften und Schnittmomenten vollwandiger Bogen ermittelt wurden, ist dies für Bogenfachwerke mit Endgelenken und horizontalem Obergurt im Allgemeinen nicht der Fall. Hier sind jedenfalls die Methoden für statisch unbestimmte Fachwerke zu verwenden, welche auch bei der gewöhnlich geringen Stabzahl keinen allzugrossen Zeitaufwand erfordern. Da wir uns nicht mit der Theorie der Fachwerke zu beschäftigen haben, so sollen die betreffenden Formeln für den Horizontalschub von Bogenfachwerken einfachen Systems mit Endgelenken nur kurz angeführt werden, wobei wir gleiches Material aller Stäbe, oder doch gleiche Elasticitätsmoduln E und Ausdehnungskoefficienten α derselben voraussetzen. (Näheres s. Citat S. 175).

Für irgend einen Stab mögen bezeichnen s die Länge, F den Querschnitt, π die Beanspruchung durch einen Horizontalschub $H = 1$ allein, und A diejenige Beanspruchung, welche durch die in Frage kommende Belastung im Falle $H = 0$ entstehen würde (d. h. für ein B a l k e n fachwerk der gewählten Anordnung). Dann hat man mit der Bezeichnung

$$e = \frac{s}{F} \tag{1}$$

durch beliebige Belastung allein:

$$H = -\frac{\Sigma e \pi A}{\Sigma e \pi^2}, \tag{2}$$

durch ein beliebige Temperaturänderung τ allein (bei Zunahme τ positiv):

$$H = \frac{l E \alpha \tau}{\Sigma e \pi^2}, \tag{3}$$

und durch eine Aenderung der Spannweite um Δl allein (bei Zunahme Δl positiv):

$$H = -\frac{E \Delta l}{\Sigma e \pi^2}. \tag{4}$$

In diesen Gleichungen sind die Summen Σ auf sämmtliche Stäbe zu erstrecken, doch ist der Beitrag der Füllungsglieder meist klein, sodass er oft vernachlässigt wurde. Der Nenner von 2)—4) ist nur von der Anordnung des Fachwerks und den s, F der Stäbe abhängig, bleibt also für alle Belastungen, Temperaturänderungen und Δl derselbe. Ist das Fachwerk vollständig symmetrisch zur Trägermitte, dann sind die e, π symmetrisch liegender Stäbe gleich gross, sodass sich $\Sigma e \pi^2$ aus den Verhältnissen der ersten Trägerhälfte berechnen lässt. Nachdem der Horizontalschub bekannt ist, erhält man die ganze Beanspruchung eines beliebigen Stabes:

$$B = A + H\pi, \tag{5}$$

worin A, π die angeführten Werthe für diesen Stab bedeuten. Bei Ermittelung der Beiträge τ, Δl allein ist $A = 0$.

Die Gleichungen 1)—5) gelten für beliebige Bogenfachwerke einfachen Systems mit Endgelenken (ohne Zwischengelenk). Setzen wir jedoch das in § 22 besonders betrachtete einfache System mit Vertikalen und gleich langen Feldern voraus, dann sind die π durch § 22, 13) 14)

mit $H = 1$, die A durch § 22, 8) mit $H = 0$ und speziell für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last durch § 22, 12) mit $H = 0$ bestimmt, abgesehen von den Ausnahmefällen, für welche die Gleichungen 15)—19) (S. 171) gelten und also auch die π, A liefern. Wir fassen nun speziell Fachwerke mit horizontalem Obergurt ins Auge, wobei sich in dem gewöhnlichen Falle symmetrischer Anordnung die Formeln auf die allein zu berechnende erste Trägerhälfte beziehen.

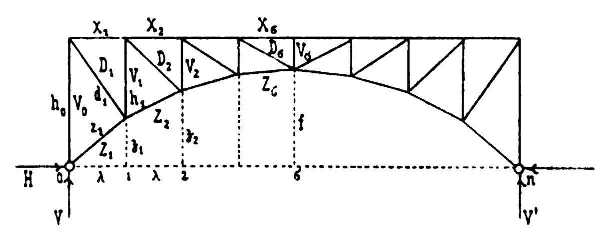


Fig. 115

Die X-Gurtung ist horizontal (Fig. 115).

Dann gelten in den Gleichungen des vorigen § die oberen Vorzeichen und

$$x_m = \lambda, \qquad \mathfrak{z}_m = w_d = w_v = h_0, \tag{6}$$

während ε, ν durch § 22, 4) 6) bestimmt sind. Für die Kämpfervertikalen und Scheitelvertikale hat man nach § 22, 16) 18) ausnahmsweise:

$$V_0 = K_u - V + H\frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda}, \qquad V_\sigma = -K_o. \tag{7}$$

Demgemäss folgen aus § 22, 13) 14) mit $H = 1$ die π für die X-Gurtung, Z-Gurtung, Diagonalen und Vertikalen, welchen wir zur Unterscheidung die Indices x, z, d, v geben:

$$\pi_x = \frac{\mathfrak{z}_m}{h_m}, \qquad \pi_z = -\frac{h_0}{\lambda}\frac{z_m}{h_{m-1}}, \tag{8}$$

$$\pi_d = \frac{h_0}{\varepsilon\lambda}\frac{d_m}{h_{m-1}}, \qquad \pi_v = -\frac{h_0}{\nu\lambda}, \tag{9}$$

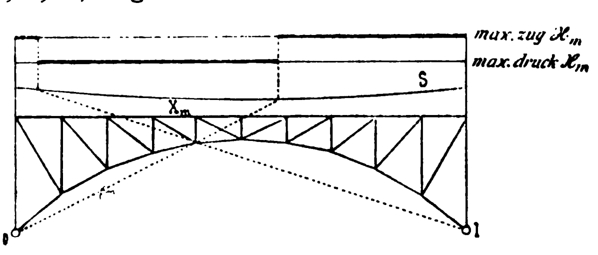


Fig. 116

jedoch ausnahmsweise für die Kämpfervertikalen und Scheitelvertikale aus 7):

$$\pi_0 = \frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda}, \qquad \pi_\sigma = 0. \tag{10}$$

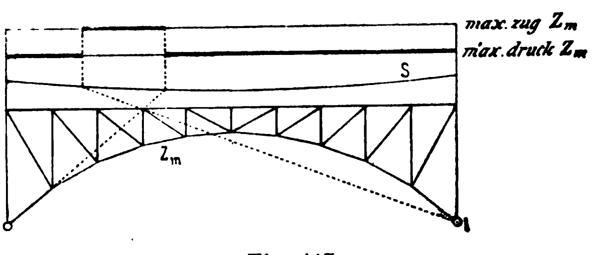


Fig. 117

Ist der Untergurt beispielsweise einem Parabelbogen vom Pfeile f eingeschrieben, dann hat man nach § 15, 8) mit $l = n\lambda$, $x = m\lambda$:

$$\mathfrak{z}_m = m\,(n-m)\,\frac{4f}{n^2}.$$

Bei Bogenfachwerken mit Horizontalgurt werden fast immer die Fahrbahnlasten bei allen Vertikalen auf die Bogen übertragen (Fahrbahnträger von Feldlänge). Alsdann gelten für beliebige Lasten $P_1, P_2, \ldots,$ welche bei irgendwelchen Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ auf die Fahrbahn oder auf die Knotenpunkte kommen, neben § 22, 8) mit obigen Werthen 6) diefolgenden Gleichungen, in welchen die Grenzen der Summen Σ Vertikalennummern bedeuten:

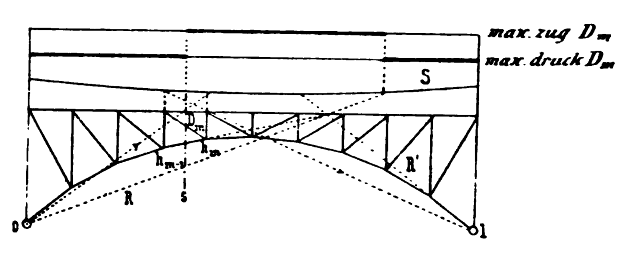


Fig. 118

$$X_m = -\left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a) - Hn\,\mathfrak{z}_m\right]\frac{1}{n\,h_m}, \qquad 11)$$

$$Z_m = \left[(n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^n P(l-a) - Hn\,h_0\right]\frac{z_m}{l\,h_{m-1}} \qquad 12)$$

$$D_m = -\left[(n-m+\varepsilon)\sum_0^{m-1} Pa + \sum_{m-1}^m P((m-1)\varepsilon l - (n\varepsilon-\varepsilon+m-n)a)\right.$$

$$\left. -(\varepsilon-m\sum_m^n P(l-a) - Hn\,h_0\right]\frac{d_m}{\varepsilon\,l\,h_{m-1}}, \qquad 13)$$

$$V_m = \left[(n-m+\nu)\sum_0^{m-1} Pa + \sum_{m-1}^m P((m-1)\nu l - (n\nu-\nu+m-n)a)\right.$$

$$\left. -(\nu-m)\sum_m^n P(l-a) - Hn\,h_0\right]\frac{1}{\nu\,l}. \qquad 14)$$

Diese Formeln und 7) können also mit $H = 0$ auch zur Berechnung der A in 2) 5) für die betreffenden Belastungen dienen (vergl. S. 177 oben).

Bezüglich der ungünstigsten Belastungen bleibt es bei den in § 22 gegebenen Regeln (Fig. 116—119). Die Grenzbeanspruchungen der Scheitelvertikale treten nach 7) zugleich mit den Grenzwerthen der darüber liegenden Knotenpunktslast ein.

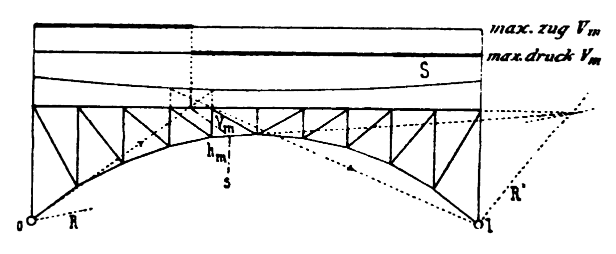


Fig. 119

Die Z-Gurtung ist horizontal (Fig. 120).

Der Fall ist weniger wichtig, da auch bei Berechnung doppelter Systeme auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme bequemer vorgegangen werden kann (a. a. O. I S. 307, 352). Es gelten die Gleichungen des vorigen § mit den unteren Vorzeichen und

$$z_m = \lambda, \qquad \mathfrak{z}_m = w_d = w_v = h_0, \tag{15}$$

während ε, ν durch § 22, 4) 7) bestimmt sind. Für die Kämpfervertikalen und Scheitelvertikale jedoch hat man nach § 22, 17) 19) ausnahmsweise:

$$V_0 = - K_0, \qquad V_\sigma = K_u + 2 X_\sigma \frac{h_{\sigma-1} - h_\sigma}{x_\sigma}, \tag{16}$$

Aus § 22) 13) 14) mit $H = 1$ folgen die π für die X-Gurtung, Z-Gurtung, Diagonalen und Vertikalen, welche wieder zur Unterscheidung die Indices x, z, d, v erhalten:

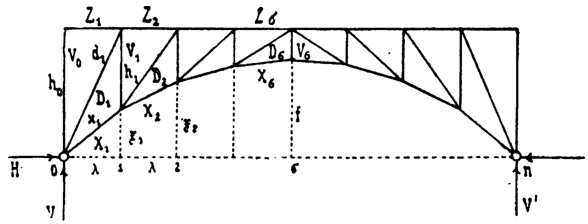


Fig. 120

$$\pi_x = - \frac{h_0}{\lambda} \frac{x_m}{h_m}, \qquad \pi_z = \frac{\mathfrak{z}_{m-1}}{h_{m-1}}, \tag{17}$$

$$\pi_d = - \frac{h_0}{\varepsilon \lambda} \frac{d_m}{h_{m-1}}, \qquad \pi_v = \frac{h_0}{\varepsilon \lambda}. \tag{18}$$

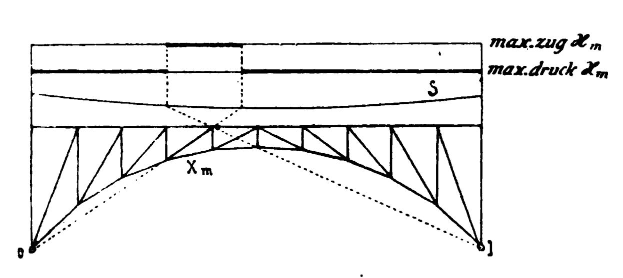


Fig. 121

Für die Kämpfervertikalen und Scheitelvertikale sind ausnahmsweise nach 16) mit 17):

$$\pi_0 = 0 \qquad \pi_\sigma = - \frac{2 h_0}{\lambda} \frac{h_{\sigma-1} - h_\sigma}{h_\sigma}. \tag{19}$$

Ist der Untergurt beispielsweise einem Parabelbogen vom Pfeile f eingeschrieben, dann hat man nach § 15, 8) mit $l = n\lambda$, $x = m\lambda$:

$$\mathfrak{z}_m = m(n-m) \frac{4f}{n^2}.$$

Wird die Fahrbahnlast, wie bei Bogenfachwerken mit Horizontalgurt gewöhnlich, bei allen Vertikalen auf den Bogen übertragen (Fahrbahnträger von Feldlänge), dann gelten für beliebige Lasten P_1, $P_2 \ldots$, welche an irgendwelchen Stellen $a_1, a_2 \ldots$, auf die Fahrbahn oder auf die Knotenpunkte kommen, neben § 22, 8) mit obigen Werthen 15) die folgenden Gleichungen, in welchen die

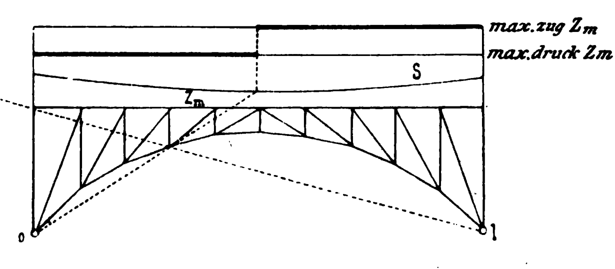


Fig. 122

Grenzen der Summen Σ Vertikalennummern bedeuten:

$$X_m = \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a) - H n h_0\right]\frac{x_m}{l\,h_m}, \qquad 20)$$

$$Z_m = -\left[(n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^n P(l-a) - H n\,\mathfrak{x}_{m-1}\right]\frac{1}{n\,h_{m-1}}, \qquad 21)$$

$$D_m = \left[(n-m+\varepsilon)\sum_0^{m-1} Pa + \sum_{m-1}^m P((m-1)\varepsilon l - (n\varepsilon-\varepsilon+m-n)a) - (\varepsilon-m)\sum_m^n P(l-a) - H n h_0\right]\frac{d_m}{\varepsilon\,l\,h_{m-1}}, \qquad 22)$$

$$V_m = -\left[(n-m+\varepsilon)\sum_0^m Pa + \sum_m^{m+1} P((\varepsilon+1)m l - (n\varepsilon-\varepsilon+m)a) - (\varepsilon-m)\sum_{m+1}^n P(l-a) - H n h_0\right]\frac{1}{\varepsilon\,l}. \qquad 23)$$

Diese Formeln und 16) können mit $H = 0$ auch zur Berechnung der A in 2) 5) für die betreffenden Belastungen dienen (vergl. S. 177 oben).

Bezüglich der ungünstigsten Belastungen bleiben die in § 22 gegebenen Regeln bestehen (Fig. 121—124). Die Grenzbeanspruchungen der Kämpfervertikalen treten nach 16) zugleich mit den Grenzwerthen der darüber liegenden Knotenpunktslast, diejenigen der Scheitelvertikale (weil K_u in 16) immer den gleichen Werth hat) zugleich mit den Grenzwerthen von X_0 ein.

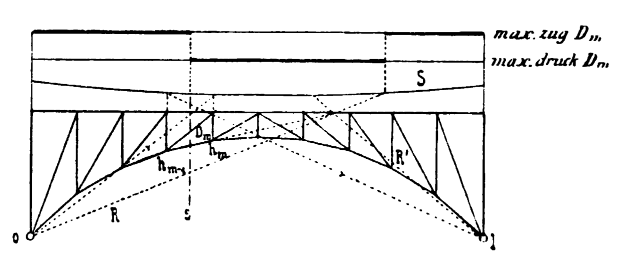


Fig. 123

Vorläufige Berechnungen.

In den obigen Gleichungen treten zufolge 1) die Stabquerschnitte auf. Dieselben sind durch eine vorläufige Berechnung annähernd festzustellen, z. B. auf Grund der Formeln für Bogenfachwerke mit drei Gelenken, für welche wir direkt verwendbare Ausdrücke der Grenzbeanspruchungen für alle Fälle und entsprechende Beispiele gegeben haben (Citat S. 168, IV. Abschnitte).

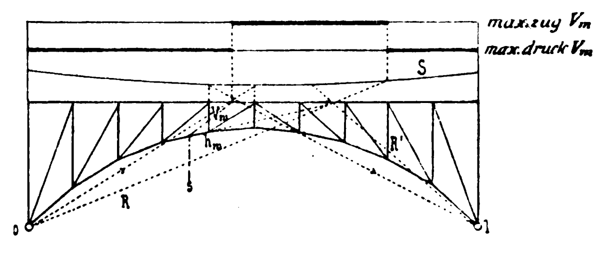


Fig. 124

Für Scheitelvertikalen wären die obigen Gleichungen 7) 16) verwendbar. Man kann jedoch auch beabsichtigen, bei der vorläufigen Berechnung nur einige

im Voraus bestimmte Belastungsfälle zu berücksichtigen, z. B. Eigengewicht allein, Vollbelastung des ganzen Bogens und einseitige Belastung bis zur Trägermitte, womit man bei symmetrischen Trägern für jeden Stab vier Beanspruchungen erhält. Bei solchen Rechnungen ist die Verwendung vereinfachter Formeln für den Horizontalschub zulässig.

Wenn beispielsweise in 2)—4) der Einfluss der Füllungsglieder vernachlässigt, ein mittlerer Querschnitt f_u des Untergurts eingeführt und das Verhältniss der Querschnitte des Untergurts und Obergurts konstant

$$\beta = \frac{f_u}{f_o} \tag{24}$$

gesetzt wird,* dann hat man nach 1)—4) bei beliebigem einfachem System durch beliebige Belastung:

$$H = -\frac{\sum\limits_u s\pi A + \beta \sum\limits_o s\pi A}{\sum\limits_u s\pi^2 + \beta \sum\limits_o s\pi^2}, \tag{25}$$

durch eine beliebige Temperaturänderung τ:

$$H = \frac{l f_u E \alpha \tau}{\sum\limits_u s\pi^2 + \beta \sum\limits_o s\pi^2}, \tag{26}$$

und durch eine Aenderung Δl der Spannweite:

$$H = -\frac{f_u E \Delta l}{\sum\limits_u s\pi^2 + \beta \sum\limits_o s\pi^2}, \tag{27}$$

worin die Summen $\sum\limits_u$, $\sum\limits_o$ sich auf alle Stäbe des Untergurts bezw. Obergurts beziehen. Für symmetrisch zur Mitte angeordnete Fachwerke sind die s, π je zweier symmetrisch gelegener Gurtstäbe gleich gross. In 25) kommt überhaupt kein Querschnitt mehr vor. Das Verhältniss β liegt für Bogen mit ausgesprochener Axe nahe bei 1 und im Allgemeinen etwa zwischen 1 und 3.

Die angeführten Voraussetzungen hat man häufig selbst für definitive Berechnungen beibehalten. Auch wurden bei letzteren oft die ungünstigsten Belastungen nicht bestimmt und nur wenige Belastungsfälle berücksichtigt, so bei den Sichelbogen S. 94 von 160 m Spannweite der Dourobrücke vier Fälle (Eigengewicht allein, Vollbelastung des ganzen Bogens, einseitige Belastung bis zur Trägermitte, Belastung der mittleren Strecke von 80 m Länge), bei den Bogenfachwerken von 36,75 m Spannweite mit Horizontalgurt ohne Gelenke der Frankfurter Neue-Mainzerstrasse-Brücke nur zwei Fälle (Vollbelastung des ganzen Trägers und einseitige Belastung bis zur Trägermitte). Bei der letzteren Brücke war das Verhältniss des Eigengewichts zur Verkehrslast $g:p = 3{,}25$.

Man kann beabsichtigen, für vorläufige Berechnungen noch bequemere Formeln als 25) zu verwenden, umsomehr als β im Voraus nicht

* Vergl. Engesser, Theorie und Berechnung der Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk, Berlin 1880, S. 10 (Beispiel: Itterbrücke bei Eberbach).

genau bekannt und also grosse Genauigkeit nicht zu erwarten ist. Bei beliebiger Belastung hat man nach § 15, 5) für Dreigelenkbogen mit $m = \frac{l}{2}$:

$$H = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^m Pa + \sum_m^l P(l-a)\right], \tag{28}$$

und näherungsweise für vollwandige Zweigelenkbogen nach § 16, 11):

$$H = \frac{5}{8fl^3}\sum_0^l Pa\,(l-a)\,(l^2 + l\,a - a^2), \tag{29}$$

oder noch einfacher nach § 16, 12):

$$H = \frac{35}{48fl}\sum_0^l Pa\,(l-a), \tag{30}$$

a	H nach 25) mit					$H =$ nach 28) mit		$H =$ nach 29) mit		$H =$ nach 30) mit	
in m	$\beta = 1$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = \infty$	$f = 2{,}79$	$f = 2{,}48$	$f = 2{,}79$	$f = 2{,}48$	$f = 2{,}79$	$f = 2{,}48$
2,1	0,329	0,384	0,405	0,416	0,450	0,376	0,423	0,463	0,521	0,494	0,556
4,2	0,641	0,757	0,800	0,823	0,896	0,753	0,847	0,884	0,995	0,890	1,001
6,3	0,922	1,106	1,174	1,210	1,324	1,129	1,270	1,230	1,384	1,186	1,334
8,4	1,141	1,400	1,496	1,547	1,708	1,506	1,694	1,475	1,659	1,384	1,557
10,5	1,239	1,579	1,706	1,772	1,984	1,882	2,117	1,601	1,801	1,483	1,668
Summe		5,266	5,581	5,768		5,646		5,653		5,437	
Mittel		1,053	1,116	1,154		1,129		1,131		1,087	

Hierin bedeutet f für 28) die Ordinate des Scheitelgelenks, für 29) 30) den Pfeil der Bogenaxe; es fragt sich, was bei näherungsweiser Berechnung von Bogenfachwerken ohne Scheitelgelenk mit Horizontalgurt dafür zu setzen wäre. In der folgenden Zusammenstellung, welche sich auf die von Engesser berechnete Itterbrücke bei Eberbach in Baden bezieht (Fig. 125), ist für f einmal die Ordinate der Mitte zwischen Obergurt und Untergurt im Scheitel (2,79 m), das andremal der Pfeil des Untergurts gesetzt (2,48 m). Die Zahlen geben den Horizontalschub H für eine Last $P = 1$ in den angeführten Entfernungen a von einem der Kämpfer.

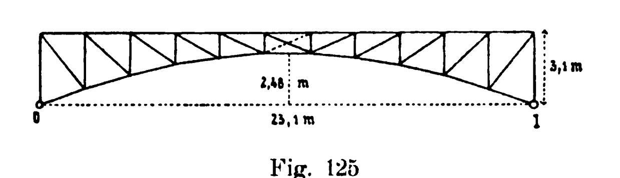


Fig. 125

Kontinuirliche Bogenfachwerke.

Alle aufgestellten Beziehungen gelten zunächst für einfache Bogenfachwerke mit Endgelenken. Für kontinuirliche Bogenfachwerke der in § 21 behandelten Art gelten die Gleichungen 1)—5), 24)—27) ebenfalls, wenn L, ΔL an Stelle von l, Δl gesetzt werden, unter L die Summe der Spannweiten verstanden, während die Σ sich auf die Stäbe aller Oeffnungen beziehen. Die Gleichungen 6)—23) bleiben für jede Oeffnung des Bogens der Systeme Fig. 115, 120 mit Horizontalgurt gültig. Die im vorigen § gegebenen Regeln für die ungünstigsten Belastungen dagegen liefern nur die von der Belastung innerhalb der betrachteten Oeffnung l (in welcher der zu berechnende Stab liegt) herrührenden Grenzwerthe, der Stabkräfte, mit welchen die durch § 22, 13, 14) mit obigen Werthen 6) oder 15) bestimmten, von der Belastung ausserhalb l und den Temperaturänderungen herrührenden Grenzwerthe so zu kombiniren sind, dass möglichst ungünstige Grenzwerthe im Ganzen entstehen. Die vorläufige Berechnung kann auf Grund der Formeln für die Grenzbeanspruchungen entsprechender statisch bestimmter Fachwerke (a. a. O. I §§ 78—81, II B 96—103) oder mit Hülfe der einfachsten in § 21 gegebenen Formeln ($\varepsilon = 0$ im Ausdrucke von h, u. s. w.) erfolgen.

Formänderungen.

Für die Verrückung eines beliebigen Knotenpunkts A eines Fachwerks in beliebiger Richtung g bei beliebiger Belastung und beliebigen Temperaturänderungen der einzelnen Stäbe hat man;

$$\gamma = \Sigma \left(\frac{B}{EF} + \alpha \tau \right) s \pi, \tag{31}$$

worin sich die Summe Σ bei einfachem Systeme auf alle Stäbe bezieht. Für letztere bedeuten s, F, E, α die Längen, Querschnitte, Elasticitätsmoduln und Ausdehnungkoefficienten, B die Beanspruchungen in dem Belastungs- und Temperaturfall, für welchen die Formänderung gesucht wird, und π diejenigen Beanspruchungen, welche durch eine Kraft

$Q = 1$ an A in der Richtung g allein bei Wegfall statisch unbestimmter Reaktionen (also mit $H = 0$ für die oben betrachteten Bogen) entstehen würden. Bei senkrecht nach abwärts gerichtetem g ist γ die Einsenkung des betreffenden Knotenpunktes. Näheres siehe Weyrauch, Aufgaben zur Theorie elastischer Körper, Leipzig 1885, S. 242; Luegers Lexikon der gesammten Technik, Art. Einsenkung, Gegenseitigkeit.

§ 24. Weiteres zur Berechnung von Bogen.

Wir haben uns bis jetzt im Allgemeinen darauf beschränkt, diejenigen Berechnungen zu begründen und vorzuführen, welche die Bogenträger speziell betreffen, da es nicht möglich ist, bei Betrachtung aller besonderen Trägerarten die allgemeinen Fragen immer von Neuem zu behandeln. Wir werden also auch hier nicht die Berechnung der Querträger und sonstigen Fahrbahnträger, des Windverbandes, die Art der Dimensionirung, der Berücksichtigung von Knickspannungen, excentrischer Druckbelastung, Nebenspannungen aller Art zur Darstellung bringen. Auf Einiges hievon wird im IV. Abschnitt einzugehen sein. Dagegen sollen noch einige Punkte berührt werden, welche bei Bogen im Besonderen interessiren könnten.

Blechbogen.* Es empfiehlt sich, die Querschnitte symmetrisch zur Axschicht anzuordnen, da andernfalls die Bogenaxe nicht die vorausgesetzte regelmässige Form hat, und die Konstruktion an Einfachheit verliert, ohne dass man sicher wäre, die Gurtungsquerschnitte mit den thatsächlichen Beanspruchungen genauer als bei symmetrischen Querschnitten im Einklang zu bringen.

Die Stärke der Vertikalplatte pflegt von vornherein angenommen zu werden, meist 1 bis 1,2 cm, da dieselbe auch horizontalen Einwirkungen widerstehen soll und stellenweise Schwächungen durch Rost auf die Dauer nicht mit Sicherheit zu vermeiden sind. Bei Versuchen mit Blechträgern haben sich diejenigen am besten bewährt, welche kräftige Vertikalplatten und solide Querversteifungen besassen. Eine in diesen Beziehungen genügende Vertikalplatte wird meist auch den Kräften in der Wandebene widerstehen.

Indessen lassen sich die grössten Quer- und Längsschubspannungen für jeden Belastungsfall nach § 9, 8), die grössten schiefen Spannungen nach § 9, 11) bestimmen, die sogenannten reduzierten Hauptspannungen wurden bei praktischen Berechnungen dieser Art bisher nicht in Betracht gezogen. Gegenüber den Querschubspannungen und Längsschubspannungen beispielsweise würde nach § 9, 8) 10) bei x eine Plattendicke genügen:

$$b = \frac{S_0}{J\tau} T_x, \qquad 1)$$

worin T_x die grösste Transversalkraft daselbst und τ die zulässige Schub-

---

* Vgl. Weyrauch, Die Festigkeitseigenschaften u. Methoden der Dimensionenberechnung von Eisen- und Stahlkonstruktionen, Leipzig 1889, §§ 32, 42, 45. Luegers Lexikon etc., Art. Blechträger, Dimensionenberechnung; bezüglich der reduzirten Hauptspannungen s. Art. Festigkeitsbedingung.

beanspruchung per Quadrateinheit bedeutet, welch letztere meist gleich $^4/_5$ der entsprechenden Zugbeanspruchung z angenommen wird. Unter Mitberücksichtigung der schiefen Wandspannungen kann man statt 1) einstweilen etwa setzen:

$$b = \frac{5\,T_x}{3\,h\,z}, \qquad 2)$$

unter h die Entfernung der Gurtungsschwerpunkte verstanden.

Die grösste zulässige Nietttheilung zur Verbindung der Vertikalplatte mit den Gurtungswinkeleisen (Fig. 126) lässt sich setzen:

$$t = \frac{2\,b\,d\,h\,z}{T_x}, \qquad 3)$$

wenn d den Nietdurchmesser bezeichnet, doch pflegt diese Formel zu grosse t zu liefern, da man nicht leicht über $6\,d$ bis $8\,d$ hinausgehen wird. Die Niettheilung zum Anschlusse der Deckplatten könnte im Allgemeinen grösser als 3) sein, pflegt jedoch derjenigen im Stehblech zu entsprechen (Fig. 126). Zum Stosse der Vertikalplatte genügen bei den stets angewandten doppelten Laschen auf jeder Seite der Stossfuge jedenfalls

$$n = \frac{h_n}{2\,d}, \qquad 4)$$

Niete, worin h_n die nutzbare Höhe der Vertikalplatte (in der äussersten Nietreihe nach dem Stosse hin) bedeutet.

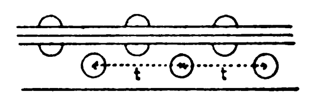


Fig. 126

Bei Wahl der zulässigen Normalspannungen σ (§ 8) berücksichtige man die Bemerkungen in §§ 4, 5 und zu IV *A*. Selbstverständlich ist mit den angenommenen Mittelwerthen nicht schablonenmässig zu verfahren, sondern allen besonderen Einflüssen soweit möglich Rechnung zu tragen. Wenn es beispielsweise keiner Erwähnung bedarf, dass gedrückte Glieder mit Rücksicht auf Zerknickung zu berechnen sind, so hat man bei den Vertikalständern von Blechbogen (ohne Diagonalen) weiter zu beachten, dass diese Glieder Erschütterungen und Stössen mehr als andere ausgesetzt sind, sodass die gewöhnlichen Sicherheitskoefficienten hier nicht ausreichen (IV *O*). Auch excentrische Druckbeanspruchungen können für dieselben, wie für manche Druckstäbe von Fachwerken, in Rechnung zu ziehen sein (IV *P*). Für den Bogen selbst ist festzustellen, dass genügende Sicherheit gegen seitliches Einknicken durch die Normalkraft N_x besteht (IV *K*). Bei allen diesen Berechnungen auf Grund von Knickformeln, wie in andern Fällen, für welche Theorie und Erfahrung noch nicht zu allgemein gesicherten Resultaten geführt haben, ist besondere Rücksicht auf etwa vorliegende Versuche unter ähnlichen Verhältnissen wie die in Frage stehenden zu nehmen (IV *O, P*).

Fachwerkbogen. Bezüglich der Stabkräfte von Bogenfachwerken einfachen Systems wurden in §§ 22, 23 Berechnungsmethoden auf Grund der gewöhnlichen Fachwerkstheorie vorgeführt. Der Horizontalschub H und etwaige Stützenmomente M, M' können dabei aus der Theorie vollwandiger Bogenträger oder aus der Theorie statisch unbe-

stimmter Fachwerke entnommen sein. Die Stabkräfte von Bogenfachwerken mehrfachen Systems wurden in praktischen Fällen meist auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme berechnet, so neuerdings wieder bei der Levensauer Brücke über den Nordostseekanal. Die schärfere Berechnung bietet zwar theoretisch keine Schwierigkeit,* ist aber bei einer grösseren Anzahl überzähliger Stäbe praktisch kaum durchführbar, während die Berechnung auf Grund der M_x, N_x, T_x vollwandiger Bogen, soweit die Füllungsglieder in Frage kommen, ebenfalls wenig Befriedigung gewährt. Da letztere jedoch häufig angewandt wurde (Coblenzer Brücke, Dourobrücke u. s. w.), so mögen noch einigeWorte darüber folgen.

Man nahm gewöhnlich an, dass die Gurtungen den N_x, M_x, die Füllungsglieder den T_x allein zu widerstehen haben. Für erstere gelten dann die Gleichungen § 8, 18) 19) mit $F = f_o + f_u$. Bezüglich der Füllungsglieder kommen Stellung und Systemzahl in Betracht, es genüge hier, die gegenwärtig fast allein vorkommenden Fälle ins Auge zu fassen.

Bei einfachem System verlangt das Gleichgewicht im Querschnitt x für einen Füllungsstab, welcher wie in Fig. 127 vom Querschnitt abliegt:

$$T_x - S\cos\delta = 0, \qquad S = \frac{T_x}{\cos\delta}, \qquad 5)$$

und für einen Füllungsstab, welcher wie in Fig. 128 vom Querschnitt abliegt (beispielsweise eine Vertikale auf der ersten Trägerhälfte):

$$T_x + S\cos\gamma = 0, \qquad S = -\frac{T_x}{\cos\gamma}, \qquad 6)$$

worin positive Stabkräfte S Zug bedeuten.

Bei doppeltem System mit gekreuzten Diagonalen kommen beide erwähnten Fälle gleichzeitig vor. Man hat dann (Fig. 129, worin jedoch γ, δ zu vertauschen sind):

$$T_x - S\cos\delta + S'\cos\gamma = 0, \qquad 7)$$

und wenn, analog der Zerlegung in einfache Systeme angenommen wird, dass beide Systeme gleiche Theile von T_x übernehmen:

$$S = \frac{T_x}{2\cos\delta}, \qquad S' = -\frac{T_x}{2\cos\gamma}, \qquad 8)$$

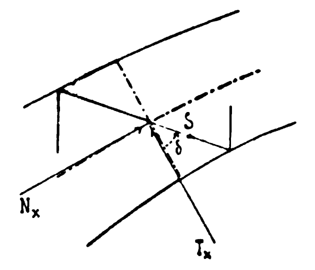


Fig. 127

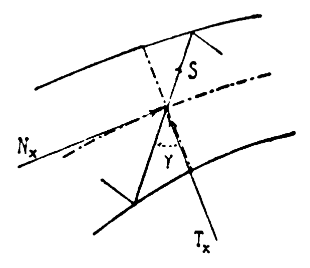


Fig. 128

Etwaige Füllungsglieder an den Feldergrenzen des doppelten Systems (z. B. Vertikalen) lassen sich aus den Bedingungen für das Gleichgewicht der äusseren und inneren Kräfte (Lasten, Stabkräfte etc.) an den begrenzenden Knotenpunkten berechnen. Es kommt dabei weniger auf genaue als auf nicht zu günstige Resultate an, sodass man zur Ermittelung von Grenzbeanspruchungen auch Werthe als gleichzeitig eintretend einführen darf, welche nicht genau

* Luegers Lexikon etc., Art. Fachwerke, statisch unbestimmte.

dem gleichen Belastungsfalle entsprechen. Uebrigens wurden bei Berechnungen wie die hier erwähnten immer nur eine Anzahl vorausgewählter Belastungsfalle berücksichtigt (ähnlich wie in Beispiel 13, 30 und IV A, vergl. S. 181) wobei sich jene Grenzbeanspruchungen mit den übrigen ergaben.

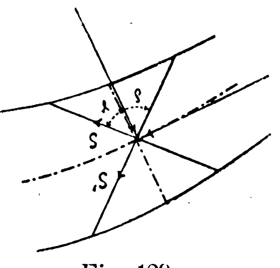


Fig. 129

Bei der Dourobrücke hat man sowohl für die Berechnung der Gurtungen als für diejenige der Füllungsglieder angenommen, dass auch letztere an der Uebertragung von N_x theilnehmen, was für die stets gedrückten Gurtungen etwas günstiger, für die Füllungsglieder etwas ungünstiger als obige Annahme war.

Unmittelbar verwendbare Formeln für Fachwerke doppelten Systems mit Vertikalen und gleichlangen Feldern siehe Citat S. 168 §§ 87, 88. Bei Bogen mit Endgelenken sind darin $M = M' = 0$, bei gleichen Stützhöhen $k = 0$ zu setzen. Ueber Nietverbindungen von Fachwerkträgern s. Citat S. 184, §§ 38—40, 43—45.

§ 25. **Ketten.**

Auch die Ketten können zu den Bogenträgern gerechnet werden. Eine vollkommene Kette ist ein Bogen mit stetig aufeinander folgenden (reibungslosen) Gelenken. Wir haben also für dieselben in allen Querschnitten:

$$M_x = c\,N_x = 0, \tag{1}$$

und damit nach § 1, 13) auch:

$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = T_x = 0. \tag{2}$$

Die Transversalkräfte sind gleich Null, die resultierenden Schnittkräfte wirken normal den Querschnitten oder tangential der Kettenaxe und greifen nach 1) in der letzteren an. Selbstverständlich sind auch die

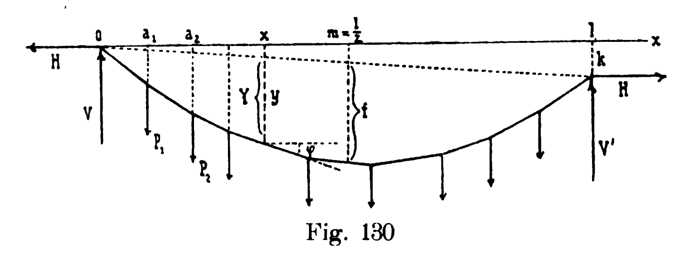


Fig. 130

Momente M, M' bei den Stützen gleich Null. Mit Rücksicht hierauf und 1) folgt aus § 1, 3) die allgemeinste Gleichung der Kettenlinien, d. h. die Gleichung der Kettenaxe für beliebige Belastung:

$$y = \frac{1}{H}\left[V x - \sum_0^x P(x-a)\right], \tag{3}$$

oder auch nach § 1, 8):

$$y = \frac{k}{l} x + \frac{1}{Hl}\left[(l-x)\sum_0^x Pa + x\sum_x^l P(l-a)\right], \qquad 3)$$

und wenn

$$Y = y - \frac{k}{l} x \qquad 5)$$

gesetzt wird, die vertikale Abweichung der Kettenlinie gegen die Verbindungsgerade der Stützpunkte:

$$Y = \frac{1}{Hl}\left[(l-x)\sum_0^x Pa + x\sum_x^l P(l-a)\right]. \qquad 6)$$

In diesen Gleichungen wie in allen Beziehungen für Ketten wollen wir die y nach unten, die H nach aussen (Fig. 130) und ziehende N_x als positiv ansehen, was nach § 1 ohne Aenderung der dortigen Formeln zulässig ist. Für gleiche Stützhöhen sind $k = 0$, $Y = y$.

Kennt man für irgend einen Punkt x, abgesehen von den Stützpunkten, die Ordinate y oder den Werth Y, so liefern vorstehende Gleichungen auch den Horizontalschub H. Wird beispielsweise für $x = \frac{l}{2} = m$ $Y = f$ gesetzt, so folgt aus 6):

$$H = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^m Pa + \sum_m^l P(l-a)\right]. \qquad 7)$$

Für stetig vertheilte Lasten lassen sich vorstehende Gleichungen mit Rücksicht auf § 14 spezialisieren. Ist beispielsweise die Belastung mit u per Längeneinheit auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilt, so sind nach § 14:

$$\sum_0^x Pa = \frac{u x^2}{2}, \qquad \sum_x^l P(l-a) = \frac{u}{2}(l-x)^2,$$

womit nach 6):

$$Y = x(l-x)\frac{u}{2H}, \qquad 8)$$

wir haben in diesem Falle die parabolische Kettenlinie. Wird für $x = \frac{l}{2}$ wieder $Y = f$ gesetzt, so drückt sich zufolge 8) der Horizontalschub aus:

$$H = \frac{u l^2}{8f}, \qquad 9)$$

womit wir anstatt 8) auch schreiben können:

$$Y = x(l-x)\frac{4f}{l^2}. \qquad 10)$$

Wie hier die Gleichung der parabolischen Kettenlinie, so können auch die Gleichungen anderer Kettenlinien aus 3)—6) erhalten werden. Die häufig in der höheren Analysis behandelte gemeine Kettenlinie entsteht, wenn die Belastung nicht wie bei der parabolischen Kettenlinie auf die Horizontalprojektion der Kette, sondern auf die Kettenlänge gleichmässig vertheilt ist. Dies trifft z. B. bei homogenen Ketten von konstantem

Querschnitt zu, wenn dieselben nur ihr eigenes Gewicht tragen. Uebrigens ist die gemeine Kettenlinie ohne praktische Bedeutung. Bei der Navierschen Kettenbrückenlinie werden ausser dem näherungsweise berücksichtigten Eigengewicht der Kette (einem Parabelbogen von konstantem Querschnitt entsprechend) eine auf die Horizontalprojektion gleichmässig vertheilte Last (Fahrbahnlast) und eine nach den Stützpunkten hin zunehmende Last (Eigengewicht der Tragstangen) angenommen. Hätten wir neben beliebigen koncentrirten Lasten eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit, so würde aus Gleichung 6) nach Ausscheiden der letzteren (welcher die nach 7) angeschriebenen Werthe der Σ entsprechen):

$$Y = \frac{1}{Hl}\left[x(l-x)\frac{ul}{2} + (l-x)\sum_0^x Pa + x\sum_x^1 P(l-a)\right], \qquad 11)$$

worin die Σ nur noch die koncentrirten Lasten umfassen. Wird für $x = \frac{l}{2} = m$ gesetzt $Y = f$, so folgt:

$$H = \frac{1}{2f}\left[\frac{ul^2}{4} + \sum_0^m Pa + \sum_m^1 P(l-a)\right]. \qquad 12)$$

Je flacher die Kette, desto eher wir das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf die Spannweite angesehen werden können.

Während Drahtseile als vollkommene Ketten berechnet werden, kommen bei Hängebrücken auch Ketten vor, welche aus gelenkartig verbundenen geraden Stäben von endlichen Längen bestehen (Fig. 131).

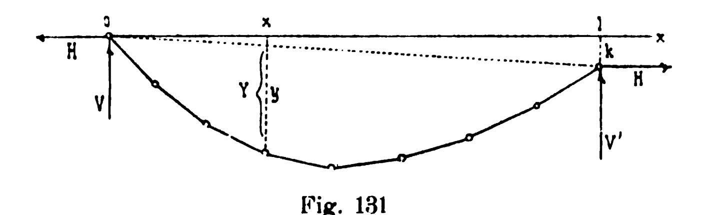


Fig. 131

Alsdann ist nur in den betreffenden Gelenkpunkten $M_x = 0$, sodass auch die abgeleiteten Ausdrücke von y, Y genau nur für diese gelten. — Da die Ketten und Kettenlinien in der Theorie der Hängebrücken eine besondere Behandlung zu erfahren pflegen, so haben wir keinen Grund, hier weiter darauf einzugehen.*

* Man sehe: Schwend, Ueber Berechnung und Konstruktion von Hängebrücken, Leipzig 1887; Handbuch der Ingenieurwissenschaften, zweiter Band: Der Brückenbau, IV. Abtheilung: Eiserne Bogenbrücken u. Hängebrücken, Leipzig 1888.

III. Abschnitt.

Ableitung statisch unbestimmter Grössen.

Es erübrigt noch die Ableitung derjenigen Formeln, auf welche im Eingang zum II. Abschnitt hingewiesen wurde. Die wichtigsten derselben sind bereits bei den betrachteten Trägern angeführt und in bisherigen Beispielen verwendet; doch muss ihre Begründung zur Beurtheilung ihrer Zuverlässigkeit und des Gültigkeitsbereichs eingesehen werden können. Andere Beziehungen betreffend die Formänderungen und daraus folgende Grössen werden erst in diesem Abschnitte gegeben, weil sie weniger oft zur Verwendung kommen. Im Ganzen beschränken wir uns auch hier auf das praktische Nöthige oder zur Aufklärung des Bedürfnisses dienende. Es können zweifellos Fälle elastischer Bogenträger oder Berechnungen in Betreff solcher vorkommen, welche auch in diesem Spezialwerke nicht besonders behandelt sind. Dieselben werden entweder leicht an der Hand der gegebenen Beziehungen zu erledigen sein, oder ihre allgemeine Behandlung würde so weit führen, dass es sich empfiehlt, gegebenen Falls auf die besonderen Verhältnisse Rücksicht zu nehmen. Bei ausnahmsweise schwierigen Problemen werden ohnehin entsprechend durchgebildete Ingenieure oder Docenten zur Verfügung sein.

§ 26. Kleine Formänderungen im Allgemeinen.

Wir haben in § 7 in der Trägerebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem von fester Lage gegen die anfängliche, dem spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur entsprechende Gruppirung der Stabpunkte angenommen (Fig. 132), und unter den Koordinaten

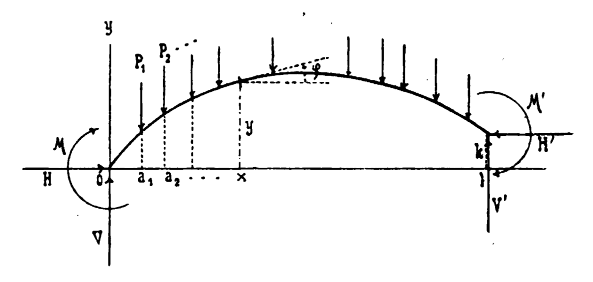


Fig. 132

x, y eines Querschnitts die anfänglichen Koordinaten seines in der Stabaxe liegenden Schwerpunktes, unter φ den anfänglichen Winkel der Stabaxe bei x mit der positiven Richtung der Abscissenaxe verstanden. Die den betrachteten Formänderungen entsprechenden Aenderungen von x, y, φ

wurden durch Δx, Δy, $\Delta \varphi$ bezeichnet. Nach § 7, 1) 2) hat man für kleine Formänderungen:

$$d\Delta x = -\Delta\varphi\, dy + \frac{d\Delta s}{ds} dx, \tag{1}$$

$$d\Delta y = \Delta\varphi\, dx + \frac{d\Delta s}{ds} dy, \tag{2}$$

worin, wenn die Zunahmen $d\Delta s$, $d\Delta\varphi$ von x bis $x+dx$ nur von den in den §§ 3, 4, 6 betrachteten Spannungen und Temperaturänderungen herrühren nach § 6, 5) 6):

$$\frac{d\Delta s}{ds} = Y = \alpha\tau - \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{1}{EF}, \tag{3}$$

$$\frac{d\Delta\varphi}{ds} = Z = \frac{M_x}{EJ} + \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{1}{EFr}, \tag{4}$$

Die zuletzt erwähnte Voraussetzung trifft in den hier in Betracht kommenden Fällen nur dann nicht zu, wenn sich Zwischengelenke innerhalb einer Spannweite befinden, in welchem Falle die Aenderungen $\Delta\varphi$ unmittelbar nach und vor dem Gelenke um einen endlichen Werth $\omega = \Delta\varphi_n - \Delta\varphi_v$ verschieden sein können. Denn selbst wenn die Tangente an die Bogenaxe beim Zwischengelenke anfänglich horizontal war, wird sie im Allgemeinen nach der Deformation daselbst einen endlichen Winkel überschlagen (Fig. 133). Wir wollen jedoch diese Ausnahme unten bei Bogen mit drei Gelenken behandeln und setzen zunächst auch die Gleichungen 3) 4) als gültig voraus.

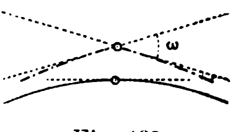


Fig. 133

Mit Rücksicht auf die Ausdrücke der Differentiale von Produkten

$$d(y\Delta\varphi) = \Delta\varphi\, dy + y\, d\Delta\varphi,$$
$$d(x\Delta\varphi) = \Delta\varphi\, dx + x\, d\Delta\varphi,$$

und die Bezeichnung 4) können wir in den Gleichungen 1) 2) setzen:

$$\Delta\varphi\, dy = d(y\Delta\varphi) - y Z ds, \tag{5}$$

$$\Delta\varphi\, dx = d(x\Delta\varphi) - x Z ds, \tag{6}$$

womit dieselben bei Beachtung von 3) folgende Formen annehmen:

$$d\Delta x = -d(y\Delta\varphi) + yZds + Ydx,$$
$$d\Delta y = d(x\Delta\varphi) - xZds + Ydy.$$

Da hierin nach § 3, 1)

$$ds = -r\, d\varphi, \tag{7}$$

so erhalten wir durch Substitution von 3) 4):

$$d\Delta x = -d(y\Delta\varphi) + \frac{M_x}{EJ} y\, ds - \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{dx + y\, d\varphi}{EF} + \alpha\tau\, dx, \tag{8}$$

$$d\Delta y = d(x\Delta\varphi) - \frac{M_x}{EJ} x\, dx - \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{dy - x\, d\varphi}{EF} + \alpha\tau\, dy, \tag{9}$$

$$d \Delta \varphi = \frac{M_x}{EJ} ds + \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{ds}{EFr}. \qquad 10)$$

Bei der Integration dieser Gleichungen treten bestimmte Integrale auf, welche wir im Allgemeinen wie folgt bezeichnen:

$$X_1 = \int_0^x \frac{M_x}{EJ} y\, ds, \qquad X_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{dx + y\, d\varphi}{EF}, \qquad 11)$$

$$Y_1 = \int_0^x \frac{M_x}{EJ} x\, ds, \qquad Y_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{dy - x\, d\varphi}{EF}, \qquad 12)$$

$$Z_1 = \int_0^x \frac{M_x}{EJ} ds, \qquad Z_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{ds}{EFr}, \qquad 13)$$

während ihre Werthe speziell für $x = l$ in der Folge durch die entsprechenden Buchstaben des grossen deutschen Alphabets mit gleichen Indices bezeichnet werden sollen.

Es mögen nun die Voraussetzungen und Bezeichnungen des § 1 gelten. Für alle betrachteten Bogen hat man bei beliebiger Belastung und beliebiger Temperaturänderung das Moment und die Normalkraft im Querschnittt x nach § 1, 3) 9):

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \qquad 14)$$

$$N_x = V_x \sin\varphi + H \cos\varphi, \qquad 15)$$

worin nach § 1, 4) 2) die Vertikalkraft bei 0 und x:

$$V = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hk + \sum_0^l P(l-a)\right], \qquad 16)$$

$$V_x = V - \sum_0^x P. \qquad 17)$$

In dem gewöhnlichen Falle gleichhoher Stützpunkte, welche stets in der Stabaxe zu denken sind, ist bei $x = l$ die Ordinate $y = k = 0$.

Die Gleichungen 8)—10) haben sowohl zur Ableitung der Formänderungen selbst, wie zur Bestimmungen derjenigen in 14)—17) auftretenden Grössen zu dienen, welche nicht aus rein statischen Gleichungen folgen, also bei Bogen mit zwei Gelenken des Horizontalschubs H, bei Bogen ohne Gelenke des Horizontalschubs H und der Endmamente M, M'. Die Integrale 11)—13) sind jedoch erst ausführbar, wenn die Form der Bogenaxe und die Veränderlichkeit des Querschnitts angenommen sind. Damit werden auch jene statisch unbestimmten Grössen und durch diese alle Beanspruchungen von der Bogenaxe und den Querschnitten des Bogens, sowie nach 11)—13) von der Temperaturänderung und, wie sich zeigen wird, von etwaigen Bewegungen der Stützpunkte abhängig.

Wir ziehen nun die im zweiten Abschnitte betrachteten Bogenarten in Betracht. φ_0, φ_1 mögen die Winkel φ für $x = 0$ und $x = l$ bedeuten. E und $\alpha\tau$ sollen für je eine betrachtete Oeffnung als gleich gelten.

Oeffnungen mit zwei Gelenken.

Für Oeffnungen mit Endgelenken allein sind $M = M' = 0$, H aus den Formänderungen zu berechnen. Da der Ursprung der Koordinaten

immer im Schwerpunkt eines Endquerschnitts bleibt, also für $x = 0$ $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ sind, so liefern die Gleichungen 8)—10) mit 11)—13) für beliebige x:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -\, y\,\Delta\varphi + X_1 - X_2 + \alpha\tau x,\\ \Delta y &= \quad x\,\Delta\varphi - Y_1 - Y_2 + \alpha\tau y,\\ \Delta\varphi &= \quad \Delta\varphi_0 + Z_1 + Z_2, \end{aligned}\right\} \quad 18)$$

wonach für $x = l$ zur Bestimmung von H, $\Delta\varphi_0$, $\Delta\varphi_1$ bei unveränderlicher Lage der Endgelenke:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l &= 0 = -\, k\,\Delta\varphi_1 + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \alpha\tau l,\\ \Delta k &= 0 = \quad l\,\Delta\varphi_1 - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2 + \alpha\tau k,\\ \Delta\varphi_1 &= \quad \Delta\varphi_0 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2. \end{aligned}\right\} \quad 19)$$

Wenn jedoch wie bei den in §§ 20, 21 betrachteten Bogen mit Zugstange und kontinuirlichen Bogen, und unbeabsichtigt auch bei gewöhnlichen einfachen Bogen mit Kämpfergelenken, Aenderungen Δl von l oder Δk von k eintreten, dann sind in 19) deren Werthe an Stelle von 0 zu setzen, was durch die Vorausstellung angedeutet ist. Bei Oeffnungen mit gleich hohen Endgelenken genügt wegen $k = 0$ die erste Gleichung 19) allein zur Bestimmung von H, wonach $\Delta\varphi_1$ aus der zweiten und schliesslich $\Delta\varphi_0$ aus der dritten folgen. Damit werden auch die Gleichungen 18) für beliebige x verwendbar.

Oeffnungen ohne Gelenke.

Für solche sind H, M, M' mit Rücksicht auf die Formänderungen zu bestimmen. Bei unveränderlich fest gespannten Endquerschnitten liefern die Gleichungen 8)—13) für beliebige x:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -\, y\,\Delta\varphi + X_1 - X_2 + \alpha\tau x,\\ \Delta y &= \quad x\,\Delta\varphi - Y_1 - Y_2 + \alpha\tau y,\\ \Delta\varphi &= \quad \Delta\varphi_0 + Z_1 + Z_2 \text{ mit } \Delta\varphi_0 = 0, \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

wonach für $x = l$ zur Bestimmung von H, M, M':

$$\left.\begin{aligned} \Delta l &= 0 = -\, k\,\Delta\varphi_1 + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \alpha\tau l \text{ mit } \Delta\varphi_1 = 0,\\ \Delta k &= 0 = \quad l\,\Delta\varphi_1 - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2 + \alpha\tau k \;\;„\;\; \Delta\varphi_1 = 0,\\ \Delta\varphi_1 &= 0 = \quad \Delta\varphi_0 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 \;\;„\;\; \Delta\varphi_0 = 0. \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Treten Verrückungen und Verdrehungen der Endquerschnittte, jedoch ohne Abheben von den Kämpfern, ein, so sind die betreffenden Δl, Δk, $\Delta\varphi_0$, $\Delta\varphi_1$ in 21) an die Stelle der 0 zu setzen, was durch den gewählten Ausdruck der Gleichungen angedeutet ist. Da für eine Aenderung Δk der relativen Höhenlage der Stützen ohne andere als die hierdurch bei senkrecht zur Axe bleibenden Querschnitten bedingten Verdrehungen der Endquerschnitte:

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_1 = \frac{\Delta k}{l},$$

so fallen auch für diesen Fall Δk, $\Delta\varphi_0$, $\Delta\varphi_1$ aus den Gleichungen 21), wonach eine solche Bewegung der Stützen keinen Einfluss auf H, M, M'

ausübt. Wohl aber würde Δk allein, d. h. mit $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_1 = 0$, Aenderungen von H, M, M' bedingen, wie dies auch stets für Δl gilt. Nach Ermittelung von H, M, M' werden auch die Gleichungen 20) für beliebige x anwendbar.

Oeffnungen mit drei Gelenken.

Für Oeffnungen mit Endgelenken und einem an beliebiger Stelle $x = m$, $y = f$ der Bogenaxe liegenden Zwischengelenke sind $M = M' = 0$, H wegen $M_m = 0$ aus 14) 16) oder § 1, 8) mit $x = m$ statisch bestimmt:

$$H = \frac{1}{lf - mk}\left[(l-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^l P(l-a)\right], \qquad 22)$$

sodass man auf die Formänderungen nur Rücksicht zu nehmen hat, wenn letztere selbst interessiren.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass bei $x = m$ eine Unstetigkeit der Winkeländerung $\Delta \varphi$ eintreten kann (S. 191). Zwischen 0 und m wie zwischen m und l hat jedoch auch hier $d\Delta \varphi$ den durch 4) ausgedrückten unendlich kleinen Werth. Demgemäss haben wir von $x = 0$ bis $x = m$ ganz wie bei Oeffnungen mit zwei Gelenken:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -y\Delta\varphi + X_1 - X_2 + \alpha\tau x, \\ \Delta y &= x\Delta\varphi - Y_1 - Y_2 + \alpha\tau y, \\ \Delta\varphi &= \Delta\varphi_0 + Z_1 + Z_2, \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

während zwischen $x = m$ und $x = l$ zunächst nach 1) 2) mit 3) 5) 6) gesetzt werden kann:

$$\Delta x = -\int_0^m [d(y\Delta\varphi) - yZds] - \int_m^x [d(y\Delta\varphi) - yZds] + \int_0^x X\, dx,$$

$$\Delta y = \int_0^m [d(x\Delta\varphi) - xZds] + \int_m^x [d(x\Delta\varphi) - xZds] + \int_0^x Y\, dy,$$

wozu nach 4) kommt, wenn $\Delta\varphi_v$, $\Delta\varphi_n$ die Werthe von $\Delta\varphi$ unendlich wenig vor und nach m bezeichnen:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \int_0^m Zds + \Delta\varphi_n - \Delta\varphi_v + \int_m^x Zds.$$

Diese Gleichungen können wir auch wie folgt schreiben:

$$\Delta x = -f\Delta\varphi_v - y\Delta\varphi + f\Delta\varphi_n + \int_0^x yZds + \int_0^x Ydx,$$

$$\Delta y = m\Delta\varphi_v + x\Delta\varphi - m\Delta\varphi_n - \int_0^x xZds + \int_0^x Ydy,$$

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_n - \Delta\varphi_v + \int_0^x Zds,$$

wonach, wenn

$$\omega = \Delta \varphi_n - \Delta \varphi_v \qquad 24)$$

den Sprungwerth von $\Delta \varphi$ beim Gelenk bedeutet (Fig. 133), nach Einsetzen der Ausdrücke 3) 4) mit den Bezeichnungen 11)—13) von $x = m$ bis $x = l$:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= - y \Delta \varphi + X_1 - X_2 + \alpha \tau x + \omega f,\\ \Delta y &= x \Delta \varphi - Y_1 - Y_2 + \alpha \tau y - \omega m,\\ \Delta \varphi &= \Delta \varphi_0 + Z_1 + Z_2 + \omega,\end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

und speziell für $x = l$ zur Bestimmung von ω, $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_1$ bei unveränderlicher Lage der Endgelenke;

$$\left.\begin{aligned}\Delta l = 0 &= - k \Delta \varphi_1 + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \alpha \tau l + \omega f,\\ \Delta k = 0 &= l \Delta \varphi_1 - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2 + \alpha \tau k - \omega m,\\ \Delta \varphi_1 &= \Delta \varphi_0 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \omega.\end{aligned}\right\} \qquad 26)$$

Wenn jedoch Aenderungen Δl, Δk von l, k eintreten, dann sind in 26) deren Werthe an Stelle von 0 zu setzen, was durch die Vorausstellung angedeutet ist. Die Gleichungen 25) 26) unterscheiden sich von den Gleichungen 18) 19) für Oeffnungen ohne Zwischengelenk nur dadurch, dass in letzteren $\omega = 0$ ist. Bei Oeffnungen mit gleich hohen Endgelenken genügt wegen $k = 0$ zur Bestimmung von ω die erste Gleichung 26), worauf die zweite $\Delta \varphi_1$ und schliesslich die dritte $\Delta \varphi_0$ liefert. Die Gleichungen 23) 25) für beliebige x werden dann ebenfalls verwendbar.

Durch die vorgeführten Beziehungen ist das die Ermittelung der statisch unbestimmten Grössen H, M, M' und der Formänderungen betreffende Problem vom Standpunkte der Mechanik aus als gelöst zu betrachten. Die Ausführung der Integrale bietet für den Ingenieur im Allgemeinen nur insofern Interesse, als die dabei gemachten Voraussetzungen und zugelassenen Vernachlässigungen die Gültigkeitsgrenzen und Genauigkeit der Resultate beeinflussen. Wir fassen zunächst den einfachsten und praktisch wichtigsten Fall ins Auge.

§ 27. **Horizontalschub des symmetrischen Parabelbogens mit zwei Gelenken.**

Nach § 26, 18) haben wir die Aenderung der Abscisse eines beliebigen Querschnitts x:

$$\Delta x = - y \Delta \varphi + X_1 - X_2 + \alpha \tau x, \qquad 1)$$

worin nach § 26, 11) wenn $dx = ds \cos \varphi$ berücksichtigt und ein konstanter Mittelwerth

$$c = J \cos \varphi \qquad 2)$$

eingeführt wird:

$$X_1 = \frac{1}{E c} \int_0^x M_x \, y \, dx. \qquad 3)$$

Handelt es sich nun um einen zur Trägermitte symmetrischen Parabelbogen von der Spannweite l und dem Pfeile f, so hat man:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x). \tag{4}$$

Mit diesem Werthe und dem allgemeinen Ausdrucke des Momentes bei x,

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \tag{5}$$

liefert die Integration von 3) (bezüglich der Integration von Summen Σ s. Luegers Lexikon der gesammten Technik II, Stuttgart 1895, Art. Belastung:

$$X_1 = \frac{f}{3Ecl^2}\Big[2Mx^2(3l-2x) + Vx^3(4l-3x) - H\frac{8f}{5l^2}x^3(10l^2-15lx+6x^2) - \sum_0^x P(x-a)^2(4lx-3x^2+2la-2xa-a^2)\Big], \tag{6}$$

und für Oeffnungen mit Endgelenken in gleicher Höhe wegen

$$M = 0, \qquad V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a) \tag{7}$$

speziell bei $x = l$, wo wie in § 26 die Werthe von X mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden:

$$\mathfrak{X}_1 = -H\frac{8lf^2}{15Ec} + \frac{f}{3Ecl^2}\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2). \tag{8}$$

Bei Ausführung des Integrals

$$X_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{dx + y\,d\varphi}{EF},$$

welches häufig vernachlässigt wird, gestatten wir uns anstatt des Parabelbogens einen Kreisbogen von gleichen l, f (Fig. 134), also dem Radius

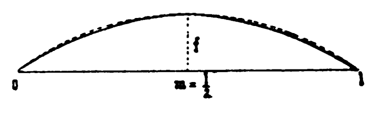


Fig. 134

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \tag{9}$$

zu Grunde zu legen. Dies ist umsomehr berechtigt, als in jenem Ausdrucke der Beitrag von N_x bei Weitem überwiegt, gerade N_x aber durch die Vertauschung selbst bei steilen Bogen nur wenig beeinflusst wird (vergl. z. B. Bemerk. zu Beisp. 30, S. 120). Da für den Kreisbogen (Fig. 135)

$$x = r(\sin\varphi_0 - \sin\varphi), \quad y = r(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

$$\sin\varphi = \frac{l-2x}{2r}, \qquad \cos\varphi = \frac{r-f+y}{r},$$

so erhalten wir

Fig. 135

$$dx = -r\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$d x + y\, d\varphi = -\, r \cos\varphi_0\, d\varphi = \cos\varphi_0\, d s = \frac{r-f}{r} d s,$$

und wenn wieder $d x = d s \cos\varphi$ gesetzt und ein konstanter Mittelwerth

$$k = F \cos\varphi \qquad 10)$$

eingeführt wird:

$$X_2 = \frac{r-f}{E k r} \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) d x, \qquad 11)$$

worin nun r den durch 9) bestimmten konstanten Werth hat. Da nach § 1, 9) 2) in unserm Falle

$$N_x = V_x \sin\varphi + H \cos\varphi = \left(V - \sum_0^x P\right) \frac{l-2x}{2r} + H \frac{r-f+y}{r},$$

so folgt:

$$\int_0^x N_x\, d x = \frac{V}{2r}(l x - x^2) - \frac{1}{2r} \sum_0^x P(x-a)(l-x-a) + \frac{r-f}{r} H x$$
$$+ \frac{H}{r} \int_0^x y\, d x,$$

während mit 5):

$$\int_0^x M_x\, d x = M x + V \frac{x^2}{2} - H \int_0^x y\, d x - \frac{1}{2} \sum_0^x P(x-a)^2.$$

Wir erhalten demnach aus 11) allgemein:

$$X_2 = \frac{r-f}{2 E k r^2} \left[2 M x + V l x + 2 H x (r-f) - \sum_0^x P(x-a)(l-2a)\right] \qquad 12)$$

und für Oeffnungen mit Endgelenken wegen 7) speziell bei $x = l$:

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{r-f}{E k r^2} \left[H l (r-f) + \sum_0^l P a (l-a)\right]. \qquad 13)$$

Nach Gleichung 1) hat man für $x = l$ wegen $y = k = 0$:

$$\Delta l = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \alpha \tau l, \qquad 14)$$

worin bei unveränderlicher Spannweite (Horizontalentfernung der Entgelenke) $\Delta l = 0$ wäre. Werden die Ausdrücke 8) 13) eingesetzt, so folgt für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos\varphi$:

$$\Delta l = -\, H \frac{8 l f^2}{15 E c}\left[1 + \frac{15 c}{8 k}\left(\frac{r-f}{r f}\right)^2\right] + \frac{f}{3 E c l^2} \sum_0^l P a (l-a)(l^2 + l a - a^2)$$
$$- \frac{r-f}{E k r^2} \sum_0^l P a (l-a) + \alpha \tau l. \qquad 15)$$

Hieraus folgt mit den abkürzenden Bezeichnungen:

$$\gamma = \frac{c}{k} = \frac{J \cos\varphi}{F \cos\varphi}, \qquad 16)$$

$$\varepsilon = \frac{15\gamma}{8}\left(\frac{r-f}{r f}\right)^2, \qquad \beta = \frac{3\gamma}{f} \frac{r-f}{r^2}, \qquad 17)$$

als Ausdruck des gesuchten Horizontalschubes im allgemeinsten Falle (für beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung τ und beliebige kleine Aenderung Δl der Spannweite):

$$H = \frac{5}{(1+\varepsilon)\,8 f l^3} \sum_0^1 P a\,(l-a)\,(l^2 + l a - a^2 - \beta l^2)$$
$$+ \frac{15 E c}{(1+\varepsilon)\,8 f^2}\left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l}\right). \qquad 18)$$

Für γ nach 16) kann man entweder wie bei der obigen Ableitung von H den Quotienten der Mittelwerthe von c und k oder aber den Mittelwerth von $\frac{J}{F}$ verwenden, da wir in 11) auch

$$\frac{d x}{F \cos \varphi} = \frac{J}{F} \frac{d x}{J \cos \varphi}$$

setzen und neben dem Mittelwerth $c = J \cos \varphi$ einen zweiten, $\gamma = \frac{J}{F}$, einführen durften. Theoretisch erscheint die erste Annahme desshalb etwas genauer, weil mit ihr in X_2 nur ein Mittelwerth zur Verwendung kommt. In praktischen Fällen führen beide Annahmen im Allgemeinen zu kaum von einander abweichendenden Resultaten. So erhielten wir für die Oeffnungen I—V der im IV. Abschnitt betrachteten Cannstatter Neckarbrücke nach der ersten bezw. zweiten Annahme (vergl. IV B):

1363,86	1504,42	1637,92	1504,74	1365,06,
1365,28	1504,31	1637,25	1504,31	1365,28.

§ 28. Bemerkungen zu den Formeln des § 27.

Die in den Gleichungen des vorigen Paragraphen auftretenden Grössen ε, β sind mit γ nach § 27, 16) wie folgt, ausgedrückt:

$$\varepsilon = \frac{15\gamma}{8}\left(\frac{r-f}{r f}\right)^2 = \frac{15\gamma}{8 f^2}\left(\frac{l^2 - 4f^2}{l^2 + 4f^2}\right)^2, \qquad 1)$$

$$\beta = 3\gamma \frac{r-f}{f r^2} = 24\gamma \frac{l^2 - 4f^2}{(l^2 + 4f^2)^2}, \qquad 2)$$

wonach dieselben in der Beziehung stehen:

$$\frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{8}{5} \frac{f}{r-f} = \frac{64}{5} \frac{f^2}{l^2 - 4f^2}. \qquad 3)$$

Bei Betrachtung symmetrischer Parabelbogen ohne Gelenk kommt hinzu:

$$\zeta = \frac{\gamma}{r^2} = \gamma\left(\frac{8f}{l^2 + 4f^2}\right)^2. \qquad 4)$$

Es fragt sich, welche dieser Grössen vernachlässigt werden können. Da für $f = 0$ mit $r = \infty$, $\cos \varphi = 1$, $\gamma = \frac{J}{F}$:

$$\varepsilon = \frac{15 J}{8 F} \infty^2, \qquad \beta = \frac{24 J}{F l^2}, \qquad \zeta = \frac{64 J}{F l^2} 0^2,$$

so ist klar, dass ε nicht bis zu beliebig flachen Bogen unberücksichtigt bleiben darf. Zur weiteren Beurtheilung müssen praktische Fälle herangezogen werden. Für die ältere Coblenzer Brücke von $l = 98{,}0775$ m $= 11 f$ hat man (Beisp. 16, S. 86):

$$\varepsilon = 0{,}045633, \quad \beta = 0{,}004992, \quad \zeta = 0{,}000114,$$

und für die im IV. Abschnitt behandelte Neckarbrücke zwischen Stuttgart und Cannstatt:

in Oeffnung		I	II	III	IV	V	
mit	$l =$	45,51	48	50,48	48	45,51	m
und	$f =$	4,375	4,735	4,855	4,505	3,695	m
	$\varepsilon =$	0,011523	0,010767	0,010464	0,012063	0,016870	
	$\beta =$	0,001415	0,001395	0,001287	0,001411	0,001462	
	$\zeta =$	0,000036	0,000038	0,000033	0,000034	0,000026	

Hiernach kann ζ wohl in allen praktischen Fällen und β meist ebenfalls vernachlässigt werden, während ε im Allgemeinen zu berücksichtigen ist. In letzterer Hinsicht kommt in Betracht, dass eine geringe Aenderung des Horizontalschubs wesentliche Aenderungen der Momente und Beanspruchungen hervorbringen kann (Vergl. Bemerk. zu Beisp. 30). Für H selbst würden z. B. bei der Coblenzer Brücke durch Vernachlässigung von ε Differenzen von etwa 4,56 % (Beisp. 16), ohne Vorhandensein der Kämpfergelenke aber solche von 27,38 % entstehen (Bemerk. zu Beisp. 27). Für die Momente und Normalspannungen könnten noch grössere Abweichungen eintreten (Bemerk. zu Beisp. 27 und zu Beisp. 30).

Die Unzulässigkeit einer allgemeinen Vernachlässigung von ε zeigt sich auch in den Konsequenzen derselben. So würde danach bei Belastung der ganzen Spannweite durch eine beliebig grosse gleichmässig vertheilte Last keine Einsenkung entstehen (§§ 15, 16, 17 und Aufg. 7), während doch z. B. für $f = 0$ bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk dieselben Einsenkungen entstehen sollten, wie bei Balken mit beiderseits frei drehbaren und beiderseits festgespannten Enden. Nebenbei ergibt die Annahme $\varepsilon = 0$ im Falle $f = 0$ für Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk $H = \infty$ anstatt $H = 0$, womit bei letzteren auch ganz unrichtige M, M' verbunden sind (vergl. S. 85, 102, 107).

Man könnte es auffallend finden, dass im Allgemeinen zwar β aber nicht ε vernachlässigt werden soll, während doch nach 3)

$$\text{für } \frac{f}{r} > \frac{5}{13} \qquad\qquad \beta > \varepsilon$$

ist. Allein bei so steilen Bogen ergibt sich nicht etwa β so gross, dass es wie ε berücksichtigt werden muss, sondern umgekehrt ε so klein, dass es wie β vernachlässigt werden kann. Für die Bogen der Dourobrücke (S. 94) von $l = 160$ m, $f = 42{,}65$ m beispielsweise hat man (Beisp. 40):

$$\varepsilon = 0{,}004287, \quad \beta = 0{,}005447, \quad \zeta = 0{,}001442,$$

während für $f = r$ nach 1) 2) ε und β gleich 0 werden. Uebrigens würden wir für den Bogen der Dourobrücke die Formeln für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ nicht zur Verwendung bringen (Vgl. Beisp. 40).

Die Annahme eines konstanten (mittleren) $J \cos \varphi$ bei der Berechnung statisch unbestimmter Grössen parabolischen Bogenträger entspricht der Annahme eines konstanten J bei Ermittelung entsprechender Grössen von Balkenträgern, sie erscheint oft berechtigter als diese. Während

der Verfasser durch vergleichende Berechnungen nachweisen konnte,*) dass bei einem kontinuirlichen Balken von den Oeffnungen 52, 65, 65, 52 m und einer Veränderlichkeit von J zwischen 1 und 2,17 die Annahme eines konstanten J bei den Vertikalkräften V_x kaum merkliche, bei den Momenten M_x im Allgemeinen unter 3 % bleibende Abweichungen ergab (jedoch an einer Stelle 6 %) schwankt $J\cos\varphi$ z. B. bei der älteren Coblenzer Brücke zwischen 1 und 1,19, bei der oben erwähnten Neckarbrücke in der ungünstigsten Oeffnung zwischen 1 und 1,50, die M_x aber sind bei Bogen weit kleiner als bei Balken unter sonst gleichen Verhältnissen.

Es gibt jedoch Fälle, in welchen die Annahme eines konstanten $J\cos\varphi$ nicht ohne weiteres zulässig ist. Hierher gehören insbesondere die steilen Sichelbogen nach Art des Bogens der Dourobrücke (S. 94), wie sie in neuerer Zeit mehrfach ausgeführt wurden. Bei diesen nehmen von den Kämpfern bis zum Scheitel gleichzeitig J und $\cos\varphi$ sehr bedeutend zu, sodass z. B. beim Dourobogen in den Feldermitten J zwischen 1 und 19,09, $J\cos\varphi$ sogar zwischen 1 und 27,62 schwankt (Beisp. 39). Mit Rücksicht auf solche Fälle und auf nicht parabolische Bogenaxe sollen in §§ 31, 32 auch Formeln für symmetrische Zweigelenkbogen von beliebiger Axform und beliebigen Querschnitten abgeleitet werden (Vergleich der Resultate mit denjenigen für den Parabelbogen s. Beisp. 40, 42). Dieselben können auch für Kreisbogen zur Verwendung kommen (s. über diese Aufg. 13, 14). Uebrigens ist für die gewöhnlichen flachen Brückenbogen die Parabelform auch abgesehen von der einfacheren Berechnung der Kreisform vorzuziehen, weil für sie bei gleichmässig vertheilter Belastung (annähernd für Eigengewicht allein und Vollbelastung) die günstigsten Beanspruchungen erreicht werden können (vergl. Aufg. 9 und IV E).

Aufgabe 13. Horizontalschub von Kreisbogen mit zwei Gelenken.

Es soll der von einer Temperaturveränderung τ und einer Aenderung Δl der Spannweite herrührende Horizontalschub des Bogens mit kreisförmiger Axe konstantem Querschnitt und Kämpfergelenken in gleicher Höhe berechnet werden.

Der verlangte Horizontalschub ist zufolge § 26, 19) aus

$$\Delta l = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \alpha \tau l \qquad 1)$$

zu berechnen, worin die $\mathfrak{X}$ die Werthe X nach § 26, 11) für $x = l$ bedeuten. Man hat also bei konstanten F, J, E, $\alpha\tau$:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_x\, y\, ds, \qquad 2)$$

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{1}{EF}\int_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)(dx + y\, d\varphi). \qquad 3)$$

Da hierin für den Einfluss von τ, Δl allein (d. h. wenn alle Lasten P gleich 0 gesetzt werden) nach § 16, 2)—5):

$$M_x = -Hy, \qquad N_x = H\cos\varphi,$$

und neben $ds = -r\, d\varphi$ (S. 14) speziell für den Kreisbogen (vergl. § 27):

$$y = r(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \qquad dx + y\, d\varphi = -r\cos\varphi_0\, d\varphi,$$

so erhalten wir:

---

*) Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuirlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, S. 129.

$$\mathfrak{X}_1 = -\frac{H}{EJ}\int_0^1 y^2\,ds = \frac{H r^3}{EJ}\int_0^1 (\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2\,d\varphi.$$

und bei Beachtung von $\varphi_1 = -\varphi_0$:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{H r^3}{EJ}(3\sin\varphi_0\cos\varphi_0 - 2\varphi_0\cos^2\varphi_0 - \varphi_0).$$

Wegen

$$N_x + \frac{M_x}{r} = H\cos\varphi_0$$

folgt weiter

$$\mathfrak{X}_2 = -\frac{H r}{EF}\cos^2\varphi_0\int_0^1 d\varphi = \frac{H r}{EF}\,2\varphi_0\cos^2\varphi_0.$$

Die Substitution der gefundenen $\mathfrak{X}$ in 1) ergibt:

$$\Delta l = \frac{H r^3}{EJ}(3\sin\varphi_0\cos\varphi_0 - 2\varphi_0\cos^2\varphi_0 - \varphi_0) - \frac{H r}{EF}\,2\varphi_0\cos^2\varphi_0 + \alpha\tau l, \tag{4}$$

woraus der gesuchte Horizontalschub:

$$H = \frac{\alpha\tau l - \Delta l}{\varphi_0 - 3\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + \left(1 + \frac{J}{F r^2}\right)2\varphi_0\cos^2\varphi_0}\,\frac{EJ}{r^3}. \tag{5}$$

Da hierin (vergl. § 27):

$$2r\varphi_0 = s, \qquad \sin\varphi_0 = \frac{l}{2r}, \qquad \cos\varphi_0 = \frac{r-f}{r}, \tag{6}$$

so können wir auch schreiben:

$$H = \frac{\alpha\tau l - \Delta l}{s r^2 - 3 l r (r-f) + 2 s (r-f)^2\left(1 + \frac{J}{F r^2}\right)}\,2EJ. \tag{7}$$

Um den Einfluss von τ oder Δl allein zu erhalten, hat man Δl bezw. τ gleich 0 zu setzen. Bezüglich der Berechnung von s siehe auch Beisp. 15.

Speziell für den Halbkreisbogen wird aus 7) mit $f = r = \frac{l}{2}$:

$$H = \frac{\alpha\tau l - \Delta l}{s r^2}\,2EJ = \frac{\alpha\tau l - \Delta l}{\pi l^3}\,16\,EJ \tag{8}$$

(vergl. Aufg. 14).

Die Ausdrücke des Horizontalschubs durch beliebige Belastung, welche sich für den Kreisbogen ergeben, sind im Falle genügender Genauigkeit zu umständlich für die Anwendung, abgesehen vom Halbkreisbogen (s. Aufg. 14), wesshalb wir für Kreisbogen, welche nicht so flach sind, dass sie nach den Formeln für Parabelbogen berechnet werden können (vergl. § 36), abgesehen vom Halbkreisbogen, die Formeln für beliebige Axe und beliebige Querschnitte empfehlen (Beisp. 23—26, 39, 41).

Beispiel 38. Horizontalschub von Kreisbogen mit zwei Gelenken (Coblenzer Brücke).

Für die in Beisp. 16 betrachteten Bogen der Coblenzer Brücke den Horizontalschub durch Temperaturänderungen und kleine Aenderungen der Spannweite nach den Formeln für Kreisbogen konstanten Querschnitts mit Kämpfergelenken zu berechnen. Mittelwerthe des Querschnitts und Trägheitsmoments $F = 0{,}16910$ qm, $J = 0{,}37344$ m^4.

Nach Gleichungen 7) der vorigen Aufgabe hat man:

$$H = \frac{\alpha\tau l - \Delta l}{s r^2 - 3 l r (r-f) + 2 s (r-f)^2\left(1 + \frac{J}{F r^2}\right)}\,2EJ, \tag{1}$$

worin mit $l = 98{,}0775$ m, $f = 8{,}91614$ m, $r = 139{,}314$ m, $s = 100{,}225$ m (Beisp. 15):

$$s r^2 = 100{,}225 \,.\, 139{,}314^2 = 1945206,$$
$$3 l r (r-f) = 3 \,.\, 98{,}0775 \,.\, 139{,}314 \,.\, 130{,}398 = 5345106,$$
$$\frac{J}{F r^2} = \frac{0{,}37344}{0{,}1691 \,.\, 139{,}314^2} = 0{,}000114,$$
$$2 s (r-f^2) \left(1 + \frac{J}{F r^2}\right) = 2 \,.\, 100{,}225 \,.\, 130{,}398^2 \,.\, 1{,}000114 = 3408855,$$

und wenn wieder $E = 2000000$ kg per qcm, $\alpha = 0{,}000012$ gesetzt werden:

$$H = (0{,}000012 \,.\, 98{,}0775\, \tau - \Delta l)\, \frac{2 \,.\, 2000000 \,.\, 100^2 \,.\, 0{,}37344}{8860}.$$
$$H = (0{,}0011769\, \tau - \Delta l)\; 1685960 \text{ kg}.$$

Diese Gleichung liefert für eine Temperaturänderung τ allein:

$$H = 1984{,}21\; \tau \text{ kg},$$

und beispielsweise für $\tau = \pm 30^0$:

$$H = \pm 59526 \text{ kg};$$

ferner für eine Aenderung der Spannweite um Δl allein:

$$H = -1685960\; \Delta l \text{ kg},$$

und beispielsweise für $\Delta l = 0{,}02$ m:

$$H = -33719 \text{ kg}.$$

Vergl. Bemerk. zu Beisp. 16.

Hätten wir $\frac{J}{Fr^2} = 0{,}000114$ gegen 1 vernachlässigt (Einfluss vom $\mathfrak{X}_2$ in Aufgabe 13), so würde sich

$$H = (0{,}0011769\, \tau - \Delta l)\; 1763173 \text{ kg}$$

oder 4,58 % grösser als oben gefunden haben. Dieser verhältnissmässig grosse Einfluss eines so kleinen Gliedes zeigt, dass bei Anwendung von 1) Genauigkeit erforderlich ist. Bezüglich parabolischer Axe s. Beisp. 16 (S. 86).

Aufgabe 14. Horizontalschub des Halbkreisbogens mit Kämpfergelenken. Den Horizontalschub des Halbkreisbogens konstanten Querschnitts mit Kämpfergelenken in gleicher Höhe für alle Fälle zu berechnen.

Es gelten die Gleichungen 1)—4) der vorigen Aufgabe, worin aber nun (vergl. Fig. 136):

$$x = r(1 - \sin\varphi), \qquad y = r\cos\varphi, \quad 1)$$
$$dx = -r\cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = -r\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$d\varphi = -\frac{dx}{r\cos\varphi} = -\frac{dx}{y},$$
$$y\, ds = -y r\, d\varphi = r\, dx,$$
$$dx + y\, d\varphi = 0,$$

sodass wir erhalten:

$$\mathfrak{X}_2 = 0, \; \Delta l = \mathfrak{X}_1 = \frac{r}{EJ}\int_0^1 M_x dx, \quad 2)$$

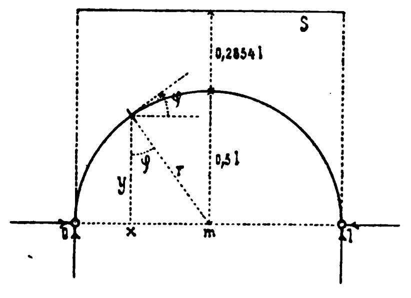


Fig. 136

Da nun für Bogen mit Kämpfergelenken nach § 16, 3) allgemein:

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a),$$

worin bei gleichen Stützhöhen:

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a),$$

so folgt (bezüglich der Integration von Summen Σ siehe Luegers Lexikon der gesammten Technik II, Stuttgart 1895, Art. Belastung):

$$\int_0^x M_x\,dx = V\frac{l^2}{2} + H r^2\int_0^1 \cos^2\varphi\,d\varphi - \sum_0^1 P\int_0^1 (x-a)\,dx$$

$$= V\frac{l^2}{2} - H\frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_0^1 P(l-a)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0^1 Pa(l-a) - H\frac{\pi r^2}{2},$$

und damit nach 2):

$$\Delta l = \frac{r}{2EJ}\left[\sum_0^1 Pa(l-a) - H\pi r^2\right] + \alpha\tau l,$$

woraus wegen $2r = l$ der gesuchte Horizontalschub:

$$H = \frac{4}{\pi l^2}\sum_0^1 Pa(l-a) + \frac{16EJ}{\pi l^3}(\alpha\tau l - \Delta l). \qquad 3)$$

Wir haben hiernach durch beliebige Belastung allein:

$$H = \frac{4}{\pi l^2}\sum_0^1 Pa(l-a), \qquad 4)$$

und mit Rücksicht auf § 14 für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit:

$$H = \frac{2u}{3\pi}l, \qquad 5)$$

für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$H = \frac{u+u'}{3\pi}l. \qquad 6)$$

Durch eine beliebige Temperaturänderung τ entsteht:

$$H = \frac{16EJ}{\pi l^2}\alpha\tau, \qquad 7)$$

und durch eine Aenderung der Spannweite um Δl:

$$H = -\frac{16EJ}{\pi l^3}\Delta l, \qquad 8)$$

Ueber die Kämpferdrucklinie von Halbkreisbogen siehe Aufgabe 2 (S. 11).

Bemerkungen. Beim Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$ hat man in dem Falle $2f = l$ wegen $\varepsilon = \beta = 0$ (§ 28) für eine gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit nach § 16, 21):

$$H = \frac{u}{4}l,$$

für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf beiden Trägerhälften nach § 16, 28):

$$H = \frac{u+u'}{8}l,$$

für eine Temperaturänderung τ nach § 16, 8):

$$H = \frac{15Ec}{2l^2}\alpha\tau,$$

und für eine Aenderung der Spannweite um Δl nach § 16, 9):

$$H = -\frac{15Ec}{2l^3}\Delta l,$$

Die Formeln für Parabelbogen sind also für Halbkreisbogen nicht genügend genau.

§ 29. Horizontalschub und Endmomente des symmetrischen Parabelbogens ohne Gelenke.

Wir betrachten symmetrische Bogen ohne Gelenke von parabolischer Axe der Gleichung

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \qquad 1)$$

unter den in § 27 gemachten Voraussetzungen. Demgemäss wird ein konstanter Mittelwerth

$$c = J \cos \varphi \qquad 2)$$

eingeführt, und bei Ausführung der durch § 26, 11)—13) bestimmten, gewöhnlich vernachlässigten Integrale X_2, Y_2, Z_2 neben einem Mittelwerth

$$k = F \cos \varphi \qquad 3)$$

anstatt des Parabelbogens ein Kreisbogen von gleichen l, f wie der Parabelbogen, also dem Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \qquad 4)$$

zu Grunde gelegt. Ueber die Zulässigkeit dieses Vorgehens s. S. 196, 199.

Die Werthe der Integrale X_1, X_2 in den Ausdrücken § 26, 20) für die Formänderungen von Bogen ohne Gelenke wurden bereits in § 27 unter vorstehenden Voraussetzungen abgeleitet. Die betreffenden Ausdrücke § 27, 6) 12) liefern im vorliegenden Falle mit dem durch § 17, 1) bestimmten

$$V = \frac{1}{l}\left[M' - M + \sum_0^1 P(l-a)\right] \qquad 5)$$

speziell für $x = l$:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{fl}{3Ec}\left[M + M' - H\frac{8f}{5} + \frac{1}{l^3}\sum_0^1 Pa(l-a)(l^2 + la - a^2)\right], \qquad 6)$$

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{(r-f)\,l}{2Ekr^2}\left[M + M' + 2H(r-f) + \frac{2}{l}\sum_0^1 Pa(l-a)\right]. \qquad 7)$$

Jezt werden auch die übrigen Integrale § 26, 11)—13) nöthig. Für die Ermittelung von H, M, M' würde es allerdings genügen, dieselben speziell für $x = l$ abzuleiten, da wir jedoch zur Berechnung der Formänderungen ihre Werthe auch für andere x brauchen, so sollen die Ausdrücke, wie im vorigen §, zunächst allgemein gegeben werden.

Nach § 26, 12) 13) haben wir mit Rücksicht auf $dx = ds \cos \varphi$ bei Einführung des Mittelwerths

$$Y_1 = \frac{1}{Ec}\int_0^x M_x\, x\, dx, \qquad Z_1 = \frac{1}{Ec}\int_0^x M_x\, dx. \qquad 8)$$

Diese Gleichungen liefern mit

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) \qquad 9)$$

und 1) für beliebige x:

$$Y_1 = \frac{1}{6Ec}\left[3Mx^2 + 2Vx^3 - H\frac{2f}{l^2}x^3(4l - 3x) - \right.$$
$$\left.\sum_0^x P(x-a)^2(2x+a)\right], \qquad 10)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2Ec}\left[2Mx + Vx^2 - H\frac{4f}{3l^2}x^2(3l - 2x) - \right.$$
$$\left.\sum_0^x P(x-a)^2\right], \qquad 11)$$

wonach für $x = l$:

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{l^2}{6Ec}\left[M + 2M' - 2Hf + \frac{1}{l^2}\sum_0^l Pa(l-a)(l+a)\right], \qquad 12)$$

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{l}{2Ec}\left[M + M' - H\frac{4f}{3} + \frac{1}{l}\sum_0^l Pa(l-a)\right]. \qquad 13)$$

Wird in § 26, 12) 13) dem Kreisbogen vom Radius 4) entsprechend gesetzt (vergl. § 27, S. 196):

$$dy - x\,d\varphi = -r\sin\varphi_0\,d\varphi = \sin\varphi_0\,ds = \frac{l}{2r}\,ds,$$

ferner $dx = ds\cos\varphi$ berücksichtigt, und der Mittelwerth 3) eingeführt, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} Y_2 &= \frac{l}{2Ekr}\int_0^x\left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)dx, \\ Z_2 &= \frac{1}{Ekr}\int_0^x\left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)dx, \end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

oder wegen § 27, 11):

$$Y_2 = \frac{l}{2}\frac{X_2}{r-f}, \qquad Z_2 = \frac{X_2}{r-f}, \qquad 15)$$

das heisst zufolge § 27, 12) für beliebige x:

$$Y_2 = \frac{l}{4Ekr^2}\left[2Mx + Vlx + 2Hx(r-f) - \sum_0^x P(x-a)(l-2a)\right], \quad 16)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2Ekr^2}\left[2Mx + Vlx + 2Hx(r-f) - \sum_0^x P(x-a)(l-2a)\right], \quad 17)$$

und speziell für $x = l$ nach Einsetzen von 5) oder einfacher nach 15) mit 7):

$$\mathfrak{Y}_2 = \frac{l^2}{4Ekr^2}\left[M + M' + 2H(r-f) + \frac{2}{l}\sum_0^l Pa(l-a)\right], \qquad 18)$$

$$\mathfrak{Z}_2 = \frac{l}{2Ekr^2}\left[M + M' + 2H(r-f) + \frac{2}{l}\sum_0^l Pa(l-a)\right]. \qquad 19)$$

Nach § 26, 21) hat man für Oeffnungen ohne Gelenke wenn $k = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l &= \alpha\tau l + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2, \\ \Delta k &= l\Delta\varphi_1 - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2, \\ \Delta\varphi_1 &= \Delta\varphi_0 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2, \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

worin bei unveränderlich festliegenden Endquerschnitten Δl, Δk, $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_1$ gleich Null wären. Durch Substitution der Ausdrücke 6) 7) 12) 13) 18) 19) nehmen die Gleichungen 20) mit den Bezeichnungen § 28 1) 2) 4) folgende Formen an:

$$\Delta l = \alpha \tau l + (M + M')\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\frac{l f}{3 E c} - H(1 + \varepsilon)\frac{8 l f^2}{15 E c} + \frac{f}{3 E c l^2}\sum_0^1 P a (l - a)(l^2 + l a + a^2 - \beta l^2), \qquad 21)$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_1 - M\left(1 + \frac{3\zeta}{2}\right)\frac{l^2}{6 E c} - M'\left(1 + \frac{3\zeta}{4}\right)\frac{l^2}{3 E c} + H\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\frac{f l^2}{3 E c} - \frac{1}{6 E c}\sum_0^1 P a (l - a)(l + a + 3\zeta l), \qquad 22)$$

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 + (M + M')(1 + \zeta)\frac{l}{2 E c} - H\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\frac{2 l f}{3 E c} + \frac{1 + 2\zeta}{2 E c}\sum_0^1 P a (l - a). \qquad 23)$$

Aus diesen drei Gleichungen können die drei Unbekannten H, M, M' für Bogen ohne Gelenke berechnet werden. Gleichung 21) würde mit $M = M' = 0$ wieder auf den Horizontalschub des symmetrischen Parabelbogen mit zwei Gelenken führen (§ 27).

Nun wurde aber in § 28 nachgewiesen, dass ζ für elastische Bogen stets verschwindend klein ist. Vernachlässigen wir es, so gehen die Gleichungen 21) bis 23) in die folgenden über:

$$\Delta l = \alpha \tau l + (M + M')\frac{2 - \beta}{6}\frac{l f}{E c} - H(1 + \varepsilon)\frac{8 l f^2}{15 E c} + \frac{f}{3 E c l^2}\sum_0^1 P a (l - a)(l^2 + l a - a^2 - \beta l^2), \qquad 24)$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_1 - (M + 2 M')\frac{l^2}{6 E c} + H\frac{2 - \beta}{6}\frac{f l^2}{E c} - \frac{1}{6 E c}\sum_0^1 P a (l - a)(l + a), \qquad 25)$$

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 + (M + M')\frac{l}{2 E c} - H\frac{2 - \beta}{3}\frac{l f}{E c} + \frac{1}{2 E c}\sum_0^1 P a (l - a). \qquad 26)$$

Aus diesen Gleichungen wären H, M, M' zu bestimmen, wenn man β berücksichtigen wollte.

Aber auch β pflegt in praktischen Fällen so klein, dass man es im Allgemeinen vernachlässigen kann (§ 28). Alsdann ergeben sich aus 21)—23) für einfache Bogen ohne Gelenke:

$$H = \frac{15}{(1 + 6\varepsilon) 4 f l^3}\sum_0^1 P a^2 (l - a)^2 + \frac{15 E c}{(1 + 6\varepsilon) 2 l f}\left[\frac{\alpha \tau l - \Delta l}{2 f} 3 - \Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_1\right] \qquad 27)$$

$$M = \frac{1}{(1+6\varepsilon)2l^3}\sum_0^l P a(l-a)^2(5a-2l-12\varepsilon l) +$$
$$\frac{3Ec}{(1+6\varepsilon)l}\left[\frac{\alpha\tau l - \Delta l}{2f}5 + \frac{2\Delta k}{l} - 3\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_1 + 4\varepsilon\left(\frac{3\Delta k}{l} - 2\Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_1\right)\right], \qquad 28)$$

$$M' = \frac{1}{(1+6\varepsilon)2l^3}\sum_0^l P a^2(l-a)(3l-5a-12\varepsilon l) +$$
$$\frac{3Ec}{(1+6\varepsilon)l}\left[\frac{\alpha\tau l - \Delta l}{2f}5 - \frac{2\Delta k}{l} + 3\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_0 - 4\varepsilon\left(\frac{3\Delta k}{l} - 2\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_0\right)\right]. \qquad 29)$$

Der Einfluss der Belastung allein ist in den ersten Zeilen dieser Formeln angesetzt.

§ 30. **Formänderungen symmetrischer Parabelbogen.**

Nach § 26 mit den in §§ 27, 29 berechneten Ausdrücken der Integrale § 26, 11)—13), also mit 6) 12) in § 27 und 10) 11) 16) 17) in § 29 können die Aenderungen Δx, Δy, $\Delta\varphi$ von x, y, φ für jede Stelle des Bogens berechnet werden. Am häufigsten interessirt die Aenderung Δy in der Bogenmitte, welche wir desshalb hier spezieller ins Auge fassen wollen. Wird bei $x = m = \frac{l}{2}$ gesetzt $\Delta y = \Delta f = -e$, so bedeutet e die Einsenkung (Durchbiegung) in der Bogenmitte. Neben dem allgemeinem Ausdrucke derselben werden wir ihren Werth für beliebige zur Bogenmitte symmetrische Belastungen ableiten, da die betreffenden Formeln einfacher sind und selbst bei unsymmetrischer Belastung Verwendung finden können (S. 63, 85, 107), während z. B. auch das Eigengewicht im Allgemeinen eine symmetrische Belastung ist.

Die Einsenkung in der Trägermitte ist nach § 26, 18) 20) 23) im allgemeinsten Falle

$$e = Y_1 + Y_2 - \alpha\tau f - \frac{l}{2}\Delta\varphi_m, \qquad 1)$$

worin nach denselben Gleichungsgruppen die Aenderung der Winkels φ_m in der Bogenmitte (bei Oeffnungen mit drei Gelenken unmittelbar vor dem Scheitelgelenk):

$$\Delta\varphi_m = Z_1 + Z_2 + \varphi_0, \qquad 20$$

und alle Y, Z für $x = m$ gelten. Wir haben also bei Berücksichtigung von

$$V = \frac{1}{l}\left[M' - M + \sum_0^l P(l-a)\right]$$

nach § 29, 10) 16):

$$Y_1 = \frac{l^2}{24\,E\,c}\Big[2\,M + M' - H\frac{5f}{2} + \sum_0^1 P(l-a) - \frac{1}{l^2}\sum_0^m P(l-2\,a)^2(l+a)\Big],$$

$$Y_2 = \frac{l^2}{8\,E\,k\,r^2}\Big[M + M' + 2\,H(r-f) + \sum_0^1 P(l-a) - \frac{1}{l}\sum_0^m P(l-2\,a)^2\Big],$$

und nach § 29, 11) 17):

$$Z_1 = \frac{l}{8\,E\,c}\Big[3\,M + M' - H\frac{8f}{3} + \sum_0^1 P(l-a) - \frac{1}{l}\sum_0^m P(l-2\,a)^2\Big],$$

$$Z_2 = \frac{l}{4\,E\,k\,r^2}\Big[M + M' + 2\,H(r-f) + \sum_0^1 P(l-a) - \frac{1}{l}\sum_0^m P(l-2\,a)^2\Big],$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in 1) 2) ergeben sich mit den Bezeichnungen § 28, 1) 2) 4):

$$e = \frac{l^2}{24\,E\,c}\Big[(2+3\,\zeta)\,M + (1+2\,\zeta)\,M' - \Big(1-\frac{4\,\beta}{5}\Big)\frac{5f}{2}H + (1+3\,\zeta)\sum_0^1 P(l-a) - \frac{1+3\,\zeta}{l}\sum_0^m P(l-2\,a)^2 - \frac{1}{l^2}\sum_0^m P\,a\,(l-2a)^2\Big] - \alpha\,\tau\,f - \frac{l}{2}\Delta\,\varphi_m,$$

$$\Delta\,\varphi_m = \frac{l}{8\,E\,c}\Big[(3+2\,\zeta)\,M + (1+2\,\zeta)\,M' - \Big(1-\frac{\beta}{2}\Big)\frac{8f}{3}H + (1+2\,\zeta)\sum_0^1 P(l-a) - \frac{1+2\,\zeta}{l}\sum_0^m P(l-2\,a)^2\Big] + \Delta\,\varphi_0, \qquad 3)$$

und durch Verwendung des letzten Ausdrucks im vorletzten:

$$e = \frac{l^2}{48\,E\,c}\Big[\frac{1}{l^2}\sum_0^m P(l-2\,a)^3 - \sum_0^1 P(l-a) + 3\,H\,f - 5\,M - M'\Big] - \alpha\,\tau\,f - \frac{l}{2}\Delta\,\varphi_0. \qquad 4)$$

Speziell für symmetrische Belastung kann man wegen (S. 60):

$$\sum_0^1 P(l-a) = l\sum_0^m P$$

nach dem vorletzten Ausdruck für e auch schreiben:

$$e = \frac{l^2}{24\,E\,c}\Big[\frac{1}{l^2}\sum_0^m P\,a\,(3\,l^2 - 4\,a) + \frac{12\,\zeta}{l}\sum_0^m P\,a\,(l-a) - \Big(1-\frac{4\,\beta}{5}\Big)\frac{5f}{2}H + (2+3\,\zeta)\,M + (1+3\,\zeta)\,M'\Big] - \alpha\,\tau\,f - \frac{l}{2}\Delta\,\varphi_m. \qquad 5)$$

Im Folgenden denken wir uns das für elastische Bogenträger gegen 1 wohl immer verschwindend kleine ζ vernachlässigt (vergl. § 28 und IV M).

Oeffnungen mit zwei Gelenken.

Für Oeffnungen mit Endgelenken haben wir $M = M' = 0$ und nach § 29, 25);

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\Delta k}{l} - H \frac{2-\beta}{6} \frac{f l}{E c} + \frac{1}{6 E c l} \sum_0^1 P a (l-a)(l+a), \qquad 6)$$

womit nach § 29, 26):

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} + H \frac{2-\beta}{6} \frac{f l}{E c} - \frac{1}{6 E c l} \sum_0^1 P a (l-a)(2 l-a). \qquad 7)$$

Die Einsenkung in der Bogenmitte durch beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung und kleine Bewegungen der Stützpunkte folgt nun aus 4):

$$e = \frac{1}{48 E c} \left[\sum_0^m P (l-2 a)^3 - \sum_0^1 P (l-a)(l^2-8 l a+4 a^2) - (5-4 \beta) H f l^2 \right] - \alpha \tau f - \frac{\Delta k}{2}, \qquad 8)$$

worin H durch § 27, 18) bestimmt. Speziell für symmetrische Belastung erhält man in der bei Ableitung von § 15, 28) erwähnten Weise:

$$\sum_0^1 P (l-a)(l^2-8 l a+4 a^2) = - l \sum_0^m P (l^2-12 l a+12 a^2)$$

und damit einfacher:

$$e = \frac{1}{24 E c} \left[\sum_0^m P a (3 l^2-4 a^2) - \frac{5-4 \beta}{2} H f l^2 \right] - \alpha \tau f - \frac{\Delta k}{2}, \qquad 9)$$

wie wir auch aus 5) entnehmen konnten, da bei symmetrischer Belastung $\Delta \varphi_m$ nur von Δk abhängt und gleich $\frac{\Delta k}{l}$ ist.

Oeffnungen ohne Gelenke.

Für diesen Fall erhalten wir aus § 29, 25):

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\Delta k}{l} + (M+2 M') \frac{l}{6 E c} - H \frac{2-\beta}{6} \frac{f l}{E c} + \frac{1}{6 E c l} \sum_0^1 P a (l-a)(l+a), \qquad 10)$$

und hiermit nach § 29, 26):

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} - (M'+2 M) \frac{l}{6 E c} + H \frac{2-\beta}{6} \frac{f l}{E c} - \frac{1}{6 E c l} \sum_0^1 P a (l-a)(2 l-a). \qquad 11)$$

Durch Substitution des letzteren Ausdrucks in 5) ergibt sich die Einsenkung in der Bogenmitte durch beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung und kleine Bewegungen der Stützen:

$$e = \frac{1}{24\,E\,c}\left[\sum_0^m P(l-2\,a)^3 - \sum_0^1 P(l-a)(l^2-8\,l\,a+4\,a^2) - \right.$$

$$\left.(5-4\,\beta)\,H f\,l^2 + (M+M')\,3\,l^2\right] - \alpha\,\tau\,f - \frac{\Delta\,k}{2}, \qquad 12)$$

worin H, M, M' durch § 29, 24)—26) und bei Vernachlässigung von β durch § 29, 27)—29) bestimmt. Speziell bei symmetrischer Belastung folgt aus 12) mit dem über 9) angeschriebenen Summenwerth:

$$e = \frac{1}{24\,E\,c}\left[\sum_0^m P\,a\,(3\,l^2-4\,a^2) - \frac{5-4\,\beta}{2}\,H f\,l^2 + (M+M')\,\frac{3}{2}\,l^2\right]$$

$$-\alpha\,\tau\,f - \frac{\Delta\,k}{2}. \qquad 13)$$

Mit $M = M' = 0$ gehen die Gleichungen 10)—13) in 6)—9) über.

Oeffnungen mit drei Gelenken.

Nach § 26, 26) hat man zur Berechnung von $\Delta\,\varphi_0$, $\Delta\,\varphi_1$ und des Sprungwerths $\omega = \Delta\,\varphi_n - \Delta\,\varphi_v$ von $\Delta\,\varphi$ beim Zwischengelenk wegen $k=0$:

$$\Delta\,l = \alpha\,\tau\,l + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \omega\,f,$$

$$\Delta\,k = l\,\Delta\,\varphi_1 - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2 - \omega\,\frac{l}{2},$$

$$\Delta\,\varphi_1 = \Delta\,\varphi_0 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \omega.$$

Diese Beziehungen, abgesehen von den mit ω behafteten Gliedern wurden für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$ durch § 29, 24)—26) ausgedrückt. Denken wir uns den rechten Seiten letzterer Formeln $\omega\,f$ bezw. $-\omega\,\frac{l}{2}$ bezw. ω beigefügt, so liefert bei Beachtung von $M = M' = 0$ die erste derselben:

$$\omega = \frac{\Delta\,l}{f} + H(1+\varepsilon)\,\frac{8\,l\,f}{15\,E\,c} - \frac{1}{3\,E\,c\,l^2}\sum_0^1 P\,a\,(l-a)\,(l^2+l\,a-a^2) +$$

$$\frac{\beta}{3\,E\,c}\sum_0^1 P\,a\,(l-a) - \frac{\alpha\,\tau\,l}{f}, \qquad 14)$$

damit die zweite:

$$\Delta\,\varphi_1 = \frac{\Delta\,k}{l} + \frac{\Delta\,l}{2f} - H\,\frac{l\,f}{E\,c}\left(\frac{1-4\,\varepsilon}{15} - \frac{\beta}{6}\right) + \frac{1}{6\,E\,c\,l^2}\sum_0^1 P\,a^3\,(l-a) +$$

$$\frac{\beta}{6\,E\,c}\sum_0^1 P\,a\,(l-a) - \frac{\alpha\,\tau\,l}{2f}, \qquad 15)$$

und hiermit die dritte:

$$\Delta\,\varphi_0 = \frac{\Delta\,k}{l} - \frac{\Delta\,l}{2f} + H\,\frac{l\,f}{E\,c}\left(\frac{1-4\,\varepsilon}{15} - \frac{\beta}{6}\right) - \frac{1}{6\,E\,c\,l^2}\sum_0^1 P\,a\,(l-a)^3 -$$

$$\frac{\beta}{6\,E\,c}\sum_0^1 P\,a\,(l-a) + \frac{\alpha\,\tau\,l}{2f}. \qquad 16)$$

Substituiren wir den letzten Ausdruck in 5), so folgt die Einsenkung in der Bogenmitte durch beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung und beliebige kleine Bewegungen der Stützpunkte:

$$e = \frac{1}{48\,E\,c}\Big[\sum_0^m P(l-2\,a)^3 - l^2 \sum_0^1 P(l-a) + \frac{4}{l}\sum_0^1 P\,a\,(l-a)^3 +$$

$$4\,\beta\,l \sum_0^1 P\,a\,(l-a) + \Big(\frac{7+32\,\varepsilon}{5} + 4\,\beta\Big) H\,f\,l^2\Big] - \alpha\,\tau\Big(f + \frac{l^2}{4f}\Big)$$

$$+ \frac{l\,\Delta\,l}{4f} - \frac{\Delta\,k}{2}, \qquad 17)$$

worin H durch § 15, 5) bestimmt, also nur von der Belastung abhängig. Speziell bei symmetrischer Belastung erhält man in der bei Ableitung von § 15, 28) erwähnten Weise:

$$\sum_0^1 P(l-a) = l \sum_0^m P, \qquad \sum_0^1 P\,a\,(l-a) = 2 \sum_0^m P\,a\,(l-a),$$

$$\sum_0^1 P\,a\,(l-a)^3 = \sum_0^m P\,a\,(l^3 - 3\,l^2\,a + 4\,l\,a^2 - 2\,a^3),$$

womit bei gleichzeitiger Verwendung von § 15, 28) aus 17) die einfachere Gleichung entsteht:

$$e = \frac{1}{6\,E\,c\,l}\Big[\sum_0^m P\,a^3\,(l-a) - \frac{3-32\,\varepsilon}{40}\,l^3 \sum_0^m P\,a + \beta\,l^2 \sum_0^m P\,a\,(l-a)\Big] -$$

$$\alpha\,\tau\Big(f + \frac{l^2}{4f}\Big) + \frac{l\,\Delta\,l}{4f} - \frac{\Delta\,k}{2}. \qquad 18)$$

Liegt gerade bei der Mitte eine konzentrirte Last, so ist in den Summen $\sum_0^m$ von 9) 13) 18) dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben aufzunehmen.

Die nunmehr mit Berücksichtigung von ε, β erhaltenen Gleichungen lassen im Hinblicke auf § 28 erkennen, dass bei der praktischen Berechnung der Formänderungen elastischer Bogenträger im Allgemeinem $\beta = 0$ gesetzt werden darf, was bei Anführung obiger Gleichungen im zweiten Abschnitte geschehen ist.

§ 31. Horizontalschub von Zweigelenkbogen mit beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten.

Entsprechend dem auf S. 200 Gesagten drücken wir nun den Horizontalschub von Bogen mit gleichhohen Endgelenken ohne Zwischengelenk für beliebige Querschnitte und beliebige Axform aus. Den Ausgangspunkt bildet die erste Gleichung 19 des § 26 mit $k = 0$ und § 26, 11):

$$\Delta\,l = \int_0^1 \frac{M_x}{E\,J}\,y\,d\,s - \int_0^1 \Big(N_x + \frac{M_x}{r}\Big)\frac{d\,x + y\,d\,\varphi}{E\,F} + \alpha\,\tau\,l, \qquad 1)$$

in welcher bei unveränderlicher Spannweite $\Delta\,l = 0$ ist. Bei Ausführen des häufig vernachlässigten zweiten Integrals denken wir uns anstatt der wirklichen Bogenaxe einen Kreisbogen von gleicher Spannweite l und gleichem Pfeile f wie jene, also vom Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \qquad 2)$$

zu Grunde gelegt (über die Zulässigkeit dieses Verfahrens siehe S. 196) womit wie im analogen Falle des § 27

$$dx + y\,d\varphi = \frac{r-f}{r}\,ds$$

zu setzen ist und bei gleichen E und $\alpha\tau$ für den ganzen Bogen Gleichung 1) zunächst in folgende übergeht:

$$E\Delta l = \int_0^1 \frac{M_x}{J}\,y\,ds - \frac{r-f}{r}\int_0^1\left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{ds}{F} + E\,l\,\alpha\,\tau. \qquad 3)$$

Wird nun der Bogen in eine genügende Anzahl gleich oder verschieden langer Felder getheilt (z. B. durch Querschnitte oder Vertikalebenen), für welche die Axlänge σ, deren horizontale und vertikale Projektion λ, η, und die Mittelwerthe von x, y, F, J (z. B. die Werthe in den Feldermitten) wie in Fig. 137 bezeichnet sind, und beziehen sich die Summen Σ in den folgenden Gleichungen auf alle Felder zwischen den angesetzten Summengrenzen, so liefert 3) zunächst:

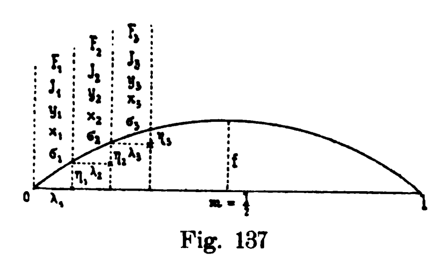


Fig. 137

$$E\Delta l = \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} M_x - \frac{r-f}{r}\sum_0^1\left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{\sigma}{F} + E\,l\,\alpha\,\tau. \qquad 4)$$

Nach § 16, 3)—5) hat man in jedem Felde:

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a),$$

$$N_x = \left(V - \sum_0^x P\right)\frac{\eta}{\sigma} + H\frac{\lambda}{\sigma},$$

womit aus 4):

$$E\Delta l = \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J}\left[Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a)\right] - \frac{r-f}{r}\sum_0^1 \frac{\eta}{F}\left[V - \sum_0^x P\right] -$$

$$\frac{r-f}{r} H \sum_0^1 \frac{\lambda}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^1 \frac{\sigma}{F}\left[Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a)\right] + E\,l\,\alpha\,\tau.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach H ergibt sich mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$v = \sum_0^1 \frac{\sigma x y}{J} - \frac{r-f}{r}\sum_0^1 \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^1 \frac{\sigma x}{F}, \qquad 5)$$

$$w = \sum_0^1 \frac{\sigma y^2}{J} + \frac{r-f}{r}\sum_0^1 \frac{\lambda}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^1 \frac{\sigma y}{F}, \qquad 6)$$

$$\sum_0^x P = P_x, \qquad \sum_0^x P(x-a) = S_x \qquad 7)$$

der gesuchte Horizontalschub bei beliebiger Belastung beliebiger Temperaturänderung τ und beliebiger kleiner Aenderung Δl der Spannweite:

$$H = \frac{1}{w}\left[V v - \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} S_x + \frac{r-f}{r} \sum_0^1 \frac{\eta}{F} P_x + \frac{r-f}{r^2} \sum_0^1 \frac{\sigma}{F} S_x + E l \alpha \tau - E \Delta l\right]. \qquad 8)$$

Wie ersichtlich sind v, w nur von der Bogenform und den Querschnitten abhängig, sodass sie nur einmal berechnet zu werden brauchen, während in V, P_x, S_x die Lasten auftreten. Es bedeuten

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^1 P(l-a), \qquad 9)$$

die Vertikalreaktion bei 0, P_x die angenommene Gesammtlast von 0 bis x, S_x das statische Moment dieser Gesammtlast in Bezug auf Punkt x.

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit hat man nach § 14:

$$V = \frac{u\,l}{2}, \qquad P_x = u\,x, \qquad S_x = \frac{u\,x^2}{2},$$

und damit nach 8) den von dieser Belastung allein herrührenden Horizontalschub:

$$H = \frac{l\,v - z}{2\,w} u, \qquad 10)$$

worin nur von der Axform und den Querschnitten abhängt:

$$z = \sum_0^1 \frac{\sigma\,y\,x^2}{J} - 2\,\frac{r-f}{r} \sum_0^1 \frac{\eta\,x}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^1 \frac{\sigma\,x^2}{F}. \qquad 11)$$

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a allein hat man in 8)

von $x = 0$ bis $x = a$: $\quad P_x = 0, \quad S_x = 0.$
„ $x = a$ „ $x = l$: $\quad P_x = P, \quad S_x = P(x-a),$

womit zunächst folgt:

$$H = \frac{P}{w}\left[\frac{l-a}{l}\left(\sum_0^1 \frac{\sigma\,x\,y}{J} - \frac{r-f}{r}\sum_0^1 \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^1 \frac{\sigma\,x}{F}\right) - \sum_a^1 \frac{\sigma\,y}{J}(x-a) + \frac{r-f}{r}\sum_a^1 \frac{\eta}{F} + \frac{r-f}{r^2}\sum_a^1 \frac{\sigma}{F}(x-a)\right],$$

und mit Rücksicht auf $\sum_0^1 = \sum_0^a + \sum_a^1$:

$$H = \frac{P}{w\,l}\left[(l-a)\left(\sum_0^a \frac{\sigma\,x\,y}{J} - \frac{r-f}{r}\sum_0^a \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^a \frac{\sigma\,x}{F}\right) + a\left(\sum_a^1 \frac{\sigma\,(l-x)\,y}{J} + \frac{r-f}{r}\sum_a^1 \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_a^1 \frac{\sigma\,(l-x)}{F}\right)\right]. \qquad 12)$$

Im nächsten § wird gezeigt, dass bei wichtigen hier in Frage stehenden Bogenträgern (S. 200) alle Summen Σ, welche F im Nenner enthalten, vernachlässigt werden dürfen, womit nach 8) im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{1}{w}\left(V v - \sum_0^1 \frac{\sigma\,y}{J} S_x + E\,l\,\alpha\,\tau - E\,\Delta\,l\right) \qquad 13)$$

mit

$$v = \sum_0^1 \frac{\sigma x y}{J}, \qquad w = \sum_0^1 \frac{\sigma y^2}{J}. \tag{14}$$

Speziell für eine gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit auf der ganzen Spannweite gilt nach wie vor 10), jedoch jetzt mit

$$z = \sum_0^1 \frac{\sigma y x^2}{J}, \tag{15}$$

während für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a nach 12):

$$H = \frac{P}{w\,l}\left[(l-a)\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum_a^1 \frac{\sigma (l-x) y}{J}\right]. \tag{16}$$

Aus diesen Gleichungen sind alle Glieder, bei deren Berechnung die Bogenaxe kreisförmig angenommen wurde (S. 211), weggefallen.

§ 32. Symmetrische Zweigelenkbogen mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten.

Wir wollen zunächst die Beziehungen des vorigen § für den Fall spezialisieren, dass die Anordnung des Trägers einschliesslich der Feldertheilung vollständig symmetrisch zur Vertikalen durch die Trägermitte ist. Man hat dann für je zwei symmetrisch zur Mitte liegende Felder (Fig. 138) gleiche Feldlängen λ und Axlängen σ, nummerisch gleiche aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Vertikalprojektionen $\eta = \sigma \sin\varphi$ der letzteren, gleiche Ordinaten y und gleiche Entfernungen x, $l-x$ von den nächstgelegenen Stützpunkten. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich

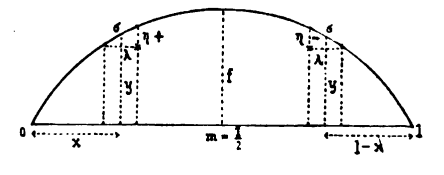


Fig. 138

$$\sum_0^1 \frac{\sigma x y}{J} = \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \sum_m^1 \frac{\sigma x y}{J} = \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \sum_0^m \frac{\sigma (l-x) y}{J} = l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J},$$

während unmittelbar oder in analoger Weise weiter folgen im Ausdrucke § 31, 5) von v:

$$\sum_0^1 \frac{\eta}{F} = 0, \qquad \sum_0^1 \frac{\sigma x}{F} = l \sum_0^m \frac{\sigma}{F},$$

im Ausdrucke § 31, 6) von w:

$$\sum_0^1 \frac{\sigma y^2}{J} = 2\sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J}, \qquad \sum_0^1 \frac{\lambda}{F} = 2\sum_0^m \frac{\lambda}{F}, \qquad \sum_0^1 \frac{\sigma y}{F} = 2\sum_0^m \frac{\sigma y}{F},$$

und im Ausdrucke § 31, 11) von z:

$$\sum_0^1 \frac{\sigma y x^2}{J} = 2\sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J} - 2l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + l^2 \sum_0^m \frac{\sigma y}{J},$$

$$\sum_0^1 \frac{\eta x}{F} = 2\sum_0^m \frac{\eta x}{F} - l \sum_0^m \frac{\eta}{F},$$

$$\sum_0^l \frac{\sigma x^2}{F} = 2\sum_0^m \frac{\sigma x^2}{F} - 2l\sum_0^m \frac{\sigma x}{F} + l^2 \sum_0^m \frac{\sigma}{F}.$$

Damit lassen sich bei gerader oder ungerader Felderzahl aus den Verhältnissen der ersten Trägerhälfte allein berechnen:

$$\frac{v}{l} = \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^m \frac{\sigma}{F}, \tag{1}$$

$$\frac{w}{2} = \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J} + \frac{r-f}{r} \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F}, \tag{2}$$

$$\frac{l v - z}{2} = l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J} -$$

$$\frac{r-f}{r}\left(l \sum_0^m \frac{\eta}{F} - 2\sum_0^m \frac{\eta x}{F}\right) - \frac{r-f}{r^2}\left(l\sum_0^m \frac{\sigma x}{F} - \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{F}\right). \tag{3}$$

Mit diesen Ausdrücken von v, w, $l\,v-z$ gelten also jetzt die Gleichungen 8) 10) des vorigen §.

Speziell bei beliebiger symmetrischer Belastung hat man für 2 symmetrisch zur Trägermitte bei x, x' gelegene Felder nach §§ 34, 35:

$$S_x + S'_x = 2\,S_x + S - \frac{2\,x}{l} S, \qquad P'_x - P_x = 2\sum_x^m P,$$

und damit nach § 31, 8) durch jene Belastung allein:

$$H = \frac{2}{w}\left[\sum_0^m \frac{\sigma y}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right) - \frac{r-f}{r}\sum_0^m \frac{\eta}{F} Q_x - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^m \frac{\sigma}{F}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right)\right], \tag{4}$$

worin auch gesetzt werden kann:

$$\frac{x}{l} S - S_x = \sum_0^x P a + x\, Q_x \qquad \text{mit } Q_x = \sum_x^m P \tag{5}$$

doch ist dann zu beachten, dass eine etwa gerade bei $a = x$ angreifende Last P nur in einer der beiden Summen von 0 bis x bezw. von x bis m aufgenommen werden darf. Gleichung 4) hätte sich auch aus § 35, 15) 17) mit $M = 0$ ergeben.

Hätten wir auf der ersten Trägerhälfte eine gleichmässig vertheilte Last von u, auf der zweiten eine solche von u' per Längeneinheit, so würde nach § 14 aus § 31, 9)

$$V = \frac{3\,u + u'}{8}\, l,$$

und für x zwischen 0 und m bezw. zwischen m und l aus § 31), 7):

$$P_x = u\,x, \qquad S_x = \frac{u\,x^2}{2},$$

$$P_x = \frac{u\,l}{2} + \frac{u'}{2}(2\,x - l), \qquad S_x = \frac{u\,l}{8}(4\,x - l) + \frac{u'}{8}(2\,x - l)^2,$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in § 31, 8) unter Beachtung von $\sum_0^l = \sum_0^m + \sum_m^l$ und des oben einleitend Gesagten erhält man den Horizontalschub durch die erwähnte Belastung:

$$H = \frac{l\,v - z\,u + u'}{4\quad w}, \tag{6}$$

Diese Gleichung führt mit $u' = u$ wieder auf § 31, 10), wie man aus letzterer Formel umgekehrt bei der jetzt vollständig symmetrischen Anordnung des Trägers auf 6) hätte schliessen können.

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a gilt die Gleichung § 31, 12), worin jetzt:

$$\sum_a^l \frac{\sigma(l-x)y}{J} = \sum_0^l \frac{\sigma(l-x)y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma(l-x)y}{J}$$

$$= \sum_0^m \frac{\sigma(l-x)y}{J} + \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma(l-x)y}{J}$$

$$= l\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - l\sum_0^a \frac{\sigma y}{J} + \sum_0^a \frac{\sigma x y}{J}$$

$$\sum_a^l \frac{\eta}{F} = \sum_0^l \frac{\eta}{F} - \sum_0^a \frac{\eta}{F} = -\sum_0^a \frac{\eta}{F},$$

$$\sum_a^l \frac{\sigma(l-x)}{F} = \sum_0^l \frac{\sigma(l-x)}{F} - \sum_0^a \frac{\sigma(l-x)}{F}$$

$$= \sum_0^m \frac{\sigma(l-x)}{F} + \sum_0^m \frac{\sigma x}{F} - \sum_0^a \frac{\sigma(l-x)}{F}$$

$$= l\sum_0^m \frac{\sigma}{F} - l\sum_0^a \frac{\sigma}{F} + \sum_0^a \frac{\sigma x}{F},$$

sodass wir erhalten:

$$H = \frac{P}{w}\Bigg[\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} - \frac{r-f}{r}\sum_0^a \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^a \frac{\sigma x}{F} + a\left(\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma y}{J} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^m \frac{\sigma}{F} + \frac{r-f}{r^2}\sum_0^a \frac{\sigma}{F}\right)\Bigg], \tag{7}$$

und beispielsweise für $a = m$:

$$H = \frac{P}{w}\left(\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \frac{r-f}{r}\sum_0^m \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^m \frac{\sigma x}{F}\right). \tag{8}$$

Es handelt sich nun darum, zu entscheiden, welche Glieder in den oben und in § 31 gegebenen Gleichungen unter Umständen (für steile Bogen etc.) vernachlässigt werden dürfen. Dies kann mit Zuverlässigkeit nur durch vergleichende Berechnungen geschehen. Hierzu eignet sich ganz besonders die mehrerwähnte Dourobrücke (Fig. 139), weil für sie alle in Betracht kommenden Grössen nach Angaben von Seyrig* sehr genau berechnet werden können. Seyrig hat für die durch Vertikalen begränzten Felder des Dourobogens die Längen λ und unter Berücksichtigung der Axkrümmung in den einzelnen Feldern die Axlängen σ wie auch die x, y in den Feldermitten und die F, J der wirklichen Querschnitte daselbst einschliesslich der Beiträge der Füllungsglieder angegeben. Dieselben sind in den Kolumnen 2—8 der Tabelle des Beisp. 31 mit den ebenfalls aus Seyrigs Aufsatz entnommenen Projektionen η zu-

* Seyrig, Le pont sur le Douro. Mémoires et Compte rendu des travaux de la société des ingénieurs civils 1878, p. 741.

sammengestellt, während die in den übrigen Kolumnen angeführten Grössen aus denjenigen der Kolumnen 2—8 berechnet wurden. Alle Grössen betreffen beide die Brücke tragenden Bogen zusammen und gelten für Meter als Längeneinheit.

Man erhält nun nach § 31, 8) 10) 12) und obigen Gleichungen (Beisp. 39) beziehungsweise bei Vernachlässigung sämmtlicher Glieder mit F im Nenner (Beisp. 23) folgende Werthe des Horizontalschubs H und die entsprechenden Differenzen im zweiten gegenüber dem ersten Falle.

H		Beisp. 39	Beisp. 23	Differenz
durch eine gleichmässig vertheilte Last von u per Meter Spannweite		$72{,}111\,u$	$72{,}848\,u$	1,02 %
durch verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Bogenhälfte		$36{,}056\,(u+u')$	$36{,}424\,(u+u')$	1,02 „
durch eine Einzellast P bei	$a = 0$	0	0	0
	$a = 23{,}75$ m	$0{,}35656\,P$	$0{,}36012\,P$	1,00 „
	$a = 26{,}75$ „	$0{,}38888\,P$	$0{,}39281\,P$	1,01 „
	$a = 54$ „	$0{,}59425\,P$	$0{,}60038\,P$	1,03 „
	$a = 64{,}4$ „	$0{,}63342\,P$	$0{,}63999\,P$	1,04 „
	$a = 74{,}8$ „	$0{,}65263\,P$	$0{,}65941\,P$	1,04 „
	$a = 80$ „	$0{,}65742\,P$	$0{,}66424\,P$	1,04 „
durch eine Temperaturänderung τ des Bogens		$\frac{E\alpha\tau}{322{,}125}$	$\frac{E\alpha\tau}{320{,}537}$	0,50 „
durch ein Ausweichen der Widerlager um Δl		$-\frac{E\Delta l}{51540}$	$-\frac{E\Delta l}{51286}$	0,50 „

Wir fügen diesen Werthen bei die in analoger Weise berechneten Grössen:

$v =$	159787	160147	0,22 %
$w =$	51540	51286	0,49 „
$z =$	18132662	18151388	0,10 „
$\frac{l\,v - z}{2} =$	3716629	3736066	0,52 „

Beim Dourobogen kommen nur an den vorstehenden berücksichtigten Stellen a, mit Ausnahme von $a = 0$ und 80 m, Verkehrslasten auf den Träger (Fig. 139).

Nach allen diesen Resultaten können in obigen Gleichungen und denjenigen des § 31 die Glieder mit F im Nenner für steile Bogen (§ 28) häufig vernachlässigt werden. Wir haben demgemäss im vorigen § die einfacheren Gleichungen 13)—16) gegeben und können nun beifügen, dass sich nach denselben für Bogen, welche zur Trägermitte vollständig symmetrich angeordnet sind, zufolge 1)—3) aus den Verhältnissen der ersten Trägerhälfte allein berechnen lassen:

$$v = l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}, \qquad w = 2 \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J}, \tag{9}$$

$$\frac{l\,v - z}{2} = l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J}. \tag{10}$$

Diese Werthe sind natürlich auch in § 31, 10) und obiger Gleichung 6) zu verwenden, während aus 5) für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a folgt:

$$H = \frac{P}{w}\left[\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + a\left(\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma y}{J}\right)\right], \qquad 11)$$

und aus 4) durch eine beliebige symmetrische Belastung:

$$H = \frac{2}{w}\sum_0^m \frac{\sigma y}{J}\left(\frac{x}{l}S - S_x\right). \qquad 12)$$

Beispiel 39. Horizontalschub eines symmetrischen Zweigelenkbogens mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Für den Bogen mit Kämpfergelenken der Maria-Pia-Brücke über den Douro, welchem die in Fig. 139 und der unten folgenden Tabelle ersichtlichen Verhältnisse entsprechen, ist der Horizontalschub nach den in §§ 31, 32 gegebenen möglichst genauen Formeln zu berechnen: *a*) Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit; *b*) für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Bogenhälfte; *c*) für beliebige Einzellasten P bei $a = 23{,}75$ m, 26,75 m, 54 m, 64,4 m, 74,8 m, 80 m; *d*) für eine beliebige Temperaturänderung τ; *e*) für eine beliebige kleine Aenderung der Spannweite um Δl.

Mit $l = 160$ m und $f = 42{,}65$ m erhält man nach § 31, 2) $r = 96{,}354$ m, also $r - f = 53{,}704$ m, worauf mit Rücksicht auf die für den halben Bogen summirten Werthe der nachstehenden Tabelle nach § 32, 1) 2) 3) weiter folgen:

$$v = 160\left(1000{,}92 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}389{,}07\right) = 159787,$$

$$w = 2 \cdot 25643 + \frac{53{,}704}{96{,}354}2 \,.\, 335{,}59 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}2 \,.\, 10369{,}3 = 51540,$$

$$\frac{l v - z}{2} = 160 \,.\, 34066 - 1714494 - \frac{53{,}704}{96{,}354}(160 \,.\, 170{,}83 - 2 \,.\, 4663{,}87) -$$

$$\frac{53{,}704}{96{,}354^2}(160 \,.\, 15135{,}3 - 796257) = 3716629.$$

Damit liefert § 31, 10) für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last:

$$H = \frac{3716629}{51540}u = 72{,}111\,u, \qquad a)$$

und § 32, 6) für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$H = \frac{3716629}{2 \,.\, 51540}(u + u') = 36{,}056\,(u + u'). \qquad b)$$

Die Gleichung § 32, 7) können wir für $a < m$ auch wie folgt schreiben:

$$H = \frac{P}{w}\left[\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} - \frac{r-f}{r}\sum_0^a \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2}\sum_0^a \frac{\sigma x}{F} + a\left(\sum_a^m \frac{\sigma y}{J} - \frac{r-f}{r^2}\sum_a^m \frac{\sigma}{F}\right)\right]. \qquad c)$$

Sie liefert mit den betreffenden Tabellenwerthen für eine Einzellast P bei $a = 23{,}75$ m:

$$H = \frac{P}{51540}\left[4758 - \frac{53{,}704}{96{,}354}85{,}09 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}1472{,}0 + 23{,}75\left(577{,}32 - \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{53{,}704}{96{,}354^2}266{,}04\right)\right] = 0{,}35656\,P,$$

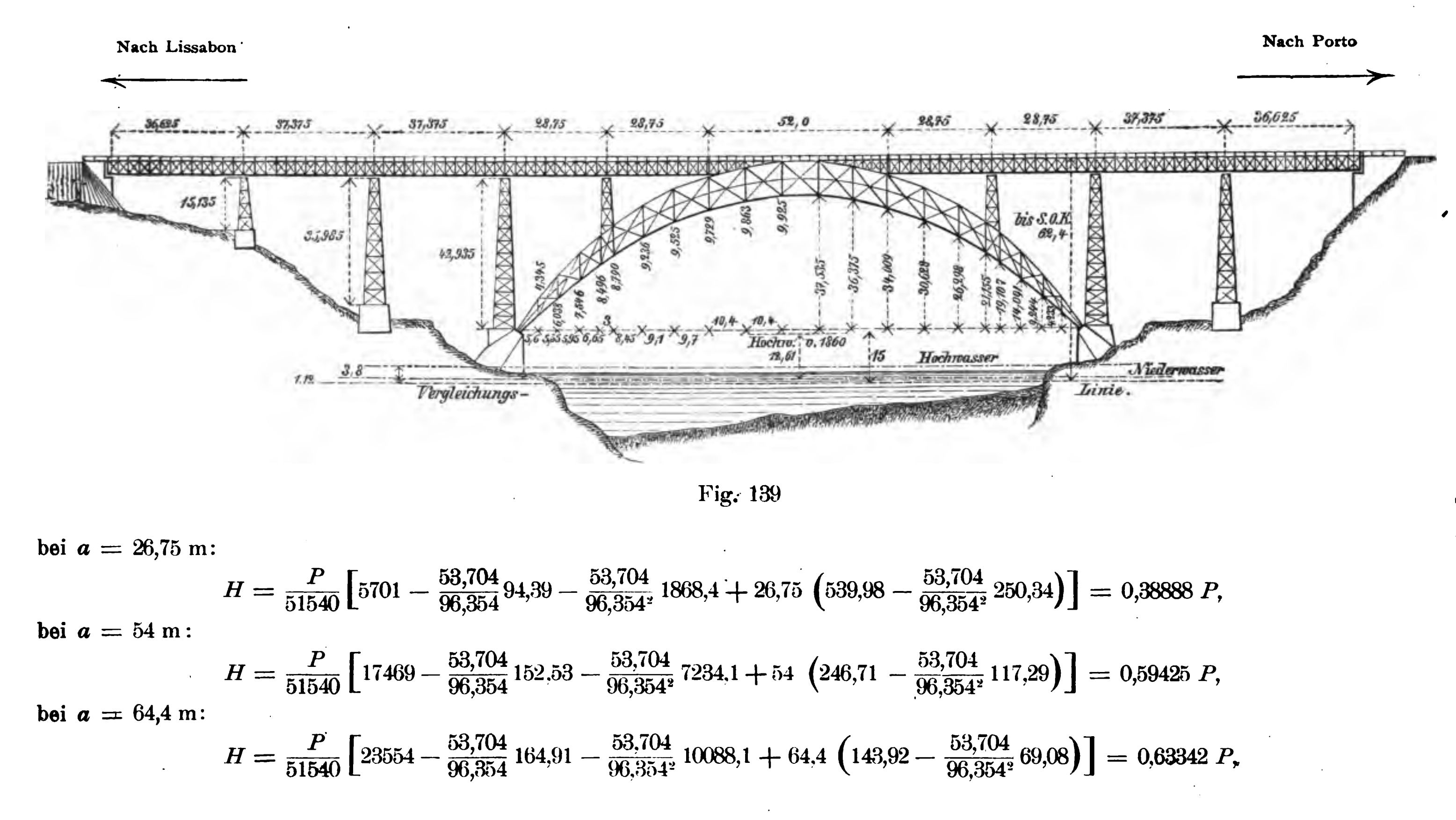


Fig. 139

bei $a = 26{,}75$ m:

$$H = \frac{P}{51540}\left[5701 - \frac{53{,}704}{96{,}354}94{,}39 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}1868{,}4 + 26{,}75\left(539{,}98 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}250{,}34\right)\right] = 0{,}38888\,P,$$

bei $a = 54$ m:

$$H = \frac{P}{51540}\left[17469 - \frac{53{,}704}{96{,}354}152{,}53 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}7234{,}1 + 54\left(246{,}71 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}117{,}29\right)\right] = 0{,}59425\,P,$$

bei $a = 64{,}4$ m:

$$H = \frac{P}{51540}\left[23554 - \frac{53{,}704}{96{,}354}164{,}91 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}10088{,}1 + 64{,}4\left(143{,}92 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}69{,}08\right)\right] = 0{,}63342\,P,$$

Maria-Pia-Brücke über den

Feld	x	y	λ	η	σ	F	J	$\frac{\lambda}{F}$	$\frac{\eta}{F}$	$\frac{\sigma}{F}$	$\frac{\eta x}{F}$	$\frac{\sigma x}{F}$
1	2,80	3,00	5,60	6,01	8,10	0,293	0,246	19,11	20,51	27,64	57,43	77,4
2	8,40	9,00	5,55	5,67	8,15	0,274	0,588	20,26	20,69	29,74	173,80	249,8
3	14,10	14,55	5,95	5,64	8,15	0,264	1,153	22,54	21,36	30,87	301,18	453,3
4	20,40	20,42	6,65	5,70	8,80	0,253	1,848	26,28	22,53	34,78	459,61	709,5
5	25,25	24,20	3,00	2,25	3,80	0,242	2,463	12,40	9,30	15,70	237,34	396,4
6	31,00	28,30	8,45	5,17	9,80	0,236	2,863	35,81	21,91	41,53	679,21	1287,4
7	39,75	32,75	9,10	4,29	10,05	0,225	3,486	40,44	19,07	44,67	758,03	1775,6
8	49,15	36,85	9,70	3,81	10,40	0,222	3,758	43,69	17,16	46,85	843,41	2302,7
9	59,20	40,35	10,40	2,76	10,75	0,223	4,220	46,64	12,38	48,21	732,90	2854,0
10	69,60	42,25	10,40	1,15	10,50	0,228	4,609	45,61	5,04	46,05	350,78	3205,1
11	80,00	42,65	2 . 5,20	$\pm$ 0,20	2 . 5,25	0,228	4,696	2 . 22,81	$\pm$ 0,88	2 . 23,03	$\pm$ 70,18	2 . 1842,1
Für den halben Bogen			80	42,65	93,75			335,59	170,83	389,07	4663,87	15135,3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

bei $a = 74{,}8$ m:

$$H = \frac{P}{51540}\left[30252 - \frac{53{,}704}{96{,}354}\,169{,}95 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}\,13293{,}2 + 74{,}8\left(47{,}68 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}\,23{,}03\right)\right] = 0{,}65263\,P,$$

bei $a = 80$ m:

$$H = \frac{P}{51540}\left[34066 - \frac{53{,}704}{96{,}354}\,170{,}83 - \frac{53{,}704}{96{,}354^2}\,15135{,}3\right] = 0{,}65742\,P.$$

Im vorliegendem Falle kann übrigens bei $a = 80$ m keine konzentrirte Last angreifen, weil sich daselbst kein Knotenpunkt befindet.

Aus § 31, 8) folgt für eine Temperaturänderung τ:

$$H = \frac{160}{51540}\,E\,\alpha\,\tau = \frac{E\,\alpha\,\tau}{322{,}125}, \qquad d)$$

und für eine Aenderung $\Delta\,l$ der Spannweite:

$$H = -\frac{E\,\Delta\,l}{51540}. \qquad e)$$

In $a)$ $b)$ sind u, u' per Meter, in $d)$ $e)$ ist E qer Quadratmeter einzusetzen. Vergleiche mit den Resultaten der einfacheren Formeln siehe S. 217.

Beispiel 40. Zur Anwendung der Formeln für den Horizontalschub von Parabelbogen bei andern Bogen (Dourobrücke in Portugal).

Für den im vorigen Beispiel betrachteten Bogen der Dourobrücke sollen die dort verlangten Werthe des Horizontalschubs nach den Formeln für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J\cos\varphi$ berechnet werden.

* Alle Zahlen der Tabelle sind für Meter als Längeneinheit gegeben.

Douro in Portugal.*

$\frac{\sigma x^2}{F}$	$\frac{\sigma y}{F}$	$\frac{\sigma}{J}$	$\frac{\sigma x}{J}$	$\frac{\sigma x^2}{J}$	$\frac{\sigma x^3}{J}$	$\frac{\sigma y}{J}$	$\frac{\sigma y^2}{J}$	$\frac{\sigma y x}{J}$	$\frac{\sigma y x^2}{J}$	$\frac{F \lambda^2}{\sigma}$	$\frac{J \lambda^2}{\sigma}$
217	82,9	32,927	92,20	258	723	98,77	296	276	773	1,134	0,95
2098	267,7	13,861	116,43	978	8215	124,74	1123	1048	8803	1,036	2,22
6392	449,2	7,068	99,66	1405	19813	102,85	1496	1450	20445	1,147	5,01
14474	710,2	4,762	97,14	1982	40428	97,24	1986	1984	40474	1,271	9,29
10009	379,9	1,543	38,96	984	24840	37,34	904	943	23811	0,573	5,83
39909	1175,3	3,423	106,11	3289	101974	96,87	2741	3003	93093	1,719	20,86
70580	1462,9	2,883	114,60	4555	181074	94,42	3092	3753	149182	1,854	28,72
113178	1726,4	2,767	136,00	6684	328533	101,98	3758	5012	246340	2,008	34,00
168957	1945,3	2,547	150,78	8926	528436	102,79	4147	6085	360232	2,244	42,46
223075	1945,6	2,278	158,55	11035	768036	96,24	4066	6698	466181	3,349	47,48
2.147368	2.223,9	2.1,118	2.89,44	2.7155	2.572416	2.47,68	2.2034	2.3814	2.305160	1.1,174	2.24,19
796257	10369,3	75,177	1119,87	47251	2574488	1000,92	25643	34066	1714494	16,509	221,01
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Mit Rücksicht auf die in der obigen Tabelle gegebenen Werthe sind die Mittelwerthe von $J \cos \varphi$ und $F \cos \varphi$ ausgedrückt:

$$c = \frac{2}{l} \sum_0^m J \frac{\lambda}{\sigma} \lambda, \qquad k = \frac{2}{l} \sum_0^m F \frac{\lambda}{\sigma} \lambda,$$

wonach mit den in Kolumne 25 und 24 für den halben Bogen gegebenen Summen:

$$c = \frac{221,01}{80} = 2,76265 \text{ m}^4, \qquad k = \frac{16,509}{80} = 0,20636 \text{ qm},$$

$$\gamma = \frac{c}{k} = \frac{221,01}{16,509} = 13,3872 \text{ qm}.$$

Weiter erhalten wir nun nach den bereits in Beisp. 16 verwendeten Formeln:

$$r = \frac{160}{8 \,.\, 42,65} + \frac{42,65}{2} = 96,354 \text{ m},$$

$$\varepsilon = \frac{15 \,.\, 13,3872}{8} \left(\frac{53,704}{96,354 \,.\, 42,65} \right)^2 = 0,004287,$$

$$\beta = \frac{8 \,.\, 42,65}{5 \,.\, 53,704} \varepsilon = 1,27067 \, \varepsilon = 0,005447,$$

also für eine gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit:

$$H = \frac{0,995461}{1,004287} \frac{160^2}{8 \,.\, 42,65} u = 74,370 \, u,$$

und für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$H = \frac{u + u'}{2} 74,370 = 37,165 \, (u + u'),$$

in beiden Fällen 3,13 % grösser als die im vorigen Beispiel berechneten möglichst genauen Werthe.

Durch beliebige Belastung ergibt sich mit

$$\frac{5}{(1+s)\,8\,f\,l^3} = \frac{5\,.\,160}{1{,}004287\,.\,8\,.\,42{,}65\,.\,l^4} = \frac{2{,}33466}{l^4}$$

der Horizontalschub:

$$H = \frac{2{,}33466}{l^4} \sum_0^l P\,a\,(l-a)\,(0{,}99455\,l^2 + l\,a - a^2),$$

worin im Allgemeinem l^2 anstatt $0{,}99455\,l^2$ gesetzt werden kann. Ohne diese Vernachlässigung von β ergeben sich für Einzellasten P

bei	$a = 23{,}75$ m	$H = 0{,}33080\,P$,	gegen Beisp. 39	$-7{,}22$ %
	$a = 26{,}75$ „	$H = 0{,}36856\,P$,		$-5{,}23$ „
	$a = 54$ „	$H = 0{,}63589\,P$,		$7{,}01$ „
	$a = 64{,}4$ „	$H = 0{,}69344\,P$,		$9{,}48$ „
	$a = 74{,}8$ „	$H = 0{,}72272\,P$,		$10{,}74$ „
	$a = 80$ „	$H = 0{,}72640\,P$,		$10{,}49$ „.

Da ferner

$$\frac{15\,c}{(1+s)\,8\,f^2} = \frac{15\,.\,2{,}76265}{1{,}004287\,.\,8\,.\,42{,}65^2} = \frac{1}{352{,}670},$$

so liefert § 16, 8) für eine Temperaturänderung τ:

$$H = \frac{E\,\alpha\,\tau}{352{,}670}$$

und § 16, 9) für eine Aenderung der Spannweite um $\Delta\,l$:

$$H = -\frac{E\,\Delta\,l}{352{,}670\,.\,160} = -\frac{E\,\Delta\,l}{56427},$$

in beiden Fällen 8,66 % kleiner als im vorigen Beispiel.

Die hier und in Beispiel 23 nachgewiesenen Differenzen sind für definitive Berechnungen zu gross (siehe z. B. die Bemerkungen zu Beisp. 30, S. 120), wesshalb man in ähnlichen Fällen, wenn es auf Einfachheit ankommt, zweckmässiger wie in Beisp. 23 rechnen wird. Siehe die Vergleiche S. 217.

Aufgabe 15. Bogen mit Zugstange und halbkreisförmiger sowie beliebiger symmetrischer Axe.

Den Horizontalschub eines symmetrischen Zweigelenkbogens mit Zugstange auszudrücken: *a*) für den Halbkreisbogen von konstantem Querschnitt; *b*) für Bogen von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten.

a) Für Halbkreisbogen von konstantem Querschnitt mit Endgelenken hat man nach Aufgabe 14 im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{4}{\pi\,l^2} \sum_0^l P\,a\,(l-a) + \frac{16\,E\,J}{\pi\,l^3}\,(\alpha\,\tau\,l - \Delta\,l).$$

Hierin ist $\Delta\,l$ bei horizontaler Zugstange durch § 20, 1), bei gesprengter Zugstange durch durch § 20) 2) ausgedrückt. Setzen wir nun im ersten Falle:

$$h = 1 + \frac{16\,J}{\pi\,\mathfrak{F}\,l^2}, \qquad 1)$$

im zweiten:

$$h = 1 + \frac{16\,J\,z}{\pi\,\mathfrak{F}\,l^3}, \qquad 2)$$

so folgt in beiden Fällen für beliebige Belastung:

$$H = \frac{4}{\pi\,h\,l^2} \sum_0^l P\,a\,(l-a), \qquad 3)$$

und durch beliebige Temperaturänderungen τ, τ' von Bogen und Zugstange:

$$H = \frac{16\,E\,J}{\pi\,h\,l^2}\,\alpha\,(\tau - \tau'). \qquad 4)$$

b) Für symmetrische Zweigelenkbogen von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten ist nach § 31. 13) im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{1}{w}\left(Vv - \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} S_x + El\alpha\tau - E\Delta l\right),$$

worin nun wieder Δl bei horizontaler Zugstange durch § 20, 1), bei gesprengter durch § 20, 2) ausgedrückt ist. Setzen wir im ersten Falle:

$$h = 1 + \frac{l}{\mathfrak{F} w}, \qquad 5)$$

im zweiten:

$$h = 1 + \frac{z}{F w}, \qquad 6)$$

so gilt in beiden Fällen für beliebige Belastung:

$$H = \frac{1}{hw}\left(Vv - \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} S_x\right), \qquad 7)$$

und für beliebige Temperaturänderungen τ, τ' von Bogen und Zugstange:

$$H = \frac{El}{hw}\alpha(\tau - \tau'). \qquad 8)$$

Sollte anstatt der oben verwendeten Formel für H die genauere Formel § 31, 8) Verwendung finden, so würde nur an Stelle von 7) treten:

$$H = \frac{1}{hw}\left(Vv - \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} S_x + \frac{r-f}{r}\sum_0^1 \frac{\eta}{F} P_x + \frac{r-f}{r^2}\sum_0^1 \frac{\sigma}{F} S_x\right) \qquad 9)$$

mit v, w nach § 32, 1) 2) anstatt § 32, 9) oder nach § 31, 5) 6) anstatt § 31, 14). Die Ausdrücke 5) 6) 8) würden mit dem jetzt gültigen w bestehen bleiben.

In den Gleichungen unter *a*) und *b*) bedeuten $\mathfrak{F}$ den Querschnitt der Zugstange und bei gesprengter Zugstange z die Gesammtlänge derselben. Für $z = l$ gehen die Ausdrücke 2) 6) in 1) 5) über. Durch gleiche Temperaturänderungen $\tau = \tau'$ von Bogen und Zugstange entsteht nach 4) 8) kein Horizontalschub. Aus 3) folgen mit Rücksicht auf § 14, aus 7) wie in §§ 31, 32 auch unmittelbar die H für eine gleichmässig vertheilte Last u auf der ganzen Spannweite und für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Hälfte derselben.

§ 33. Formänderungen von Bogen mit beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten.

Das Allgemeine über die Berechnung der Formänderungen von Bogen mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten ist in § 26 gegeben. Im Folgenden denken wir uns wie in §§ 31, 32 eine Eintheilung in Felder vorgenommen, für welche die Mittelwerthe von x, y, J, F, M_x, N_x in Rechnung gezogen werden. Der Fall, dass ein Zwischengelenk vorhanden ist (Bogen mit drei Gelenken) bleibe zunächst ausgeschlossen, er wird unten seine Erledigung finden.

In den Gleichungen 18) 20) des § 26 können nach § 32 für gewisse Fälle die Werthe

$$X_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{dx + y\,d\varphi}{EF},$$

$$Y_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{dy - x\,d\varphi}{EF},$$

$$Z_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{ds}{EFr}$$

vernachlässigt werden. Wir wollen zunächst keinen Gebrauch hiervon machen, jedoch wie in §§ 27—32 der Berechnung dieser Integrale auch dann einen Kreisbogen vom Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \tag{1}$$

zu Grunde legen, wenn der Bogen nicht kreisförmig sein sollte (vergl. S. 196). Alsdann hat man nach § 27 (S. 196) in obigen Ausdrücken:

$$dx + y\,d\varphi = \frac{r-f}{r}\,ds, \qquad dy - x\,d\varphi = \frac{l}{2r}\,ds,$$

und demgemäss nach § 26, 18) 20) mit § 26, 11)—13) und der Bezeichnung

$$W_x = \sum_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{\sigma}{F} \tag{2}$$

die Aenderungen von x, y, φ allgemein:

$$\Delta x = -\; y\,\Delta\varphi + \frac{1}{E}\sum_0^x \frac{\sigma y}{J} M_x - \frac{r-f}{rE} W_x + \alpha\tau x, \tag{3}$$

$$\Delta y = \quad x\,\Delta\varphi - \frac{1}{E}\sum_0^x \frac{\sigma x}{J} M_x - \frac{l}{2rE} W_x + \alpha\tau y, \tag{4}$$

$$\Delta\varphi = \quad \Delta\varphi_0 + \frac{1}{E}\sum_0^x \frac{\sigma}{J} M_x + \frac{1}{rE} W_x. \tag{5}$$

Die hierin auftretende Aenderung $\Delta\varphi_0$ des Winkels φ_0 (Winkel φ bei $x = 0$) ergibt sich aus 5) mit $x = l$, nachdem die Aenderung $\Delta\varphi_l$ des Winkels φ_l (Winkel φ bei $x = l$) aus 4) mit $x = l$ bestimmt ist. Die Ausdrücke lauten, wenn

$$W = \sum_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{\sigma}{F} \tag{6}$$

gesetzt wird:

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} - \frac{1}{lE}\sum_0^l \frac{\sigma(l-x)}{J} M_x - \frac{W}{2rE}, \tag{7}$$

$$\Delta\varphi_l = \frac{\Delta k}{l} + \frac{1}{lE}\sum_0^l \frac{\sigma x}{J} M_x + \frac{W}{2rE}. \tag{8}$$

Jedoch ist $\Delta\varphi_0$ für einfache Bogen nur dann zu berechnen, wenn Kämpfergelenke vorhanden sind, da für Bogen ohne Gelenke unter Voraussetzung vollkommen festliegender Endquerschnitte $\Delta\varphi_0$, $\Delta\varphi_l$ den Werth Null haben, und ohne jene Voraussetzung die angenommenen $\Delta\varphi_0$, $\Delta\varphi_l$ einzusetzen wären. Wenn die Stützen in gleicher Höhe bleiben, ist natürlich für Bogen mit und ohne Gelenke $\Delta k = 0$.

Wir wollen wie in § 30 noch besonders die Einsenkung in der Bogenmitte, d. h. $e = -\Delta y = -\Delta f$ bei $x = \frac{l}{2} = m$ ausdrücken. Nach 4) hat man für dieselbe:

$$e = \frac{1}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x + \frac{l}{2rE} W_m - \frac{l}{2}\Delta\varphi_m - \alpha\tau f,$$

worin nach 5) die Aenderung von φ bei m:

$$\Delta \varphi_m = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{E} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} M_x + \frac{1}{r E} W_m,$$

sodass man auch schreiben kann:

$$e = \frac{1}{2E} \sum_0^m \frac{\sigma (2x - l)}{J} M_x - \frac{l}{2} \Delta \varphi_0 - \alpha \tau f. \qquad 9)$$

Hierin ist für Bogen ohne Gelenke bei vollkommen festsitzenden Endquerschnitten $\Delta \varphi_0 = 0$, während allgemein $\Delta \varphi_0$ durch 7) ausgedrückt ist, womit bei Beachtung von $\sum_0^l = \sum_0^m + \sum_m^l$ folgt:

$$e = \frac{1}{2E} \left[\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x + \sum_m^l \frac{\sigma (l - x)}{J} M_x \right] + \frac{l W}{4 r E} - \frac{\Delta k}{2} - \alpha \tau f. \qquad 10)$$

Setzen wir den gewöhnlichen Fall voraus, dass nicht nur die Bogenaxe, sondern die ganze Anordnung des Trägers einschliesslich der Feldertheilung zur Trägermitte symmetrisch ist. Dann sind in 10) die $\frac{\sigma (l - x)}{J}$ für die Felder von m bis l gleich den $\frac{\sigma x}{J}$ der symmetrisch dazu liegenden Felder von 0 bis m, womit sich die Berechnung besonders dann vereinfacht, wenn symmetrisch zur Trägermitte auch gleiche Momente M_x auftreten. So erhält man aus 10) die Einsenkung durch eine beliebige symmetrisch zur Mitte liegende Belastung allein:

$$e = \frac{1}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x + \frac{l W}{4 r E}, \qquad 11)$$

was, weil in diesem Falle $\Delta \varphi_m = 0$ und

$$\frac{W}{2} = W_m = \sum_0^m \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{\sigma}{F}, \qquad 12)$$

auch unmittelbar aus 4) zu entnehmen war. Berücksichtigt man, dass nach § 1, 3) allgemein:

$$M_x = M + V x - H y - S_x \text{ mit } S_x = \sum_0^x P (x - a), \qquad 13)$$

so lässt sich anstatt 11) setzen:

$$e = \frac{1}{E} \left(M \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} + V \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - H \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} S_x \right) + \frac{l W}{4 r E}, \qquad 14)$$

welche Formel mitunter für die Anwendung bequemer ist.

Die Gleichungen 11) 14) können auch bei unsymmetrischer Belastung zur Verwendung kommen, wenn berücksichtigt wird, dass die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige Belastung halb so gross ist als durch eine mittelst Verdoppelung dieser Belastung (Uebertragung symmetrisch zur Trägermitte) hergestellte symmetrische Belastung. Formel 12) drückt W bei symmetrischem Träger immer dann aus, wenn die M_x, N_x zur Mitte symmetrisch liegen, also beispielsweise auch bei Berechnung des Einflusses von τ oder Δl allein, doch sind in § 35 noch andere Ausdrücke von W gegeben.

Da die Glieder mit W, W_x in obigen Gleichungen durch Berücksichtigung von X_2 Y_2, Z_2 in § 26, 18) 20) entstanden sind, so hat man sie selbstverständlich gleich Null zu setzen, wenn bei Berechnung von H für Bogen mit zwei Gelenken bezw. von H, M, M' für Bogen ohne Gelenk die X_2, bezw. X_2, Y_2, Z_2 vernachlässigt werden (§§ 32, 34).

Es ist nun noch festzustellen, welche Abweichungen gegen vorstehende Formeln eintreten, wenn sich bei $x = m = \frac{l}{2}$ ein Zwischengelenk befindet. Alsdann bleiben mit den Bezeichnungen 1) 2) die Ausdrücke 3) bis 5) zwar für x zwischen 0 und m ungeändert, für x zwischen m und l dagegen wären zufolge § 26, 25) den rechten Seiten von 3)—5) bezw. ωf, $-\omega \frac{l}{2}$ ω beizufügen, womit anstatt 7)8) folgen:

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} - \frac{1}{l E} \sum_0^l \frac{\sigma (l-x)}{J} M_x - \frac{W}{2 r E} - \frac{\omega}{2}, \tag{15}$$

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\Delta k}{l} + \frac{1}{l E} \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} M_x + \frac{W}{2 r E} + \frac{\omega}{2}, \tag{16}$$

worin der Sprungwerth $\omega = \Delta \varphi_u - \Delta \varphi_v$ der Winkeländerung $\Delta \varphi$ bei m nach 3) mit $x = l$ unter Berücksichtigung von ωf:

$$\omega = \frac{\Delta l}{f} - \frac{1}{E f} \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} M_x + \frac{r-f}{r f E} W - \alpha \tau \frac{l}{f}. \tag{17}$$

Gleichung 9) gilt auch für Bogen mit Zwischengelenk, während mit 15) 17) aus 9) an Stelle von 10) folgt:

$$e = \frac{1}{2E} \left[\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x + \sum_m^l \frac{\sigma (l-x)}{J} M_x - \frac{l}{2f} \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} M_x \right] + \frac{l W}{4 f E} + \frac{l \Delta l}{4 f} - \frac{\Delta k}{2} - \alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4 f} \right). \tag{18}$$

Bei vollständig symmetrischer Anordnung des Trägers sind hierin wieder die $\frac{\sigma (l-x)}{J}$ auf der zweiten gleich den $\frac{\sigma x}{J}$ auf der ersten Trägerhälfte, sodass dann die Einsenkung durch eine beliebige zur Trägermitte symmetrische Belastung allein anstatt durch 11) ausgedrückt ist:

$$e = \frac{1}{E} \left[\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x - \frac{l}{2f} \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} M_x \right] + \frac{l W}{4 f E}, \tag{10}$$

worin W durch 12) oder § 35 bestimmt. Durch Einsetzen von M_x nach 13) kann auch die 14) entsprechende Gleichung gebildet werden. Beide Ausdrücke sind in der zu 13) 14) angegebenen Weise auch bei unsymmetrischer Belastung verwendbar.

Im Folgenden sollen noch einige speziellere Formeln angeführt werden. Bei Vernachlässigung des Einflusses von X_2, Y_2, Z_2 wäre auch in diesen $W = 0$ zu setzen.

Bogen ohne Gelenke.

Es gelten die Gleichungen 1) bis 14). Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit sind

$$V = \frac{u\,l}{2}, \qquad S_x = \frac{u\,x^2}{2},$$

sodass man nach 14) die Einsenkung durch eine solche ausdrücken kann:

$$e = \frac{u}{2E}\left(\frac{2M}{u}\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} + l\sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \frac{2H}{u}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J}\right) + \frac{l\,W}{4rE} \qquad 20)$$

Hierin sind M, H, W durch § 35, 19)—21) und wenn W vernachlässigt wird, M, H auch durch § 34, 18)—21) bestimmt. Eine Temperaturänderung τ allein bewirkt nach 10) mit $M_x = M - Hy$:

$$e = \frac{M}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - \frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \frac{l\,W}{4rE} - \alpha\,\tau f, \qquad 21)$$

worin M, H, W durch § 35, 32)—34) und bei Vernachlässigung von W, M, H auch durch § 34, 36) 37) bestimmt. Durch Aenderungen Δl, Δk der Spannweite und Stützhöhen ohne sonstige Verdrehung der Endquerschnitte folgt ebenfalls nach 10) mit $M_x = M - Hy$:

$$e = \frac{M}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - \frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \frac{l\,W}{4rE} - \frac{\Delta k}{2}, \qquad 22)$$

worin M, H, W durch § 35, 39) 40) 34) und bei Vernachlässigung von W M, H durch § 34, 41) 42) bestimmt. Bei beliebigen $\Delta\varphi_0$, $\Delta\varphi_l$ würde M_x für symmetrisch zur Trägermitte liegende Querschnitte nicht gleich sein, sodass alsdann 10) mit $M_x = M - Hy$ und M, H, W nach § 35, 35)—38) bezw. § 34, 38)—40) zu verwenden wären (Beisp. 44).

Bogen mit zwei Gelenken.

Es gelten die Gleichungen 1) bis 14) und für gleichmässig vertheilte Last auf der ganzen Spannweite, eine Temperaturänderung τ und beliebige kleine Bewegungen der Stützen die Gleichungen 20) bis 22), sämmtlich mit $M = 0$, wie auch in den aus § 35 angeführten Ausdrücken von W die Stützenmomente $M = M' = 0$ zu setzen wären. Wenn jedoch, wie für Bogen mit zwei Gelenken bei Berechnung von H oft zulässig, die W enthaltenden Glieder auch bei Ermittelung von e vernachlässigt werden (Glieder mit F im Nenner, vergl. 217), dann folgen für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit allein:

$$e = \frac{u}{2E}\left(l\sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \frac{2H}{u}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J}\right) \qquad 23)$$

mit H nach § 16, 22), ferner für eine Temperaturänderung τ allein:

$$e = -\frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \alpha\,\tau f, \qquad 24)$$

mit H nach § 16, 14), und für kleine Bewegungen der Kämpfer, durch welche die Spannweite um Δl vergrössert (bei Verkleinerung Δl negativ) und der Stützpunkt l gegen den Stützpunkt 0 um Δk erhöht wird (bei Erniedrigung Δk negativ:

$$e = -\frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \frac{\Delta k}{2} \qquad 25)$$

mit H nach § 16, 15). Inwiefern die erwähnten Vernachlässigungen berechtigt sind, müssen Proberechnungen zeigen (Beispiele 25 u. 41).

Bogen mit drei Gelenken.

Die allgemeinen Gleichungen sind oben nach Formel 14) gegeben. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit liefert 19) mit M_x nach § 15, 21).

$$e = \frac{u}{2E}\left(l \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J} - \frac{l^2}{4f}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J}\right) -$$

$$\frac{u\,l}{4fE}\left(l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J} - \frac{l^2}{4f}\sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J}\right) + \frac{l\,W}{4fE}, \tag{26}$$

worin W durch § 35, 21) mit $M = 0$, $H = \frac{u\,l^2}{8f}$ bestimmt (§ 15). Speziell bei parabolischer Axe wäre nach § 15, 21) $M_x = 0$ und damit nach 19):

$$e = \frac{l\,W}{4fE}.$$

Durch eine Temperaturänderung τ allein entsteht nach 18) wegen $M_x = 0$, $W = 0$:

$$e = -\,\alpha\,\tau\left(f + \frac{l^2}{4f}\right), \tag{27}$$

und durch kleine Bewegungen der Stützpunkte allein, welchen die zu 25) erwähnten Aenderungen $\Delta\,l$, $\Delta\,k$ entsprechen:

$$c = \frac{l\,\Delta\,l}{4f} - \frac{\Delta\,k}{2}. \tag{28}$$

Beispiel 41. Genauere Berechnung (vergl. Beisp. 25) der Einsenkungen eines Zweigelenkbogens von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Für den Bogen der in Beisp. 39 behandelten Dourobrücke die Einsenkung e in der Mitte möglichst genau zu berechnen: *a)* für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit; *b)* für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte; *c)* für eine zur Mitte symmetrische Belastung, welcher bei den Abscissen a = 23,75 m, 26,75 m, 54 m, 64,4 m, 74,8 m die Lasten P = 63400 kg, 63400 kg, 62400 kg, 47000 kg, 40500 kg entsprechen; *d)* für eine einseitige Belastung gleich der im Falle *c)* auf einer Trägerhälfte angenommenen; *e)* für eine Temperaturänderung $\tau = \pm 30°$; *f)* für eine Aenderung der Spannweite um $\Delta\,l$ = 0,01 m und eine Senkung des Stützpunktes 0 gegen den Stützpunkt l um Δk = 0,01 m.

a) Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit hat man nach § 33, 20) mit $M = 0$:

$$e = \frac{u}{2E}\left(l\sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J} - \frac{2H}{u}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J}\right) + \frac{l\,W}{4rE}, \tag{1}$$

worin nach § 35, 21):

$$\frac{W}{2} = H\sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + u\sum_0^m \frac{\eta\,(m-x)}{F} + \frac{u}{2r}\sum_0^m \frac{\sigma x(l-x)}{F}. \tag{2}$$

Mit Rücksicht auf r = 96,354 m, die Tabelle S. 220, 221 und den in Beisp. 39 erhaltenen Horizontalschub H = 72,111 u liefert 2):

$$\frac{W}{2} = 72{,}111\, u \left(335{,}59 - \frac{10369{,}3}{96{,}354}\right) + u \left(80 \,.\, 170{,}83 - 4663{,}87 + \frac{80 \,.\, 15135{,}3}{96{,}354} - \frac{796257}{2 \,.\, 96{,}354}\right)$$

$$= u\,(24200 - 7833 + 13666 - 4664 + 12566 - 4132) = 33803\, u,$$

und bei Beachtung der Tabelle S. 220, 221 Gleichung 1):

$$e = \frac{u}{E}(80 \,.\, 47251 - 1287244 - 72{,}111 \,.\, 34066) + \frac{80 \,.\, 33803}{96{,}354\, E}$$

$$e = 36303 \frac{u}{E} + 28066 \frac{u}{E} = 64369 \frac{u}{E},$$

also beispielsweise für $u = 4800$ kg, $E = 2000000$ kg per qcm:

$$e = \frac{64369 \,.\, 4800}{2000000 \,.\, 100^2} = 0{,}01545 \text{ m} = 1{,}545 \text{ cm}.$$

Bei den in Beisp. 25 zugelassenen Vernachlässigungen (von X_2, Y_2, Z_2 in § 26) hätte 1) mit $H = 72{,}848\, u$ und $W = 0$ wie in Beisp. 25 ergeben $e = 0{,}269$ cm, um 82,59 % zu klein.

b) Da bei gleichmässig vertheilter Last auf der ganzen Spannweite die Belastungen beider Trägerhälften gleichviel zur Einsenkung in der Trägermitte beitragen, so hat man für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' per Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte mit Rücksicht auf das Resultat unter *a*):

$$e = 32184 \frac{u + u'}{E}.$$

c) Für die unter *c*) vorgeschriebene symmetrische Belastung hat man nach § 33, 14) mit $M = 0$:

$$e = \frac{1}{E}\left(V \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - H \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} S_x\right) + \frac{l\, W}{4 r E}, \qquad 3)$$

worin nach § 35, 17) 18):

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \sum_0^m \frac{\eta}{F} V_x + \frac{1}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F}\left(x V - S_x\right). \qquad 4)$$

Im vorliegenden Falle sind die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V = 2 \,.\, 63400 + 62400 + 47000 + 40500 = 276700 \text{ kg},$$

und der Horizontalschub nach Beisp. 39:

$$H = 2\,(0{,}35656 \,.\, 63400 + 0{,}38888 \,.\, 63400 + 0{,}59425 \,.\, 62400 + 0{,}63342 \,.\, 47000 + 0{,}65263 \,.\, 40500) = 281089 \text{ kg},$$

während die Gleichungen

$$V_x = V - \sum_0^x P, \qquad S_x = \sum_0^x P\,(x - a) \qquad 5)$$

für die einzelnen Felder liefern:

bei $x =$	$V_x =$	$S_x =$
2,80 m	276700 kg	0
8,40	276700	0
14,10	276700	0
20,40	276700	0
25,25	213300	63400 . 1,5 = 95100 mk
31,00	149900	63400 (7,25 + 4,25) = 729100 mk
39,75	149900	63400 (16,00 + 13,00) = 1838600 „
49,15	149900	63400 (25,40 + 22,40) = 3030520 „
59,20	87500	63400 (35,45 + 32,45) + 62400 . 5,2 = 4629340 kg
69,60	40500	63400 (45,85 + 42,85) + 62400 . 15,6 + 47000 . 5,2 = 6841420 kg
80	0	63400 (56,25 + 53,25) + 62400 . 26,0 + 47000 . 15,6 + 40500 . 5,2 = 9508500 kg.

Mit Rücksicht auf die Tabelle S. 220, 221 erhalten wir weiter:

$\frac{\eta}{F} V_x =$	$\frac{\sigma}{F} S_x =$	$\frac{\sigma x}{J} S_x =$
5675117	0	0
5724923	0	0
5910312	0	0
6234051	0	0
1983690	1493070	3705096
3284309	20279523	77364801
2858593	82130262	210703560
2572284	141979862	412150720
1083250	223180481	698011885
204120	315047391	1084707141
0	218980755	850440240
Summe 35510649	1013091344	3337083443

Aus 4) ergibt sich nun:

$$\frac{W}{2} = 281089\left(335{,}59 - \frac{10369{,}3}{96{,}354}\right) - 35510649 + \frac{276700}{96{,}354}\,15135{,}3 - \frac{1013091344}{96{,}354}$$

$$= 64054530 + 35510639 + 43464075 - 10514264 = 132514990$$

und damit nach 3):

$$e = \frac{1}{E}(276700 \,.\, 47251 - 281089 \,.\, 34066 - 3337083443) + \frac{80 \,.\, 132514990}{96{,}354}$$

$$e = \frac{161690383}{E} + \frac{110023447}{E} = \frac{271713830}{E},$$

also mit $E = 2000000$ kg per qcm:

$$e = \frac{271713830 \,.\, 100}{2000000 \,.\, 100^2} \text{ cm} = 1{,}359 \text{ cm}.$$

Bei den in Beispiel 25 zugelassenen Vernachlässigungen hätten wir aus 3) mit $H = 283969$ kg und $W = 0$ erhalten $e = 0{,}318$ cm (in Beisp. 25 bei anderem Vorgehen 0,320 cm), um 76,60 % weniger.

d) Da bei symmetrisch zur Trägermitte liegender Belastung die Belastungen beider Trägerhälften gleichviel zur Einsenkung in der Trägermitte beitragen, so hat man für die unter *d*) erwähnte einseitige Belastung:

$$e = \frac{135856915}{E}.$$

e) Durch eine beliebige Temperaturänderung τ entsteht nach § 33, 21) mit $M = 0$ die Einsenkung:

$$e = -\frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \frac{l W}{4 r E} - \alpha \tau f, \tag{6}$$

worin nach § 35, 34):

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma y}{F}. \tag{7}$$

Mit Rücksicht auf die Tabelle S. 220, 221 und den in Beispiel 39 berechneten Horizontalschub $H = \frac{E\alpha\tau}{322{,}125}$ ergibt sich:

$$\frac{W}{2} = \frac{E\alpha\tau}{322{,}125}\left(335{,}59 - \frac{10369{,}3}{96{,}354}\right) = \frac{E\alpha\tau}{1{,}4130},$$

also nach 6):

$$e = -\frac{\alpha\tau \,.\, 34066}{322{,}125} + \frac{80\,\alpha\tau}{96{,}354 \,.\, 1{,}4130} - 42{,}65\,\alpha\tau = -\,147{,}816\,\alpha\tau,$$

und mit $\alpha = 0{,}000012$, $\tau = \pm 30^\circ$:

$$e = \mp 5{,}321 \text{ cm}.$$

Bei den in Beisp. 25 zugelassenen Vernachlässigungen hätten wir nach 6) mit $H = \frac{E \alpha \tau}{320,537}$ und $W = 0$ wie in Beisp. 25 erhalten $e = \mp 5,361$ cm, um 0,75 % mehr.

f) Durch eine Aenderung der Spannweite um Δl und eine Erhöhung des Stützpunktes l gegen den Stützpunkt 0 um Δk hat man nach § 33, 22) mit $M = 0$:

$$e = -\frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \frac{l W}{4 r E} - \frac{\Delta k}{2}, \tag{8}$$

worin nach § 35, 38) W durch 7) bestimmt. Da nach Beisp. 39 durch Δl entsteht $H = -\frac{E \Delta l}{51540}$, während Δk keinen Horizontalschub erzeugt, so folgt:

$$\frac{W}{2} = -\frac{E \alpha \tau}{51540}\left(335,59 - \frac{10369,3}{96,354}\right) = -\frac{E \alpha \tau}{226,079},$$

und nach 8):

$$e = \frac{\Delta l \,.\, 34066}{51540} - \frac{80 \,.\, \Delta l}{96,354 \,.\, 226,079} - \frac{\Delta k}{2}$$

$$e = 0,6573 \, \Delta l - 0,5 \, \Delta k,$$

und speziell für $\Delta l = 2$ cm $e = 1,3146$ cm.

Bei den in Beisp. 25 zugelassenen Vernachlässigungen hätten wir nach 8) mit $H = -\frac{E \Delta l}{51286}$, $W = 0$ wie in Beisp. 25 erhalten $e = 1,3284$ cm, um 1,05 % zu gross.

Die obigen Vergleiche zeigen, dass die in Beisp. 25 zugelassenen Vernachlässigungen zwar bei Berechnung der Einsenkungen durch Temperaturänderungen und Stützenbewegungen, nicht aber bei Ermittelung der Einsenkungen durch Belastung berechtigt waren. Ebensowenig sind die Formeln zur Berechnung der Einsenkung von Parabelbogen mit konstantem $J \cos \varphi$ für den Dourobogen genügend (Vergl. Beisp. 42).

Beispiel 42. Zur Anwendung der Formeln für die Einsenkungen von Parabelbogen bei andern Bogen (Dourobrücke in Portugal).

Die in Beisp. 25, 41 verlangten Einsenkungen, welche dort nach den Gleichungen des § 33 berechnet wurden, für den Fall festzustellen, dass die Formeln für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ zur Verwendung kommen sollen.

a) Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit ist die Einsenkung in der Trägermitte nach § 16, 50):

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{5 u l^4}{384 E c}, \tag{1}$$

wonach im vorliegendem Falle mit $l = 160$ m, $c = 2,76265$ m⁴, $\varepsilon = 0,004287$ (Beisp. 40):

$$e = \frac{0,004287}{1,004287} \frac{5 u \, 160^4}{384 \,.\, 2,76265 \, E} = 13185 \frac{u}{E}$$

$$= \frac{13185 \, u}{2000000 \,.\, 100^2} \text{ m} = 0,0000659 \, u \text{ cm},$$

und für $u = 4800$ kg:

$$e = 0,316 \text{ cm},$$

d. i. 17,47 % grösser als in Beisp. 25, aber 78,55 % kleiner als in Beisp. 41.

b) Durch eine beliebige symmetrische Belastung entsteht nach § 16, 48):

$$e = \frac{1}{24 E c}\left[\sum_0^m P a (3 l^2 - 4 a^2) - H \frac{5 f l^2}{2}\right], \tag{2}$$

worin zufolge § 16, 7) mit $\beta = 0$;

$$H\frac{5fl^2}{2} = \frac{25}{(1+\varepsilon)8l}\sum_0^m Pa(l-a)(l^2+la-a^2) \tag{3}$$

und in unserm Falle:

$$H\frac{5fl^2}{2} = \frac{1}{51{,}4195}\sum_0^m Pa(l-a)(l^2+la-a^2).$$

Wir können damit schreiben:

$$e = \frac{1}{66{,}3036\,E}\sum_0^m Pa\left(3l^2-4a^2-\frac{(l-a)(l^2+a(l-a))}{51{,}4195}\right).$$

Da nun angenommen sind:

bei						
	$a =$	23,375	26,375	54	64,4	74,8 m
	$P =$	63400	63400	62400	47000	40500 kg,

so liefert die letzte Gleichung:

$$e = \frac{1}{66{,}3036\,E}(-63400\,.\,23{,}75\,.\,1865 - 63400\,.\,26{,}75\,.\,1639 + 62400\,.\,54\,.\,562 +$$

$$47000\,.\,64{,}4\,.\,1169 + 40500\,.\,74{,}8\,.\,1442) = \frac{59870000}{E} = \frac{59870000}{2000000\,.\,100^2}\,\text{m}$$

$$e = 0{,}299\ \text{cm},$$

6,56 % kleiner als in Beisp. 25 und 78,00 % kleiner als in Beisp. 41.

c) Die Einsenkung durch eine beliebige Temperaturänderung τ ist nach § 16, 53):

$$e = -\alpha\tau\left(f+\frac{25}{128f}\frac{l^2}{1+\varepsilon}\right), \tag{4}$$

woraus mit $f = 42{,}65$ m:

$$e = -\alpha\tau\left(42{,}65+\frac{25\,.\,160^2}{128\,.\,42{,}65\,.\,1{,}004287}\right) = -159{,}383\,\alpha\tau,$$

und mit $\alpha = 0{,}000012$:

$$e = -0{,}001913\,\tau\ \text{m} = -0{,}1913\,\tau\ \text{cm},$$

beispielsweise für $\tau = \pm 30°$:

$$e = \mp 5{,}739\ \text{cm},$$

7,02 % grösser als in Beisp. 25 und 7,83 % grösser als in Beisp. 41.

d) Durch eine Aenderung der Spannweite um Δl ergibt sich nach § 16, 55):

$$e = \frac{25\,l}{128f}\frac{\Delta l}{1+\varepsilon}, \tag{5}$$

also in unserm Falle:

$$e = \frac{25\,.\,160}{128\,.\,42{,}65}\frac{\Delta l}{1{,}004287} = 0{,}7296\,\Delta l,$$

und für $\Delta l = 2$ cm:

$$e = 1{,}459\ \text{cm},$$

9,86 % grösser als in Beisp. 25 und 11,00 % grösser als in Beisp. 41.

Aufgabe 16. Einsenkungen beliebiger symmetrischer Bogen mit drei Gelenken. Die Einsenkungen des Zwischengelenks beliebiger symmetrischer Dreigelenkbogen durch beliebige Temperaturänderungen τ, kleine Aenderungen Δl der Spannweite und Aenderungen Δk der Stützhöhen zu ermitteln.

Bezeichnen l, f, L die Spannweite, Ordinate des Zwischengelenks und Entfernung des Letzteren von den Kämpfergelenken im normalen Zustande, so hat man (Fig. 140):

$$f^2 = L^2 - \frac{l^2}{4}. \qquad 1)$$

Tritt eine unendliche kleine Anderung von L bei konstantem l ein, so liefert 1):

$$2 f\, d f = 2 L\, d L.$$

Diese Gleichung gilt auch noch für genügend kleine endliche Aenderungen,, wofür also:

$$\Delta f = \frac{L}{f} \Delta L.$$

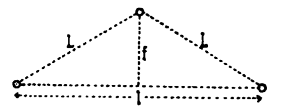


Fig. 140

Einer Temperaturänderung τ entspricht $\Delta L = \alpha \tau L$ und da die Einsenkung $e = - \Delta f$, so folgt:

$$e = - \alpha \tau \frac{L^2}{f} = - \alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4 f}\right). \qquad 2)$$

Eine unendlich kleine Aenderung der Spannweite bei konstantem L ergibt nach 1):

$$2 f\, d f = - \frac{2 l\, d l}{4},$$

wonach bei genügend kleiner endlicher Aenderung mit $e = - \Delta f$:

$$e = \frac{l \Delta l}{4 f}. \qquad 3)$$

Dass eine Aenderung der Stützhöhen um Δk, d. h. eine Senkung der Stütze 0 gegenüber der Stütze l um Δk bei symmetrischem Träger in der Mitte eine Einsenkung:

$$e = - \frac{\Delta k}{2} \qquad 4)$$

liefert, ist unmittelbar ersichtlich.

Die erhaltenen allgemeinen Resultate stimmen natürlich mit den in § 30 speziell für den parabolischen Dreigelenkbogen von konstantem $J \cos \varphi$ und in § 33 für beliebige Axe und beliebige Querschnitte erhaltenen überein.

§ 34. Horizontalschub und Endmomente des Bogens ohne Gelenke mit beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten.

Nach § 33, 3)—5) hat man für $x = l$ mit Rücksicht auf $y = k = 0$ bei Vernachlässigung von W_x (siehe S. 238 unten):

$$\Delta l = \alpha \tau l + \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} M_x,$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_l - \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} M_x,$$

$$\Delta \varphi_l = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{J} M_x,$$

und durch Substitution von

$$M_x = M + V x - H y - \sum_0^x P (x - a)$$

mit der schon in § 31 angewandten Bezeichnung:

$$S_x = \sum_0^x P (x - a) \qquad 1)$$

im allgemeinsten Falle (für beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung und beliebige Bewegungen der Stützen):

$$E\Delta l = El\alpha\tau + M\sum_0^l \frac{\sigma y}{J} + V\sum_0^l \frac{\sigma x y}{J} - H\sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J} - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x, \qquad 2)$$

$$E\Delta k = El\Delta\varphi_1 - M\sum_0^l \frac{\sigma x}{J} - V\sum_0^l \frac{\sigma x^2}{J} + H\sum_0^l \frac{\sigma x y}{J} + \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} S_x, \qquad 3)$$

$$E\Delta\varphi_1 = E\Delta\varphi_0 + M\sum_0^l \frac{\sigma}{J} + V\sum_0^l \frac{\sigma x}{J} - H\sum_0^l \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x. \qquad 4)$$

Diese drei Gleichungen liefern H, V, M, womit wegen

$$V = \frac{1}{l}(M' - M + S) \quad \text{mit} \quad S = \sum_0^l P(l-a) \qquad 5)$$

auch M' bestimmt ist. Für $M = M'$ genügen die beiden ersten Gleichungen. Dies trifft insbesondere für den Einfluss symmetrischer Belastung, einer Temperaturänderung τ und einer Aenderung Δl der Spannweite zu. Wenn die Endquerschnitte als unwandelbar festliegend gelten, dann hat man in 2)—4):

$$\Delta l = 0, \qquad \Delta k = 0, \qquad \Delta\varphi_0 = 0, \qquad \Delta\varphi_1 = 0. \qquad 6)$$

Soll jedoch der Einfluss irgendwelcher Aenderungen von l, k, φ_0, φ_1 berücksichtigt werden, dann sind die betreffenden Werthe derselben einzusetzen (§ 26).

Im Weiteren wollen wir voraussetzen, dass nicht nur die Bogenaxe, sondern die ganze Anordnung des Bogens einschliesslich der Feldertheilung zur Mitte symmetrisch ist. Dann treten die zu Beginn des § 32 erwähnten Vereinfachungen ein, sodass

$$\sum_0^l \frac{\sigma y}{J} = 2\sum_0^m \frac{\sigma y}{J}, \qquad \sum_0^l \frac{\sigma x y}{J} = l\sum_0^m \frac{\sigma y}{J}, \qquad \sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J} = 2\sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J},$$

$$\sum_0^l \frac{\sigma}{J} = 2\sum_0^m \frac{\sigma}{J}, \qquad \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} = 2\sum_0^m \frac{\sigma}{J}.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$A = \sum_0^m \frac{\sigma}{J}, \qquad B = \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}, \qquad C = \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J}, \qquad 7)$$

$$D = \sum_0^l \frac{\sigma x^2}{J} = Al^2 - 2l\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} + 2\sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J}, \qquad 8)$$

welche Werthe nur von den Querschnitten und der Axform abhängen, während S_x, S nach 1) 5) Funktionen der Belastung sind, so gehen die Gleichungen 2) und 4) in die folgenden über:

$$E\Delta l = (M + M' + S)B - 2HC - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x + El\alpha\tau, \qquad 9)$$

$$E\Delta\varphi_1 = (M + M' + S)A - 2HB - \sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x + E\Delta\varphi_0, \qquad 10)$$

während durch Addition der mit l multiplicirten Gleichung 4) zu der mit 2 multiplicirten Gleichung 3) folgt:

$$E(2\Delta k - l\Delta\varphi_0 - l\Delta\varphi_1) = (M' - M + S)(Al^2 - 2D) + l\sum_0^l \frac{\sigma}{J}(2x - l)S_x. \qquad 11)$$

Aus diesen drei Gleichungen können H, M, M' berechnet werden. Wir wollen daraus einige direkt verwendbare Spezialformeln ableiten.

Verschiedene Belastungen.

Für eine beliebige Belastung allein erhält man mit $\tau = 0$, $\Delta l = \Delta k = 0$, $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_1 = 0$:

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{AC - B^2} \sum_0^1 \frac{\sigma}{J} S_x (B - Ay), \tag{12}$$

$$M + M' + S = \frac{1}{AC - B^2} \sum_0^1 \frac{\sigma}{J} S_x (C - By), \tag{13}$$

$$M - M' - S = \frac{l}{2D - Al^2} \sum_0^1 \frac{\sigma}{J} S_x (l - 2x). \tag{14}$$

Die Summen auf der rechten Seite können nach Bedürfniss zerfällt werden, sodass z. B.

$$\sum_0^1 \frac{\sigma}{J} S_x (B - Ay) = B \sum_0^1 \frac{\sigma}{J} S_x - A \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} S_x.$$

Für eine beliebige symmetrische Belastung genügt zur Bestimmung der Momente $M = M'$ die Gleichung 13) allein. Da jedoch

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_0^x P(x-a) = x \sum_0^x P - \sum_0^x Pa \\ &= x \left(\sum_0^1 P - \sum_x^1 P\right) - \left(\sum_0^1 Pa - \sum_x^1 Pa\right) \\ &= \sum_0^1 P(l-a) - (l-x) \sum_0^1 P + (l-x) \sum_x^1 P - \sum_x^1 P l - a), \end{aligned}$$

so hat man alsdann für zwei symmetrisch zur Mitte bei x und x' liegende Felder wegen

$$x' = l - x, \qquad l - x' = x, \qquad S = \sum_0^1 P(l-a) = l \sum_0^m P:$$

$$\begin{aligned} S_x + S_x' &= S_x + S - x \sum_0^1 P + x \sum_0^x P - \sum_0^x Pa \\ &= S_x + S - \frac{2x}{l} S + \sum_0^x P(x-a) \\ &= 2 S_x + S - \frac{2x}{l} S, \end{aligned}$$

und damit aus 12) 13) bei Beachtung von 7) für beliebige symmetrische Belastung:

$$H = \frac{1}{AC - B^2} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x\right) (Ay - B), \tag{15}$$

$$M = M' = \frac{1}{AC - B^2} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x\right) (By - C). \tag{16}$$

In diesen Gleichungen kann man auch setzen:

$$\frac{x}{l} S - S_x = \sum_0^x P a + x \sum_x^m P, \qquad 17)$$

doch ist zu beachten, dass eine etwa gerade bei $a = x$ liegende Last P nur in einer (beliebigen) der beiden Summen rechts aufgenommen werden darf. Aus 15) 16) ergeben sich beispielsweise für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit mit

$$S_x = \frac{u x^2}{2}, \qquad S = \frac{u l^2}{2},$$

(§ 14) der Horizontalschub und die Endmomente:

$$H = \frac{u}{2(AC - B^2)} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} x (l-x)(Ay - B), \qquad 18)$$

$$M = M' = \frac{u}{2(AC - B^2)} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} x (l-x)(By - C), \qquad 19)$$

wofür man, die Summen Σ zerfällend, auch setzen kann:

$$H = \frac{u}{2(AC - B^2)} \left[A \sum_0^m \frac{\sigma x (l-x) y}{J} - B \sum_0^m \frac{\sigma x (l-x)}{J} \right], \qquad 20)$$

$$M = M' = \frac{u}{2(AC - B^2)} \left[B \sum_0^m \frac{\sigma x (l-x) y}{J} - C \sum_0^m \frac{\sigma x (l-x)}{J} \right]. \qquad 21)$$

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a hat man in 12)—14) nach 5) $S = P(l-a)$, und nach 1)

von $x = 0$ bis $x = a$ $\qquad S_x = 0,$

„ $x = a$ „ $x = l$ $\qquad S_x = P(x-a),$

womit wir zunächst erhalten:

$$H = \frac{1}{2} \frac{P}{AC - B^2} \sum_a^l \frac{\sigma (x-a)}{J} (B - Ay), \qquad 22)$$

$$M + M' + P(l-a) = \frac{P}{AC - B^2} \sum_a^l \frac{\sigma (x-a)}{J} (C - By), \qquad 23)$$

$$M - M' - P(l-a) = \frac{Pl}{2D - Al^2} \sum_a^l \frac{\sigma (x-a)}{J} (l - 2x). \qquad 24)$$

Hierfür können wir auch schreiben:

$$H = \frac{1}{2} \frac{P}{AC - B^2} \left[\sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (B - Ay) - a \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (B - Ay) \right], \qquad 25)$$

$$M + M' + P(l-a) = \frac{P}{AC - B^2} \left[\sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (C - By) - a \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (C - By) \right], \qquad 26)$$

$$M - M' - P(l-a) = \frac{Pl}{2D - Al^2} \left[\sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (l - 2x) - a \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (l - 2x) \right]. \qquad 27)$$

Weiter erhält man bei beliebigem a in 25):

$$\sum_a^l \frac{\sigma x}{J}(B - Ay) = \sum_0^l \frac{\sigma x}{J}(B - Ay) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(B - Ay) =$$

$$\sum_0^m \frac{\sigma x}{J}(B - Ay) + \sum_0^m \frac{\sigma(l-x)}{J}(B - Ay) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(B - Ay)$$

$$= lB\sum_0^m \frac{\sigma}{J} - lA\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(B - Ay)$$

$$= - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(B - Ay),$$

$$\sum_a^l \frac{\sigma}{J}(B - Ay) = \sum_0^l \frac{\sigma}{J}(B - Ay) - \sum_0^a \frac{\sigma}{J}(B - Ay) =$$

$$2\sum_0^m \frac{\sigma}{J}(B - Ay) - \sum_0^a \frac{\sigma}{J}(B - Ay) = 2B\sum_0^m \frac{\sigma}{J} - 2A\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} -$$

$$\sum_0^a \frac{\sigma}{J}(B - Ay) = - \sum_0^a \frac{\sigma}{J}(B - Ay),$$

und in analoger Weise in 26):

$$\sum_a^l \frac{\sigma x}{J}(C - By) = l(AC - B^2) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(C - By),$$

$$\sum_a^l \frac{\sigma}{J}(C - By) = 2(AC - B^2) - \sum_0^a \frac{\sigma}{J}(C - By),$$

sowie in 27):

$$\sum_a^l \frac{\sigma x}{J}(l - 2x) = Al^2 - 2D - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(l - 2x),$$

$$\sum_a^l \frac{\sigma}{J}(l - 2x) = - \sum_0^a \frac{\sigma}{J}(l - 2x).$$

Die Gleichungen 25)—27) für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a nehmen damit folgende Formen an:

$$H = \frac{1}{2}\frac{P}{AC - B^2}\left[a\sum_0^a \frac{\sigma}{J}(B - Ay) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(B - Ay)\right], \tag{28}$$

$$M + M' + Pa = \frac{P}{AC - B^2}\left[a\sum_0^a \frac{\sigma}{J}(C - By) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(C - By)\right], \tag{29}$$

$$M - M' + Pa = \frac{Pl}{2D - Al^2}\left[a\sum_0^a \frac{\sigma}{J}(l - 2x) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J}(l - 2x)\right]. \tag{30}$$

Die Summen Σ in den Klammern kann man wieder nach Bedürfniss zerfällen oder vereinigen. In letzterem Falle erhält man:

$$H = \frac{1}{2}\frac{P}{AC - B^2}\sum_0^a \frac{\sigma(a-x)}{J}(B - Ay), \tag{31}$$

$$M + M' + Pa = \frac{P}{AC - B^2}\sum_0^a \frac{\sigma(a-x)}{J}(C - By), \tag{32}$$

$$M - M' + Pa = \frac{Pl}{2D - Al^2}\sum_0^a \frac{\sigma(a-x)}{J}(l - 2x). \tag{33}$$

Die Gleichungen 22)—33) ergeben natürlich für $a = 0$ und $a = l$ $H = 0$, $M = M' = 0$, und beispielsweise für eine in der Trägermitte angreifende Last P mit $a = \frac{l}{2} = m$ bei Beachtung von 7) 8):

$$H = \frac{P}{2(AC - B^2)} \left(A \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - B \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} \right), \tag{24}$$

$$M = M' = \frac{P}{2(AC - B^2)} \left(B \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - C \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} \right). \tag{35}$$

Temperaturänderungen.

Für eine beliebige Temperaturänderung τ (bei Zunahme τ positiv) des Bogens ergeben die Gleichungen 9) 10) mit $S = S_x = 0$, $\Delta l = \Delta k = 0$, $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_1 = 0$:

$$H = \frac{AEl}{AC - B^2} \frac{\alpha \tau}{2} \tag{36}$$

$$M = M' = \frac{BEl}{AC - B^2} \frac{\alpha \tau}{2} = \frac{B}{A} H. \tag{37}$$

Bewegungen der Kämpfer.

Für irgendwelche kleine Bewegungen der Bogenenden ohne Abheben der Endquerschnitte von den Kämpfern folgen aus 9)—11) mit $S = S_x = 0$ und $\tau = 0$:

$$H = -\frac{A \Delta l + B(\Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1)}{AC - B^2} \frac{E}{2}, \tag{38}$$

$$M + M' = -\frac{B \Delta l + C(\Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1)}{AC - B^2} E, \tag{39}$$

$$M - M' = \frac{2 \Delta k - l(\Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_1)}{2D - Al^2} E. \tag{40}$$

Wenn jedoch nur eine Aenderung Δl der Spannweite (für Zunahme Δl positiv), keine Höhenänderung der Stützen und keine Verdrehungen der Endquerschnitte stattgefunden haben, oder doch nur solche, für welche (vergl. S. 193):

$$\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_1 = \frac{\Delta k}{l},$$

dann sind einfacher ausgedrückt:

$$H = -\frac{A}{AC - B^2} \frac{E \Delta l}{2}, \tag{41}$$

$$M = M' = -\frac{B}{AC - B^2} \frac{E \Delta l}{2} = \frac{B}{A} H. \tag{42}$$

Die in diesem § zugelassene Vernachlässigung von W_x, d. h. von X_2, Y_2, Z_2 in § 26, welche sich in § 32 für die Berechnung des Horizontalschubs H gewisser Zweigelenkbogen als zulässig erwiesen hat, entspricht der Vernachlässigung von ε bei Parabelbogen (vergl. §§ 28, 36).

§ 35. Genauere Formeln zur Berechnung des Horizontalschubs und der Endmomente des Bogens ohne Gelenke mit beliebiger symmetrischer Axe und beliebigen Querschnitten.

Im Folgenden soll von den im worigen § zugelassenen Vernachlässigungen abgesehen werden. Nach § 33), 3)—5) hat man für $x = l$ mit $y = k = 0$:

$$\Delta l = \alpha \tau l + \frac{1}{E}\sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} M_x - W\frac{r-f}{rE},$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_1 - \frac{1}{E}\sum_0^1 \frac{\sigma x}{J} M_x - W\frac{l}{2rE},$$

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{E}\sum_0^1 \frac{\sigma}{J} M_x + W\frac{1}{rE},$$

worin

$$W = \sum_0^1 \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{\sigma}{F},$$

Substituiren wir in diese Gleichungen entsprechend § 17, 4) 5) 6):

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a),$$

$$N_x = V_x \sin\varphi + H\cos\varphi = \left(V - \sum_0^x P\right)\frac{\eta}{\sigma} + H\frac{\lambda}{\sigma},$$

so folgen mit den bereits in § 31 angewandten Bezeichnungen:

$$P_x = \sum_0^x P, \qquad S_x = \sum_0^x P(x-a) \tag{1}$$

für beliebige Belastungen, eine beliebige Temperaturänderung τ und beliebige kleine Bewegungen der Stützen (selbstverständlich ohne Abheben der Endquerschnitte von den Kämpfern):

$$E\Delta l = El\alpha\tau + M\sum_0^1\frac{\sigma y}{J} + V\sum_0^1\frac{\sigma xy}{J} - H\sum_0^1\frac{\sigma y^2}{J} - \sum_0^1\frac{\sigma y}{J}S_x - W\frac{r-f}{r}, \tag{2}$$

$$E\Delta k = El\Delta\varphi_1 - M\sum_0^1\frac{\sigma x}{J} - V\sum_0^1\frac{\sigma x^2}{J} + H\sum_0^1\frac{\sigma xy}{J} + \sum_0^1\frac{\sigma x}{J}S_x - W\frac{l}{2r}, \tag{3}$$

$$E\Delta\varphi_1 = E\Delta\varphi_0 + M\sum_0^1\frac{\sigma}{J} + V\sum_0^1\frac{\sigma x}{J} - H\sum_0^1\frac{\sigma y}{J} - \sum_0^1\frac{\sigma}{J}S_x + W\frac{1}{r}, \tag{4}$$

mit

$$W = V\sum_0^1\frac{\eta}{F} + \frac{V}{r}\sum_0^1\frac{\sigma x}{F} + H\sum_0^1\frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r}\sum_0^1\frac{\sigma y}{J} + \frac{M}{r}\sum_0^1\frac{\sigma}{F} - \sum_0^1\frac{\eta}{F}P_x - \frac{1}{r}\sum_0^1\frac{\sigma}{E}S_x. \tag{5}$$

Die Gleichungen 2)—4) liefern H, V, M, womit wegen

$$V = \frac{1}{l}(M' - M + S) \qquad \text{mit } S = \sum_0^1 P(l-a) \qquad 6)$$

auch M' bestimmt ist. Für $M' = M$, also beispielsweise für den Einfluss symmetrischer Belastungen, einer Temperaturänderung τ und einer Aenderung Δl der Spannweite genügen die Gleichungen 2) 3). Wenn die Endquerschnitte unwandelbar festliegen, hat man in 2)—4):

$$\Delta l = 0, \qquad \Delta k = 0, \qquad \Delta \varphi_1 = 0, \qquad \Delta \varphi_0 = 0. \qquad 7)$$

Soll jedoch der Einfluss irgendwelcher Aenderungen von l, k, φ_0, φ_1 ermittelt werden, dann sind die betreffenden Werthe von Δl, Δk, $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_1$ einzusetzen (§ 26).

Im Weiteren wollen wir wieder voraussetzen, dass nicht nur die Bogenaxe, sondern die ganze Anordung des Bogens einschliesslich der Feldertheilung zur Bogenmitte symmetrisch ist. Dann treten die zu Beginn des § 32 erwähnten Vereinfachungen ein, wonach wir mit den Bezeichnungen § 34, 7) 8) und

$$W = 2H\sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{2H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M + M' + S}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F} - \sum_0^1 \frac{\eta}{F} P_x - \frac{1}{r}\sum_0^1 \frac{\sigma}{F} S_x \qquad 8)$$

aus 2) 4) erhalten:

$$E\Delta l = (M + M' + S)B - 2HC - \sum_0^1 \frac{\sigma y}{J} S_x - \frac{W}{r}(r-f) + E l \alpha \tau, \quad 9)$$

$$E\Delta \varphi_1 = (M + M' + S)A - 2HB - \sum_0^1 \frac{\sigma}{J} S_x + \frac{W}{r} + E\Delta\varphi_0, \qquad 10)$$

während durch Addition der mit l multiplicirten Gleichung 4) zu der mit 2 multiplicirten Gleichung 3) folgt:

$$E(2\Delta k - \Delta\varphi_0 - l\Delta\varphi_1) = (M - M' - S)(2D - A l^2) - l\sum_0^1 \frac{\sigma}{J}(l - 2x) S_x. \qquad 11)$$

Aus den Gleichungen 9)—11) können H, M, M' für alle Fälle berechnet werden, während für $M' = M$ die Gleichungen 9) 10) genügen.

Wenn ausser einer Aenderung Δl der Spannweite keine Bewegungen der Stützen oder doch nur solche eintreten, für welche

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_1 = \frac{\Delta k}{l}$$

ist, dann fallen Δk, $\Delta\varphi_1$ aus den Gleichungen 10) 11), wonach die erwähnten Aenderungen keinen Einfluss auf H, M, M' ausüben, wie sich dies schon beim Parabelbogen ergab (S. 102, vergl. S. 193).

Verschiedene Belastungen.

Aus 9)—11) ergeben sich für eine beliebige Belastung allein mit $\tau = 0$, $\Delta l = \Delta k = 0$, $\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_1 = 0$:

$$(M + M' + S)\,B - 2\,H\,C - \sum_0^l \frac{\sigma\,y}{J}\,S_x - \frac{W}{r}\,(r-f) = 0, \qquad 12)$$

$$(M + M' + S)\,A - 2\,H\,B - \sum_0^l \frac{\sigma}{J}\,S_x + \frac{W}{r} = 0, \qquad 13)$$

$$(M - M' - S)\,(2\,D - A\,l^2) - l\sum_0^l \frac{\sigma}{J}\,(l-2\,x)\,S_x = 0, \qquad 14)$$

worin W durch 8) bestimmt. Speziell für eine beliebige symmetrische Belastung ergeben sich bei Beachtung von $M' = M$ und des im vorigen § (S. 235) bezüglich der S_x Gesagten, sowie der Bezeichnungen § 34, 7):

$$M\,B - H\,C + \sum_0^m \frac{\sigma\,y}{J}\left(\frac{x}{l}\,S - S_x\right) - \frac{W}{2\,r}\,(r-f) = 0, \qquad 15)$$

$$M\,A - H\,B + \sum_0^m \frac{\sigma}{J}\left(\frac{x}{l}\,S - S_x\right) + \frac{W}{2\,r} = 0, \qquad 16)$$

worin nach 8), da für zwei symmetrisch zur Mitte bei x, x' gelegene Felder $\eta' = -\eta$ und $P'_x - P_x = 2\sum_x^m P = 2\,V_x$ ist:

$$\frac{W}{2} = H\sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma\,y}{F} + \frac{M}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F} + \sum_0^m \frac{\eta}{F}\,V_x + \frac{1}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F}\left(\frac{x}{l}\,S - S_x\right). \qquad 17)$$

Wie im vorigen § bei symmetrischer Belastung kann in 15)—17)

$$\frac{S}{l} = V, \qquad \frac{x}{l}\,S - S_x = \sum_0^x P\,a + x\,V_x \quad \text{mit} \quad V_x = \sum_x^m P \qquad 18)$$

gesetzt werden.

Aus 15) 16) ergeben sich beispielsweise für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit mit den im vorigen § (S. 236) für diesen Fall verwendeten S, S_x:

$$M\,B - H\,C + \frac{u}{2}\sum_0^m \frac{\sigma\,x\,(l-x)\,y}{J} - \frac{W}{2\,r}\,(r-f) = 0, \qquad 19)$$

$$M\,A - H\,B + \frac{u}{2}\sum_0^m \frac{\sigma\,x\,(l-x)}{J} + \frac{W}{2\,r} = 0, \qquad 20)$$

worin nach 17) mit $V_x = u\,(m-x)$:

$$\frac{W}{2} = H\sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma\,y}{F} + \frac{M}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F} + u\sum_0^m \frac{\eta\,(m-x)}{F} + \frac{u}{2\,r}\sum_0^m \frac{\sigma\,x\,(l-x)}{F}. \qquad 21)$$

Die Werthe von S_x, P_x für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten von u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte sind in § 32 angeführt (S. 215).

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a hat man in 12)—14) und 8)—11) neben $S = P\,(l-a)$:

von $x = 0$ bis $x = a$	$S_x = 0$,	$P_x = 0$,
„ $x = a$ „ $x = l$	$S_x = P\,(x-a)$,	$P_x = P$,

womit nach 12)—14) für die von P allein herrührenden H, M, M':

$$\left(M + M' + P(l-a)\right) B - 2\,H\,C - P\left(\sum_a^l \frac{\sigma\, x\, y}{J} - a \sum_a^l \frac{\sigma\, y}{J}\right) -$$
$$\frac{W}{2\,r}(r-f) = 0, \qquad 22)$$

$$\left(M + M' + P(l-a)\right) A - 2\,H\,B - P\left(\sum_a^l \frac{\sigma\, x}{J} - a \sum_a^l \frac{\sigma}{J}\right) + \frac{W}{2\,r} = 0, \qquad 23)$$

$$\left(M - M' - P(l-a)\right)\left(\frac{2\,D}{l} - A\,l\right) + P\left(\sum_a^l \frac{\sigma\, x\,(2\,x-l)}{J} -\right.$$
$$\left. a \sum_a^l \frac{\sigma\,(2\,x-l)}{J}\right) = 0. \qquad 24)$$

W ist nach 8) bestimmt durch

$$W r = 2\,H\left(r \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \sum_0^m \frac{\sigma\, y}{F}\right) + (M + M') \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - P\left(r \sum_a^l \frac{\eta}{F} -\right.$$
$$\left.\sum_a^l \frac{\sigma\,(l-x)}{F} - (l-a) \sum_0^m \frac{\sigma}{F} + (l-a) \sum_a^l \frac{\sigma}{F}\right), \qquad 25)$$

worin im Falle $a > m$:

$$(l-a) \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - (l-a) \sum_a^l \frac{\sigma}{F} = (l-a) \sum_m^a \frac{\sigma}{F}. \qquad 26)$$

Die Gleichungen 22)—25) gelten zwar für beliebige a, würden aber besonders für $a > m$ zu verwenden sein, während sich für $a < m$ wie folgt bequemere Formeln ableiten lassen.

Mit Rücksicht auf die vollständige Symmetrie des Trägers und die Bezeichnungen § 34, 7) 8) hat man in 22)—25):

$$\sum_a^l \frac{\sigma\, x\, y}{J} = \sum_0^l \frac{\sigma\, x\, y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma\, x\, y}{J} = \sum_0^m \frac{\sigma\, x\, y}{J} + \sum_0^m \frac{\sigma\,(l-x)\, y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma\, x\, y}{J}$$
$$= l \sum_0^m \frac{\sigma\, y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma\, x\, y}{J} = B\,l - \sum_0^a \frac{\sigma\, x\, y}{J},$$

und in analoger Weise (vergl. auch § 34, S. 137):

$$\sum_a^l \frac{\sigma\, y}{J} = 2\,B - \sum_0^a \frac{\sigma\, y}{J}, \qquad \sum_a^l \frac{\sigma\, x}{J} = A\,l - \sum_0^a \frac{\sigma\, x}{J},$$

$$\sum_a^l \frac{\sigma}{J} = 2\,A - \sum_0^a \frac{\sigma}{J}, \qquad \sum_a^l \frac{\sigma\, x\,(2\,x-l)}{J} = 2\,D - A\,l^2 - \sum_0^a \frac{\sigma\, x\,(2\,x-l)}{J},$$

$$\sum_a^l \frac{\sigma\,(2\,x-l)}{J} = -\sum_0^a \frac{\sigma\,(2\,x-l)}{J}, \qquad \sum_a^l \frac{\eta}{F} = -\sum_0^a \frac{\eta}{F},$$

$$\sum_a^l \frac{\sigma\, x}{F} = l \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - \sum_0^a \frac{\sigma\, x}{F}, \qquad \sum_a^l \frac{\sigma}{F} = 2 \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - \sum_0^a \frac{\sigma}{F}.$$

Mit diesen Ausdrücken folgen aus 22)—24) für die H, M, M' durch eine Einzellast P:

$$(M+M'+Pa)\,B-2\,H\,C+P\Big(\sum_0^s\frac{\sigma\,x\,y}{J}-a\sum_0^s\frac{\sigma\,y}{J}\Big)-\frac{W}{2\,r}(r-f)=0, \qquad 27)$$

$$(M+M'+Pa)\,A-2\,H\,B+P\Big(\sum_0^s\frac{\sigma\,x}{J}-a\sum_0^s\frac{\sigma}{J}\Big)+\frac{W}{2\,r}=0, \qquad 28)$$

$$(M-M'+Pa)\Big(\frac{2\,D}{l}-A\,l\Big)+P\Big(\sum_0^s\frac{\sigma\,x\,(l-2\,x)}{J}-$$
$$a\sum_0^s\frac{\sigma\,(l-2\,x)}{J}\Big)=0, \qquad 29)$$

und zur Bestimmung von W nach 25):

$$W\,r=2\,H\Big(r\sum_0^m\frac{\lambda}{F}-\sum_0^m\frac{\sigma\,y}{F}\Big)+(M+M')\sum_0^m\frac{\sigma}{F}+P\Big(r\sum_0^s\frac{\eta}{F}+$$
$$\sum_0^s\frac{\sigma\,x}{F}+a\sum_0^m\frac{\sigma}{F}-a\sum_0^s\frac{\sigma}{F}. \qquad 30)$$

Diese ebenfalls für beliebige a geltenden Gleichungen sind für $a < m$ bequemer als 22)—25) und man hat in diesem Falle in 30):

$$a\sum_0^m\frac{\sigma}{F}-a\sum_0^s\frac{\sigma}{F}=a\sum_s^m\frac{\sigma}{F}. \qquad 31)$$

Temperaturänderungen.

Für eine beliebige Temperaturänderung τ folgen aus 9) 10) mit $S=S_x=0$, $\Delta\,l=\Delta\,k=0$, $\Delta\,\varphi_0=\Delta\,\varphi_1=0$ zur Bestimmung von H und $M=M'$:

$$M\,B-H\,C-\frac{W}{2\,r}(r-f)+E\,m\,\alpha\,\tau=0, \qquad 32)$$

$$M\,A-H\,B+\frac{W}{2\,r}=0, \qquad 33)$$

worin nach 8):

$$\frac{W}{2}=H\sum_0^m\frac{\lambda}{F}-\frac{H}{r}\sum_0^m\frac{\sigma\,y}{F}+\frac{M}{r}\sum_0^m\frac{\sigma}{F}. \qquad 34)$$

Bewegungen der Kämpfer.

Für beliebige kleine Bewegungen der Kämpfer, bei welchen jedoch die Endquerschitte vollständig mit den Kämpfern in Berührung bleiben müssen, hat man aus 9)—11) mit $S=S_x=0$ für H, M, M':

$$E\,\Delta\,l=(M+M')\,B-2\,H\,C-\frac{W}{r}(r-f), \qquad 35)$$

$$E\,(\Delta\,\varphi_1-\Delta\,\varphi_0)=(M+M')\,A-2\,H\,B+\frac{W}{r}, \qquad 36)$$

$$E\Big(2\,\frac{\Delta\,k}{l}-\Delta\,\varphi_0-\Delta\,\varphi_1\Big)=(M-M')\Big(2\,\frac{D}{l}-A\,l\Big), \qquad 37)$$

worin nach 8):

$$W = 2H\sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{2H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M+M'}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F}. \qquad 38)$$

Wenn jedoch nur eine Aenderung Δl der Spannweite, keine Aenderung der Stützhöhen und keine Verdrehungen der Endquerschnitte entstanden sind, oder doch nur solche, für welche

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_1 = \frac{\Delta k}{l},$$

dann hat man zur Bestimmung von H und $M = M'$ nach 35) 36):

$$MB - HC - \frac{W}{2r}(r-f) - \frac{E\Delta l}{2} = 0, \qquad 39)$$

$$MA - HB + \frac{W}{2r} = 0, \qquad 40)$$

worin W durch 34) ausgedrückt.

Beispiel 43. Genauere Berechnung der Stützenreaktionen eines Bogens von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe). Für das vom Gewölbeausschuss des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins erprobte Bruchsteingewölbe von $l = 2m = 23{,}758$ m Spannweite und $f = 4{,}502$ m Pfeil der Axe (vergl. Beisp. 33, S. 133) sollen der Horizontalschub H und die Endmomente M, M' nach den genaueren Formeln für symmetrische Bogen ohne Gelenke mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (§ 35) berechnet und auch die Vertikalreaktionen V, V' der Kämpfer beigefügt werden: *a*) für das Eigengewicht des Gewölbebogens; *b*) für eine einseitige Belastung bis zur Bogenmitte durch beliebige Lasten P bei $a = 2{,}879$ m, 5,129 m 7,379 m, 9,629 m und halb so grosse Lasten bei $a = 0{,}629$ m, 11,879 m, wie sie bei der Probebelastung angebracht waren; *c*) für eine bezüglich der Bogenmitte

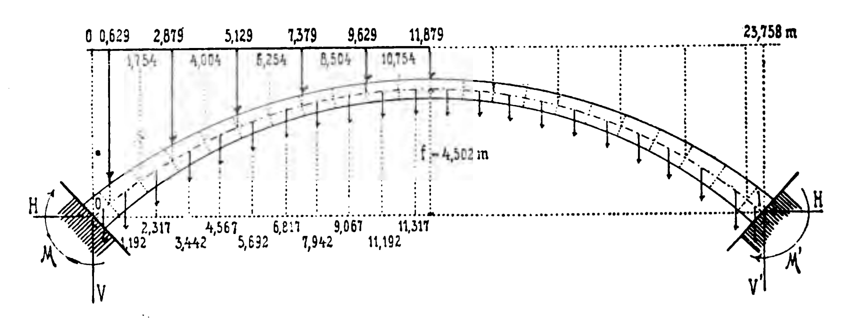


Fig. 141

symmetrisch hiezu gelegene Belastung auf der zweiten Bogenhälfte und für diejenige symmetrische Belastung, welche durch Zusammenwirken der beiden letzterwähnten Belastungen entsteht; *d*) für eine Temperaturänderung τ; *e*) für eine Aenderung Δl der Spannweite ohne Aenderung der relativen Höhenlage der Kämpfer und ohne Verdrehungen der Endquerschnitte, oder doch nur solche, für welche $\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_1 = \frac{\Delta k}{l}$ ist.

Wir verfahren zunächst ganz wie einleitend zu Beisp. 33 angegeben, doch kommen jetzt für die Berechnung der H, M, M' anstatt der Formeln des § 34

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle XIII.

Feld	λ	η	σ	F	$\frac{\lambda}{F}$	$\frac{\eta}{F}$	$\frac{\sigma}{F}$	$\frac{\sigma x}{F}$	$\frac{\sigma y}{F}$	$\frac{\eta x}{F}$	$\frac{\eta}{F} V_x$	$\frac{\sigma}{F}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right)$
0	0,629	0,531	0,825	1,071	0,587	0,496	0,770	0,242	0,209	0,158	11951	5826
1	1,125	0,837	1,403	0,992	1,134	0,844	1,414	1,685	1,367	1,006	18549	37984
2	1,125	0,709	1,327	0,910	1,236	0,779	1,458	3,378	2,534	1,805	14520	69739
3	1,125	0,602	1,278	0,838	1,342	0,718	1,525	5,249	3,648	2,471	11302	99950
4	1,125	0,503	1,233	0,775	1,452	0,649	1,578	7,207	4,644	2,964	8547	126802
5	1,125	0,414	1,199	0,722	1,558	0,573	1,661	9,454	5,647	3,262	6231	153792
6	1,125	0,332	1,172	0,683	1,647	0,486	1,716	11,698	6,473	3,313	4273	175859
7	1,125	0,253	1,154	0,656	1,715	0,386	1,759	13,970	7,149	3,066	2652	193861
8	1,125	0,179	1,140	0,635	1,772	0,282	1,795	16,275	7,683	2,557	1425	208030
9	1,125	0,107	1,129	0,618	1,820	0,173	1,827	18,621	8,079	1,763	573	218549
10	1,125	0,035	1,127	0,605	1,859	0,058	1,863	21,084	8,370	0,656	95	226287
Sa.	11,879	4,502	12,987		16,122	5,444	17,366	108,863	55,803	23,021	80118	1516679
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

diejenigen des § 35 zur Verwendung. In Tabelle XIII sind aus den in Tabelle V jenes Beispiels (S. 141) gegebenen x, y an den Feldergrenzen der ersten Trägerhälfte zunächst die Horizontalprojektionen λ und Vertikalprojektionen η der Axlängen σ jener Felder angeführt, also beispielsweise

für Feld 0 $\quad \lambda = 0{,}629$ m, $\quad \eta = 0{,}531$ m,
„ „ 1 $\quad \lambda = 1{,}754 - 0{,}629 = 1{,}125$ m, $\quad \eta = 1{,}368 - 0{,}531 = 0{,}837$ m.
„ „ 2 $\quad \lambda = 2{,}879 - 1{,}754 = 1{,}125$ m, $\quad \eta = 2{,}077 - 1{,}368 = 0{,}709$ m,

wonach sich mit Hülfe der aus Tabelle II desselben Beispiels (S. 135) entnommenen Querschnitte $F = h$ und Koordinaten x, y in den Feldermitten die Werthe der Kolumnen 6—11 ergaben.

a) Eigengewicht.

Für eine beliebige symmetrische Belastung hat man nach § 35, 15) 16):

$$M B - H C + \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right) - \frac{W}{2r}(r - f) = 0, \tag{1}$$

$$M A - H B + \sum_0^m \frac{\sigma}{J}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right) + \frac{W}{2r} = 0, \tag{2}$$

worin nach § 35, 17):

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F} + \sum_0^m \frac{\eta}{F} V_x + \frac{1}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F}\left(\frac{x}{l} S - S_x\right). \tag{3}$$

V_x und $\frac{x}{l} S - S_x$ für Eigengewicht sind bereits in Beisp. 33 ermittelt und in der dortigen Tabelle III eingetragen. Damit folgen die Werthe in Kolumne 12 und 13 der obigen Tabelle. Die Gleichungen 1) 2) ergeben mit Rücksicht auf die Tabellen II und III des Beispiels 33 und $r = 17{,}923$ m (s. Bemerk. S. 140):

$$1464{,}16\, M - 5718{,}93\, H + 155081280 - \frac{W}{17{,}923}\, 13{,}421 = 0,$$

$$407{,}60\, M - 1464{,}16\, H + 39741790 + \frac{W}{17{,}923} = 0,$$

Bei Vernachlässigung von W würden diese Gleichungen die in Beisp. 33 unter *a*) gefundenen Werthe von H, M liefern. Nach 3) ist

$$\frac{W}{2} = H.16{,}122 - H\frac{55{,}803}{17{,}923} + M\frac{17{,}366}{17{,}923} + 80118 + \frac{1516679}{17{,}923}$$
$$= 164740 + 13{,}009\,H + 0{,}969\,M.$$

Damit gehen die beiden vorhergehenden Gleichungen über in die folgenden:

$$1463{,}43\,M - 5728{,}67\,H + 154957821 = 0,$$
$$407{,}65\,M - 1463{,}43\,H + 39750986 = 0,$$

woraus:

$$H = 25796 \text{ kg}, \qquad M = -4902 \text{ mk}.$$

Die in Beisp. 33 erhaltenen Werthe 26821 und — 1157 weichen gegen vorstehende genauere um 3,97 % und 76,40 % ab. Wie in Beisp. 33 sind die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V = V' = \sum_0^m P = 24095 \text{ kg}.$$

b) Einseitige Belastung von 0 bis *m*.

Nach § 35, 12)—14) hat man für eine beliebige Belastung zur Bestimmung von H, M, M':

$$(M + M' + S)\,B - 2\,H\,C - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x - \frac{W}{r}(r - f) = 0, \tag{4}$$

$$(M + M' + S)\,A - 2\,H\,B - \sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x + \frac{W}{r} = 0, \tag{5}$$

$$(M - M' - S)\left(\frac{D}{l} - \frac{A\,l}{2}\right) - \sum_0^m \frac{\sigma}{J}(m - x)\,S_x = 0, \tag{6}$$

worin nach § 35, 8):

$$W = 2\,H\sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{2\,H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M + M' + S}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F} - \sum_0^l \frac{\eta}{F} P_x \quad \frac{1}{r}\sum_0^l \frac{\sigma}{F} S_x, \tag{7}$$

und nach § 35, 1) 6):

$$P_x = \sum_0^x P, \qquad S_x = \sum_0^x P(x - a) = x\,P_x - \sum_0^x P\,a, \tag{8}$$

$$S = \sum_0^l P(l - a) = l\,P_l - \sum_0^l P\,a. \tag{9}$$

Mit Rücksicht auf die in den zwei ersten Kolumnen der folgenden Tabelle XIV angeführten a, P und der Abscissen x der Feldermitten in Kolumne 4 ergeben sich nach 8) für Feld 1 mit $x = 1{,}192$ m:

$$P_x = \frac{P}{2}, \qquad \sum_0^x P\,a = \frac{P}{2}\,0{,}629 = 0{,}3145\,P,$$
$$S_x = 1{,}192\,\frac{P}{2} - 0{,}3145\,P = 0{,}2815\,P;$$

für Feld 2 mit $x = 2{,}317$ m:

$$P_x = \frac{P}{2}, \qquad \sum_0^x P\,a = 0{,}3145\,P,$$
$$S_x = 2{,}317\,\frac{P}{2} - 0{,}3145\,P = 0{,}8440\,P;$$

für Feld 3 mit $x = 3{,}442$ m:

$$P_x = \frac{3\,P}{2}, \qquad \sum_0^x P\,a = 0{,}3145\,P + 2{,}879\,P = 3{,}1935\,P,$$
$$S_x = 3{,}442\,\frac{3\,P}{2} - 3{,}1935\,P = 1{,}9695\,P;$$

für Feld 4 mit $x = 4{,}567$ m:

$$P_x = \frac{3P}{2}, \qquad \sum_0^x Pa = 3{,}1935\,P,$$

$$S_x = 4{,}567\,\frac{3P}{2} - 3{,}1935\,P = 3{,}6570\,P;$$

für Feld 5 mit $x = 5{,}692$:

$$P_x = \frac{5P}{2}, \qquad \sum_0^x Pa = 3{,}1935\,P + 5{,}129\,P = 8{,}3225\,P,$$

$$S_x = 5{,}692\,\frac{5P}{2} - 8{,}3225\,P = 5{,}9075\,P.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 6 bis 8 von Tabelle XIV (S. 248) berechnet, worauf sich diejenigen der Kolumne 9 durch Multiplikation der Werthe in Kolumne 8 mit den in Tabelle II (S. 135) des Beispiels 33 angeführten $\frac{\sigma}{J}$, die Werthe der Kolumnen 10 und 11 durch Multiplikation der Werthe in Kolumne 9 mit den x, y derselben Tabelle des Beisp. 33, diejenigen in Kolumne 12 durch Multiplikation der Werthe in Kolumne 9 mit $m-x$, und diejenigen der Kolumnen 13 und 14 durch Multiplikation der Werthe in Kolumne 5 und 8 mit den aus obiger Tabelle XIII (S. 245) entnommenen $\frac{\eta}{F}$, $\frac{\sigma}{F}$ ergaben.

Man hätte für alle Felder des ganzen Trägers wie zuletzt angegeben verfahren und alsdann die in 4)—7) auftretenden Summen Σ mit S_x, P_x einfach durch Addition erhalten können. Da aber die zweite Bogenhälfte unbelastet ist, und für alle Felder derselben

$$P_x = \sum_0^l P = 5\,P, \qquad S_x = x\,P_x - \sum_0^l Pa = 5\,Px - 31{,}27\,P,$$

so kann man berücksichtigen, dass den x, y, σ, η, J, F eines Feldes auf der zweiten Trägerhälfte die $l-x$, y, σ, $-\eta$, J, F des symmetrisch dazu gelegenen Feldes auf der ersten Trägerhälfte gleich sind, wonach mit Rücksicht auf die oben erwähnten Tabellen II, XIII, XIV (S. 135, 245, 248):

$$\sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x = \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} S_x + 5\,P \sum_m^l \frac{\sigma x y}{J} - 31{,}27\,P \sum_m^l \frac{\sigma y}{J}$$
$$= \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} S_x + 5\,P \sum_0^m \frac{\sigma (l-x) y}{J} - 31{,}27\,P \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}$$
$$= 21032{,}87\,P + 5\,P\,(23{,}758 \,.\, 1464{,}16 - 11970{,}95) - 31{,}27\,P \,.\, 1464{,}16$$
$$= 89321{,}39\,P,$$

$$\sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x = \sum_0^m \frac{\sigma}{J} S_x + 5\,P \sum_m^l \frac{\sigma x}{J} - 31{,}27\,P \sum_m^l \frac{\sigma}{J}$$
$$= \sum_0^m \frac{\sigma}{J} S_x + 5\,P \sum_0^m \frac{\sigma (l-x)}{J} - 31{,}27\,P \sum_0^m \frac{\sigma}{J}$$
$$= 4992{,}68\,P + 5\,P\,(23{,}758 \,.\, 407{,}60 - 2975{,}54) - 31{,}27 \,.\, 407{,}60 = 25788{,}13\,P,$$

$$\sum_0^l \frac{\sigma (m-x)}{J} S_x = \sum_0^m \frac{\sigma (m-x)}{J} S_x + 5\,P \sum_m^l \frac{\sigma (m-x)\,x}{J} - 31{,}27\,P \sum_m^l \frac{\sigma (m-x)}{J}$$
$$= \sum_0^m \frac{\sigma (m-x)}{J} S_x - 5\,P \sum_0^m \frac{\sigma (2\,m^2 - 3\,m\,x + x^2)}{J} + 31{,}27\,P \sum_0^m \frac{\sigma (m-x)}{J}$$
$$= 12461{,}87\,P - 5\,P\,(2 \,.\, 11{,}879^2 \,.\, 407{,}60 - 3 \,.\, 11{,}879 \,.\, 2975{,}54 + 25670{,}62) + 31{,}27\,P\,(11{,}879 \,.\, 407{,}60 - 2975{,}54) = -\,102501{,}13\,P,$$

$$\sum_0^l \frac{\sigma}{F} S_x = \sum_0^m \frac{\sigma}{F} S_x + 5\,P \sum_m^l \frac{\sigma x}{F} - 31{,}27\,P \sum_m^l \frac{\sigma}{F}$$
$$= \sum_0^m \frac{\sigma}{F} S_x + 5\,P \sum_0^m \frac{\sigma (l-x)}{F} - 31{,}27\,P \sum_0^m \frac{\sigma}{F}$$
$$= 169{,}19\,P + 5\,P\,(23{,}758 \,.\, 17{,}366 - 108{,}863) - 31{,}27\,P \,.\, 17{,}366 = 1144{,}75\,P,$$

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle XIV.

a in m	P	Feld	x in m	$\frac{P_x}{P}$	$x \frac{P_x}{P}$	$\frac{1}{P} \sum_0^x P a$	$\frac{S_x}{P}$	$\frac{\sigma}{J} \frac{S_x}{P}$	$\frac{\sigma x}{J} \frac{S_x}{P}$	$\frac{\sigma y}{J} \frac{S_x}{P}$	$\frac{\sigma (m-x)}{J} \frac{S_x}{P}$	$\frac{\eta}{F} \frac{P_x}{P}$	$\frac{\sigma}{F} \frac{S_x}{P}$
0,629	$\frac{1}{2}$	0	0,314	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0
		1	1,192	$\frac{1}{2}$	0,5960	0,3145	0,2815	4,86	5,79	4,70	51,94	0,422	0,398
2,879	1	2	2,317	$\frac{1}{2}$	1,1585	0,3145	0,8440	17,83	41,31	30,99	170,49	0,389	1,231
		3	3,442	$\frac{3}{2}$	5,1630	3,1935	1,9695	51,33	176,68	122,78	433,07	1,077	3,003
5,129	1	4	4,567	$\frac{3}{2}$	6,8505	3,1935	3,6570	116,26	530,96	342,15	850,09	0,973	5,771
		5	5,692	$\frac{5}{2}$	14,2300	8,3225	5,9075	225,84	1285,48	767,86	1397,27	1,423	9,812
7,379	1	6	6,817	$\frac{5}{2}$	17,0425	8,3225	8,7200	384,90	2623,86	1451,84	1948,36	1,215	14,092
		7	7,942	$\frac{7}{2}$	27,7970	15,7015	12,0955	593,16	4710,88	2410,60	2335,27	1,351	21,276
9,629	1	8	9,067	$\frac{7}{2}$	31,7345	15,7015	16,0330	856,48	7765,70	3665,73	2408,42	0,987	28,779
		9	10,192	$\frac{9}{2}$	45,8640	25,3305	20,5335	1178,62	12012,50	5211,86	1988,33	0,778	37,515
11,879	$\frac{1}{2}$	10	11,317	$\frac{9}{2}$	50,9265	25,3305	25,5960	1563,40	17693,00	7024,36	878,63	0,261	47,313
		11 bis 21	12,442 bis 23,444	5	$5x$	31,2700	$5x-31,27$						
	5						Summe:	4992,68	46846,16	21032,87	12461,87	8,876	169,190
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

$$\overset{1}{\underset{0}{\Sigma}} \frac{\eta}{F} P_x = \overset{m}{\underset{0}{\Sigma}} \frac{\eta}{F} P_x + 5 P \overset{1}{\underset{m}{\Sigma}} \frac{\eta x}{F} - 31{,}27 P \overset{1}{\underset{m}{\Sigma}} \frac{\eta}{F}$$

$$= \overset{m}{\underset{0}{\Sigma}} \frac{\eta}{F} P_x - 5 P \overset{m}{\underset{0}{\Sigma}} \frac{\eta (l-x)}{F} + 31{,}27 P \overset{m}{\underset{0}{\Sigma}} \frac{\eta}{F}$$

$$= 8{,}876\, P - 5\, P (23758 \,.\, 5{,}441 - 23{,}021) + 31{,}27\, P \,.\, 5{,}444 = - 352{,}480\, P.$$

Mit diesen Werthen und dem aus 9) folgenden

$$S = 23{,}758 \,.\, 5\, P - 31{,}27\, P = 87{,}520\, P$$

nehmen die Gleichungen 4)—6) folgende Formen an (bezüglich 2102,63 s. S. 134):

$$(M + M' + 87{,}52\, P)\, 1464{,}16 - 2 \,.\, 5718{,}93\, H - 89321{,}39\, P - \frac{W}{17{,}923}\, 13{,}421 = 0,$$

$$(M + M' + 87{,}52\, P)\;\; 407{,}60 - 2 \,.\, 1464{,}16\, H - 25788{,}13\, P - \frac{W}{17{,}923} = 0,$$

$$(M - M' - 87{,}52\, P) \frac{2102{,}63}{2} + 102501{,}13\, P = 0.$$

Bei Vernachlässigung von W würden diese Gleichungen die in Beisp. 33 unter c) für dieselbe Belastung gefundenen H, M, M' liefern. Setzen wir jedoch nach 7):

$$W = 2\, H \,.\, 16{,}122 - 2\, H \frac{55{,}803}{17{,}923} + \frac{M + M' + 87{,}52\, P}{17{,}923}\, 17{,}366 + 352{,}480\, P -$$

$$\frac{1144{,}75}{17{,}923}\, P = 26{,}017\, H + (M + M') \frac{17{,}366}{17{,}923} - 373{,}410\, P,$$

so erhalten wir zunächst:

$$(M + M')\, 1463{,}43 - 11457{,}34\, H + 39101{,}50\, P = 0,$$
$$(M + M')\;\; 407{,}65 - \;\; 2926{,}87\, H + \;\; 9864{,}19\, P = 0,$$
$$(M - M')\, 1051{,}31 + 10490{,}04\, P = 0,$$

woraus:

$$H = 3{,}8836\, P, \qquad M = - 3{,}1460\, P, \qquad M' = 6{,}8320\, P$$

gegen welche Werthe die in Beisp. 33 erhaltenen 3,6058 P, — 4,1357 P, 5,7892 P abweichen um 7,15 %, 31,46 % und 15,26 %

Für die Vertikalreaktionen der Kämpfer hat man nach § 17, 2) 3):

$$V' = \frac{1}{l} \left[\overset{1}{\underset{0}{\Sigma}} P a + M - M' \right], \qquad V = \overset{1}{\underset{0}{\Sigma}} P - V'. \qquad 10)$$

Hierin ist nach den beiden ersten Kolumnen von Tabelle XIV (S. 248):

$$\overset{1}{\underset{0}{\Sigma}} P a = P \left(\frac{0{,}629}{2} + 2{,}879 + 5{,}129 + 7{,}379 + 9{,}629 + \frac{11{,}879}{2} \right) = 31{,}270\, P,$$

womit:

$$V' = \frac{31{,}270 - 3{,}1460 - 6{,}8320}{23{,}758}\, P = 0{,}8962\, P,$$

$$V = 5\, P - 0{,}8962\, P \qquad = 4{,}1038\, P,$$

während sich bei der weniger genauen Berechnung in Beispiel 33 0,8985 P und 4,1015 P, also um 0,26 % und 0,06 % abweichende Werthe ergaben.

Anstatt wie hier sofort für die ganze angenommene Verkehrsbelastung hätte man die H, M, M', V, V' auch wie in Beispiel 33 aus den Beiträgen der einzeln P berechnen können, wobei die Gleichungen § 35, 27)—31) nebst vorstehenden Formeln 10) mit Weglassen der Summenzeichen Σ zu verwenden gewesen wären. Dieser Weg ist besonders dann am Platze, wenn man die ungünstigsten Belastungen entsprechend §§ 10, 11 möglichst genau feststellen und zu diesem Zwecke auch die Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke genauer als nach den Formeln für Parabelbogen oder nach § 34 bestimmen will, was ganz wie in Beisp. 1 (S. 12) zu geschehen hätte.

c) Weitere Verkehrsbelastungen.

Ist die zweite Bogenhälfte so belastet, wie unter *b)* für die erste angenommen wurde, so ergeben sich mit Rücksicht auf die dort erhaltenen Werthe:

$$H = 3{,}8836\,P,$$
$$M = 6{,}8320\,P, \qquad M' = -\,3{,}1460\,P,$$
$$V = 0{,}8962\,P, \qquad V' = 4{,}1038\,P.$$

Wirken gleichzeitig die soeben und die unter *b)* angenommenen Lasten, so gelten für die resultirende symmetrische Belastung:

$$H = 2\,.\,3{,}8836\,P = 7{,}7672\,P,$$
$$M = M' = -\,3{,}1460\,P + 6{,}8320\,P = 3{,}6860\,P,$$
$$V = V' = 4{,}1038\,P + 0{,}8962\,P = 5\,P,$$

gegen welche Werthe die in Beisp. 33 für die gleiche Belastung erhaltenen 7,2112 P, 1,6535 P und 5 P um 7,16%, 55,14% und 0% abweichen.

d) Temperaturänderungen.

Für eine beliebige Temperaturänderung τ hat man neben $V = V' = 0$ nach § 35, 32) 33):

$$M\,B - H\,C - \frac{W}{2\,r}\,(r - f) + m\,E\,\alpha\,\tau = 0, \tag{11}$$

$$M\,A - H\,B + \frac{W}{2\,r} = 0, \tag{12}$$

worin zufolge § 35, 34):

$$\frac{W}{2} = H\sum_0^m \frac{\eta}{F} - \frac{H}{r}\sum_0^m \frac{\sigma\,y}{F} + \frac{M}{r}\sum_0^m \frac{\sigma}{F}. \tag{13}$$

Mit Rücksicht auf die bereits mehrfach verwendeten Werthe nehmen 11) 12) die Formen an:

$$1464{,}16\,M - 5718{,}93\,H - \frac{W}{17{,}923}\,13{,}421 + 11{,}879\,E\,\alpha\,\tau = 0,$$

$$407{,}60\,M - 1464{,}16\,M + \frac{W}{17{,}923} = 0.$$

Bei Vernachlässigung von W liefern diese Gleichungen die in Beisp. 33 unter *d)* erhaltenen H, M, während sie jetzt mit

$$\frac{W}{2} = H\,.\,16{,}122 - H\,\frac{55{,}803}{17{,}923} + M\,\frac{17{,}366}{17{,}923} = 13{,}009\,H + 0{,}969\,M$$

zunächst in die folgenden übergehen:

$$1463{,}43\,M - 5728{,}67\,H + 11{,}879\,E\,\alpha\,\tau = 0,$$
$$407{,}65\,M - 1463{,}43\,H = 0,$$

woraus:

$$H = \frac{E\,\alpha\,\tau}{39{,}993}, \qquad M = M' = 3{,}5899\,H = \frac{E\,\alpha\,\tau}{11{,}140}.$$

Die in Beispiel 33 gefundenen Werthe, mit 38,677 und 10,767 in den Nennern, sind um 3,40% une 3,46% grösser.

e) Bewegungen der Kämpfer.

Für eine beliebige kleine Aenderung $\Delta\,l$ der Spannweite, ohne andere als die in der Aufgabenstellung zugelassenen Bewegungen der Kämpfer hat man nach § 35, 39) 40) neben $V = V' = 0$:

$$M\,B - H\,C - \frac{W}{2\,r}\,(r - f) - \frac{E}{2}\,\Delta\,l = 0, \tag{14}$$

$$M\,A - H\,B + \frac{W}{2\,r} = 0, \tag{15}$$

worin W durch 13) ausgedrückt ist. Da in 14) 15) gegenüber 11) 12) lediglich $\nabla\,l$ an Stelle von $2\,m\,\alpha\,\tau$ getreten ist, so erhalten wir nach Einsetzen von W:

$$1463{,}43\,M - 5728{,}67\,H - \frac{E}{2}\Delta l = 0,$$
$$407{,}65\,M - 1463{,}43\,H = 0,$$

und hieraus:

$$H = -\frac{E\Delta l}{950{,}16}, \qquad M = M' = 3{,}5899\,H = -\frac{E\Delta l}{264{,}68},$$

Die in Beisp. 33 bei Vernachlässigung von W erhaltenen Werthe, mit 918,90 und 255,81 in den Nennern, weichen um 3,40 % und 3,46 % von den vorstehenden genaueren ab.

Beispiel 44. Einsenkungen eines Bogens ohne Gelenke mit beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Die Einsenkungen in der Mitte des in Beisp. 33 behandelten Bruchsteigewölbes nach den bei beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten gültigen Formeln des § 33 zu berechnen: *a*) Für das Eigengewicht des Gewölbebogens allein; *b*) für eine einseitige Belastung durch beliebige gleiche Lasten P bei $a = 2{,}879$ m, 5,129 m, 7,379 m, 9,629 m und halb so grosse Lasten bei $a = 0{,}629$ m und 11,879 m; *c*) durch eine Temperaturänderung τ; *d*) durch eine Aenderung Δl der Spannweite und eine Senkung Δk des Kämpfers 0 gegen den Kämpfer l ohne sonstige Verdrehung der Endquerschnitte.

a) Für ein beliebige zur Trägermitte symmetrische Belastung hat man nach § 33, 14) mit $S = Vl$:

$$e = \frac{1}{E}\left[M\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - H\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \sum_0^m \frac{\sigma x}{J}\left(\frac{x}{l}\,S - S_x\right)\right] + \frac{l\,W}{4\,r\,E}. \qquad 1)$$

Die in der Klammer auftretenden Summen Σ wurden bereits in Beisp. 33 berechnet (S. 135, 136), während nach dem vorigen Beispiel für Eigengewicht allein:

$$M = -4902 \text{ mk}, \qquad H = 25796 \text{ kg},$$
$$\frac{W}{2} = 164740 + 13{,}009\,H + 0{,}969\,M = 495570,$$

sodass die Einsenkung durch das letztere:

$$e = \frac{1}{E}(-4902 \,.\, 2975{,}54 - 25796 \,.\, 11970{,}95 + 324445191) + \frac{23{,}758 \,.\, 495570}{2 \,.\, 17{,}923\,E},$$
$$e = \frac{1384922}{E},$$

und beispielsweise für $E = 175000$ kg per qcm:

$$e = \frac{1384922}{175000 \,.\, 100^2}\text{ m} = 0{,}079 \text{ cm}.$$

Bei der gebräuchlichen Vernachlässigung des Einflusses von X_2, Y_2, Z_2 hätten wir mit $M = -1157$ mk, $H = 26821$ kg (Beisp. 33), $W = 0$ erhalten:

$$e = -\frac{70359}{E}.$$

b) Wäre die zweite Bogenhälfte ebenso belastet wie in der Aufgabe unter *b*) für die erste verlangt, so hätten wir eine symmetrische Belastung und würde Formel 1) oder auch nach § 33, 14) gelten:

$$e = \frac{1}{E}\left(M\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} + V\sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - H\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} S_x\right) + \frac{l\,W}{4\,r\,E}. \qquad 2)$$

Da aber alsdann die Belastungen beider Bogenhälften der Symmetrie halber gleichviel zur Einsenkung in der Bogenmitte beitragen, so ist die wirkliche Einsenkung bei der unter *b*) verlangten Belastung halb so gross. Nun ergaben sich für die angeführte symmetrische Belastung im vorigen Beispiel:

$$M = 3{,}6860\,P, \qquad V = \frac{S}{l} = 5\,P, \qquad H = 7{,}7672\,P,$$

womit nach der dortigen Gleichung 3) und den dortigen Tabellen wegen $V_x = V - \sum_0^x P = V - P_x$:

$$\frac{W}{2} = 7{,}7672\,P \,.\, 16{,}122 - \frac{7{,}7672\,P}{17{,}923}\,55{,}803 + \frac{3{,}6860\,P}{17{,}923}\,17{,}366 + 5\,P \,.\, 5{,}444 -$$

$$8{,}876\,P + \frac{5\,P \,.\, 108{,}863 - 169{,}190\,P}{17{,}923} = 143{,}885\,P,$$

Demgemäss erhalten wir nach 2) die Einsenkung durch die verlangte einseitige Verkehrsbelastung allein:

$$e = \frac{P}{2\,E}\,(3{,}6860 \,.\, 2975{,}54 + 5 \,.\, 25670{,}62 - 7{,}7672 \,.\, 11970{,}95 - 46846{,}16) +$$

$$\frac{23{,}758 \,.\, 143{,}885\,P}{4 \,.\, 17{,}923 \,.\, E},$$

$$e = -\,205{,}309\,\frac{P}{E}$$

und beispielsweise für $P = 3430$ kg und $E = 175000$ kg per qcm:

$$e = -\,\frac{205{,}309 \,.\, 3430}{175000 \,.\, 100^2}\ \text{m} = -\,0{,}040\ \text{cm}.$$

Bei Vernachlässigung des Einflusses von X_2, Y_2, Z_2 (§ 26) hätten wir mit $M = 1{,}6595\,P$, $H = 7{,}2112\,P$ (Beisp. 33) und $W = 0$ erhalten: $e = -\,1880{,}066\,\frac{P}{E}$.

e) Durch eine beliebige Temperaturänderung τ entsteht nach § 33, 21):

$$e = \frac{M}{E}\sum_0^m \frac{\sigma\,x}{J} - \frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma\,x\,y}{J} + \frac{l\,W}{4\,r\,E} - \alpha\,\tau\,f, \qquad 3)$$

worin im vorliegenden Falle nach Beispiel 43:

$$M = \frac{E\,\alpha\,\tau}{11{,}140}, \qquad H = \frac{E\,\alpha\,\tau}{39{,}993},$$

$$\frac{W}{2} = 13{,}009\,H + 0{,}969\,M,$$

sodass wir erhalten:

$$e = \alpha\,\tau \left(\frac{2975{,}54}{11{,}140} - \frac{11970{,}95}{39{,}993}\right) + \alpha\,\tau\,\frac{23{,}758}{2 \,.\, 17{,}923}\left(\frac{13{,}009}{39{,}993} + \frac{0{,}969}{11{,}140}\right) - \alpha\,\tau \,.\, 4{,}502,$$

$$e = -\,36{,}451\,\alpha\,\tau,$$

und beispielsweise für $\alpha = 0{,}0000118$:

$$e = -\,0{,}000430\,\tau\ \text{m} = -\,0{,}0430\,\tau\ \text{cm}.$$

Mit den in Beispiel 33 unter Vernachlässigung von X_2, Y_2, Z_2 berechneten M, H und $W = 0$ hätte sich ergeben: $e = -\,37{,}656\,\alpha\,\tau$.

d) Die unter *d*) angenommene Bewegung der Stützen bewirkt nach § 33, 22):

$$e = \frac{M}{E}\sum_0^m \frac{\sigma\,x}{J} - \frac{H}{E}\sum_0^m \frac{\sigma\,x\,y}{J} + \frac{l\,W}{4\,r\,E} - \frac{\Delta\,k}{2}. \qquad 4)$$

Da hierin nach Beispiel 43 in unserm Falle

$$M = -\,\frac{E\,\Delta\,l}{264{,}68}, \qquad H = -\,\frac{E\,\Delta\,l}{950{,}16},$$

$$\frac{W}{2} = 13{,}009\,H + 0{,}969\,M,$$

so erhalten wir:

$$e = \Delta l \left(-\frac{2975{,}54}{264{,}68} + \frac{11970{,}95}{950{,}16} \right) + \Delta l \frac{23{,}758}{2 \,.\, 17{,}923} \left(-\frac{13{,}009}{950{,}16} - \frac{0{,}969}{264{,}68} \right) \quad \frac{\Delta k}{2},$$

$$e = 1{,}345 \, \Delta l - 0{,}5 \, \Delta k.$$

Mit den in Beisp. 33 unter Vernachlässigung von X_2, Y_2, Z_2 berechneten M, H und $W = 0$ hätte sich ergeben: $e = 1{,}396 \, \Delta l - 0{,}5 \, \Delta k$.

Bemerkungen. Die obigen Resultate zeigen, dass die durch Belastung bewirkten Einsenkungen in der Trägermitte sehr gering sind und durch Einflüsse von Temperaturänderungen und kleinen Bewegungen der Kämpfer leicht aufgewogen werden können. Bei den angenommenen E, α würde die rechnungsmässige Einsenkung durch das Eigengewicht und einseitige Belastung bis $P = 3430$ kg (Proportionalitätsgrenze, s. S. 132, 149) $e = 0{,}079 - 0{,}040 = 0{,}039$ cm, dagegen die Einsenkung durch eine Temperaturdifferenz $\tau = -6{,}625^{\circ}$ C, wie sie die Luft bei $P = 3430$ kg gegen den Anfang des Versuchs aufwies (13,7° R am 12. 10. 91 gegen 19° R am 26. 9. 91*) $e = 0{,}043 \,.\, 6{,}625 = 0{,}285$ cm. Die am Schlusse des Versuchs bis $P = 3430$ kg gemessene Einsenkung betrug 0,165 cm. Wieviel davon elastisch, wieviel bleibend war, welche Bewegungen der Kämpfer eingetreten waren (beim Ziegelgewölbe ergaben sich $\Delta l = 0{,}075$ cm, $\Delta k = -0{,}070$ cm, dagegen beim Moniergewölbe $\Delta l = -0{,}035$ cm, $\Delta k = 0{,}070$ cm) wurde nicht festgestellt, wie auch die jeweiligen Temperaturen des Gewölbeinnern nicht zweifellos angegeben werden können. Beim Zusammenwirken der oben in Betracht gezogenen Einflüsse, zu welchen beliebige Verdrehungen $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_1$ der Kämpferquerschnitte nicht gehören, wäre in Centimeter ausgedrückt:

$$e = \frac{13849{,}22 - 2{,}05309 \, P}{E} - 3645{,}1 \, \alpha \tau + 1{,}345 \, \Delta l - 0{,}5 \, \Delta k,$$

worin auch Δl, Δk in cm, P in kg, E in kg per qcm einzusetzen sind. Aus dieser Gleichung könnte beispielsweise der Elasticitätsmodul E bei bekannten Werthen aller übrigen Grössen berechnet werden, was im vorliegendem Falle nicht möglich ist. Uebrigens werden die Vertikalbewegungen der Bogenmitte durch die Belastung meist zu klein, um verlässige Werthe von E daraus zu entnehmen. Nach obigen Vergleichen mit den bei Vernachlässigung der X_2, Y_2, Z_2 erhaltenen Werthen (s. am Schlusse von *a*) *b*)) können auch Vernachlässigungen bei der Berechnung die Resultate vollständig ändern. Weitgehende Schlüsse lassen sich also aus solchen Einsenkungsmessungen im Allgemeinen nicht ziehen. Doch zeigt der vorstehende Ausdruck von e, dass im obigen Falle durch genügend grosse P auch negative Einsenkungen (Hebungen) des Bogenscheitels gegen dessen Lage vor Einwirkung von Lasten (vor der Ausschalung) entstehen konnten, was die Beobachtung bestätigte. Nach dem Ausdruck von e sollten abgesehen von Temperaturänderungen und Stützenbewegungen die negativen e bei

$$P = \frac{13849{,}22}{2{,}05309} = 6746 \text{ kg}$$

beginnen, doch liegt dies schon oberhalb der Proportionalitätsgrenze. Gemessen wurde bei $P = 5574$ kg, $e = 0{,}145$ cm, bei $P = 7402$ kg $e = -0{,}945$ cm.

Die Einsenkungen, welche sich für das betrachtete Gewölbe durch die oben angenommenen Einwirkungen ergeben würden, wenn die Axe parabolisch und $J \cos \varphi$ konstant wären, sind in Beisp. 29 berechnet. Sie bestätigen, dass die Berechnung nach den einfacheren Formeln für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ in Fällen wie dem vorliegendem nicht zulässig ist.

§ 36. Einige Ergebnisse der berechneten Beispiele.

Bezüglich verschiedener Punkte, welche bei der Berechnung elastischer Bogenträger in Betracht kommen, lassen sich nur durch numerische Berechnungen unter praktisch vorkommenden Verhältnissen genügende Aufschlüsse erlangen. Bei der Umständlichkeit mancher dieser

---

* Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895, S. 27.

Berechnungen und den durch die Mängel der Theorie sowie ungenügende thatsächliche Unterlagen bedingten Schwierigkeiten waren jene Feststellungen bisher durchaus unzureichend, und auch für die Folge bleiben vergleichende Berechnungen zur Anbahnung von Vereinfachungen und Begründung von Verbesserungen sehr wünschenswerth. Es zeigt sich, dass manche gebräuchliche Vernachlässigungen keineswegs allgemein zulässig sind, während andrerseits gewisse Erschwerungen entbehrt werden können. Die folgenden Schlüsse stützen sich auf die in vorliegender Schrift berechneten Beispiele, sie können also, soweit sie nicht Bekanntes bestätigen, zunächst nur unter ähnlichen Verhältnissen Gültigkeit beanspruchen. In erster Linie haben wir Brücken- und Dachkonstruktionen im Auge. Bei den angefügten Hinweisen werden Aufgaben und Beispiele durch *A* und *B* bezeichnet. Die Verweise auf IV beziehen sich auf den IV. Abschnitt.

Bogenlängen. Dieselben können für die gewöhnlichen f/l (l Spannweite, f Pfeil) mitunter zweckmässig nach der Näherungsformel

$$s = l\left(1 + \frac{8f^2}{3l^2}\right)$$

erhalten werden; doch bietet auch die genauerere Berechnung keine Schwierigkeit. S. 73. Ueber $s = \Sigma\,\sigma$ siehe S. 95, 135, 141. *B* 15.

Trägheitsmoment und Krümmungsmomente. Die bei elastischen Bogenträgern übliche Verwendung des Trägheitsmoments J anstatt des Krümmungsmoments

$$K = r\int \frac{v^2}{r+v}\, d\,F$$

ist berechtigt. Vergl. § 6 und *A* 4, 5, 6 mit *B* 2, 3, 4.

Ausdruck der Normalspannungen. Die Verwendung der einfacheren Formel für die Normalspannungen σ

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J}\, v$$

anstatt der theoretisch genaueren

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{M_x}{J}\, v$$

(S. 21) ist bei Berechnung der Materialbeanspruchungen zulässig. Vergl. *B* 5 (S. 30). Zur Ableitung der statisch unbestimmten Grössen H, M, M' und der Formänderungen empfiehlt sich die Verwendung des genaueren Ausdrucks, entsprechend dem Vorgehen im III. Abschnitt.

Schubspannungen. Die Querschubspannungen und Längsschubspannungen (§ 9), welche bei der Dimensionirung vollwandiger Bogen gewöhnlich unberücksichtigt bleiben, ergeben sich bei Gewölben und eisernen Bogen so gering, dass sich gegen die übliche Dimensionirung auf Grund der Normalspannungen σ allein vorläufig nichts einwenden lässt. *B* 8, 34, 35. Doch ist bei Wahl der zulässigen Beanspruchungen auf die aus Biegungsversuchen unter ähnlichen Verhältnissen erhaltenen σ Rücksicht zu nehmen. §§ 4, 5, 19, 24, IV *A*; *B* 35, 37. Bezüglich der in andern

Fällen bei verschiedenen gleichzeitigen Einwirkungen in Rechnung gezogenen „reduzirten Hauptspannungen" s. Luegers Lexikon der gesammten Technik, Bd. IV, Stuttgart 1897, Art. Festigkeitsbedingung.

Koncentrierte und gleichmässig vertheilte Lasten. Zur Vereinfachung mancher Berechnungen kann an Stelle einer Anzahl in gleichen Abständen angreifender gleichgrosser koncentrierter Lasten eine entsprechende gleichmässig vertheilte Last (§ 14) eingeführt werden; in andern Fällen kann das Umgekehrte vorzuziehen und zulässig sein (*B* 12). Bei grösseren Berechnungen, für welche sich der Einfluss solcher Vereinfachungen nicht nach allen Richtungen übersehen lässt, rechnet man am besten mit den wirklichen Lasten (IV. Abschnitt).

Ungünstigste Belastungen. Die Verwendung der Bogenaxe anstatt der Kernlinien bei Bestimmung der Belastungen für die Grenzwerthe der Normalspannungen σ (S. 40, 62, 84), durch welche die Anzahl zu berücksichtigender Belastungsfälle auf etwa die Hälfte reduzirt wird, ergibt für vollwandige Bogen in vielen Fällen hinreichend genaue Resultate. Vergl. *B* 13 (S. 68) und die Tabelle S. 41 auf Grund der einfacheren Berechnung im IV. Abschnitt und der genaueren: Weyrauch, Berechnung der neuen Bogenbrücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt, Allgemeine Bauzeitung 1895. Eventuell kann man bei diesem Vorgehen die Verkehrslast per Längeneinheit etwas nach oben abgerundet einführen. Siehe auch das unten über Gewölbe Gesagte.

Temperaturänderungen. Die Berücksichtigung gleicher Temperaturänderungen nach oben und unten, z. B. $\tau = \pm 30^0$, gegen eine dem spannungslosen Zustande entsprechende Normaltemperatur ist willkürlich, wenn letztere in üblicher Weise gleich der Montirungstemperatur angenommen wird. So wären für $\tau = \pm 30^0$ bei 0^0 Montirungstemperatur Temperaturen von -30^0 bis 30^0, bei 30^0 Montirungstemperatur jedoch solche von 0 bis 60^0 berücksichtigt (vergl. auch IV *N*). Diese Willkür lässt sich vermeiden durch Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur, wie dieselbe bei der neuen Neckarbrücke zwischen Stuttgart und Cannstatt in Verbindung mit der ohnehin beabsichtigten Ueberhöhung der Bogen (IV *E*) ohne jede Mehrarbeit vorgenommen worden ist. *A* 10, 11 mit *B* 22, 26; IV *N*.

Die Beanspruchungen durch Temperaturänderungen und demgemäss auch durch kleine Stützenbewegungen können bei flachen eisernen Bogen ohne Gelenke so gross ausfallen, das dieser Umstand bei Wahl der Bogenart besonders in Betracht zu ziehen ist (*B* 31). Jedenfalls sollten für die Vermeidung von Kämpfergelenken bei flachen eisernen Bogen Gründe angeführt werden können, welche jenen Nachtheil aufwiegen. Auch bei Gewölben ohne Gelenke kann der Einfluss von Temperaturänderungen und Stützenbewegungen auf die Beanspruchungen erheblich werden (*B* 37).

Einsenkungen. Die mitunter vorgenommene Berechnung der Einsenkungen von Bogen auf Grund einer vorausgesetzten gleichmässigen Längenänderungen der Bogenaxe (*A* 7) entbehrt einer zuverlässigen Grundlage und kann zu ganz falschen Resultaten führen. Sie ist umso weniger zu empfehlen, als die Einsenkungen schon durch geringe Aenderungen

der Bogenaxe, Belastungen u. s. w. stark beeinflusst werden können. Siehe *A* 7 und diese Vergleiche in *B* 41, 42, 44 (auch die Bemerkungen zu *B* 25, und die Verschiedenheit der Resultate von *B* 29 und 44).

Bogenform. Die Berechnung parabolischer Bogen von konstantem (mittlerem) $J \cos \varphi$ mit zwei Gelenken und ohne Gelenk ist bei gleicher Genauigkeit wesentlich einfacher als die Berechnung anders geformter Bogen dieser Arten. Vergl. *B* 40 mit 39, 27 mit 43, 42 mit 41, 29 mit 44 etc. Eine Ausnahme macht nur der Halbkreisbogen mit Kämpfergelenken (*A* 1, 14, 15), während für andere Kreisbogen mit Kämpfergelenken zwar der Horizontalschub durch Temperaturänderungen und Stützenbewegungen verhältnismässig einfach ausgedrückt ist (*A* 13, *B* 38), die der Belastung entsprechenden Ausdrücke aber so unbequem verwendbar ausfallen*), dass auch für Kreisbogen im Allgemeinen die Formeln für beliebige Axe vorzuziehen sind, umsomehr als diese auch der Veränderlichkeit des Querschnittes Rechnung tragen. Da sich zudem die Beanspruchungen parabolischer Bogen nicht ungünstiger, sondern in wichtigen Fällen günstiger als für andere Bogen ergeben (weil in jenen Fällen annäherd $M_x = 0$ und damit die Querschnitte annähernd gleichmässig beansprucht sind; vergl. S. 60, 82, 103 und *A* 9, 10 mit *B* 21, 22, IV *E*), so wird man häufig zu parabolischen Bogen greifen. Selbstverständlich können andere Gründe gegen diese Wahl den Ausschlag geben (S. 59).

Bei Anwendung der Formeln für parabolische Bogen auf Bogen mit anderer Axform ist mit Vorsicht zu verfahren, in Zweifelsfällen empfehlen wir, davon abzusehen. Wenn auch die Abweichungen gegen die genaueren Werthe für manche Grössen wie die Stützenreaktionen H, V, V', die Vertikalkräfte V_x und die Normalkräfte N_x in vielen Fällen gering oder gleich Null sind, so können sie doch für andere Grössen wie die Momente M_x, die Normalspannungen σ und die Einsenkungen e so gross ausfallen, dass die ganze Berechnung damit unbrauchbar wird. Siehe die Bemerkungen zu *B* 24, 30, 33, *A* 14, sowie die Vergleiche in *B* 40, 42, die Verschiedenheit der Resultate von *B* 29 und 44 u. s. w.

Parabolische Bogen. Bei der Berechnung parabolischer Bogen von konstantem (mittlerem) $J \cos \varphi$ mit zwei Gelenken darf in dem Ausdrucke des Horizontalschubs

$$H = \frac{1}{(1+\varepsilon) 8 f l^3} \sum_0^l P a (l-a)(l^2 + l a - a^2 + \beta l^2) + \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2} \left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l}\right)$$

und den daraus folgenden Spezialformeln zwar fast immer β, aber im Allgemeinen nur für vorläufige Berechnungen ε vernachlässigt werden. § 28, *A* 7, 9, *B* 16, 20. Mit $\varepsilon = 0$ würde für $f = 0$ der Horizontalschub $H = \infty$, während in diesem Falle wegen $\varepsilon = \infty^2$ (S. 198) wie für Balken $H = 0$ ist. Der Einfluss von ε ist jedoch um so geringer, je steiler der Bogen und für $f = l/2$ hat man $\varepsilon = 0$.

---

* Vergl. Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II. Bd.: Der Brückenbau, IV. Abth.: Eiserne Bogenbrücken und Hängebrücken, Leipzig 1888, S. 69, 73, 87, 93, sowie erste Auflage dieser Schrift, S. 63.

Noch weniger darf in den Formeln für den Horisontalschub H und die Endmomente M, M' parabolischer Bogen ohne Gelenke (S. 101) die übliche Vernachlässigung des Einflusses der Axialkraft etc. (der Integrale X_2, Y_2, Z_2 auf S. 192) und damit des hier mit 6 multiplizirten ε vorgenommen werden. B 27 (Bemerk. S. 111, 120) und 31. In dem Grenzfalle $f = 0$ würde auch hier $H = \infty$, während sich mit dem richtigen Werthe $H = 0$ die Endmomente wie beim beiderseits eingespannten Balken ergeben (S. 101). Doch nimmt wieder ε mit der Steilheit des Bogens ab und ist für $f = l/2$ $\varepsilon = 0$. Ferner ist ε für Gewölbe wesentlich kleiner als für eiserne Bogen (S. 64, 115, 144).

Bei Berechnung der Formänderungen parabolischer Bogen würde die Vernachlässigung von ε im Allgemeinen zu unbrauchbaren Resultaten führen, so z. B. für beliebig grosse gleichmässig vertheilte Last zu einer Einsenkung in der Trägermitte gleich Null, während sich bei Berücksichtigung von ε im Falle $f = 0$ für den Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk dieselben Einsenkungen wie für den beiderseits frei drehbaren bezw. beiderseits festgespannten Balken ergeben müssen. Vergl. §§ 15, 16, 17, 23; A 7, B 20, 29, 32, 42.

Bogen mit beliebiger Axe. Für so steile Bogen mit Kämpfergelenken, wie sie nach dem Vorgange der Dourobrücke (S. 94) in neuerer Zeit vielfach zur Anwendung kamen, kann bei Ermittelung des Horizontalschubs H nach den Formeln für beliebige symmetrische Axe und beliebig veränderlichen Querschnitt in vielen Fällen von dem bei Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ durch ε, β berücksichtigten Beitrag der Axialkraft etc. (dem Beitrag der Integrale X_2, Y_2, Z_2 S. 192) abgesehen und also nach § 16, 13)—17) gerechnet werden § 32, B 23, 39.

Für Bogen ohne Gelenke kann der Einfluss der Vernachlässigung jenes Beitrags in den Ausdrücken von H, M, M' bei beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten bedeutend werden, selbst in dem günstigsten Falle rechteckigen Querschnitts (Gewölbe, S. 143). Zu beachten ist jedoch hier wie bei parabolischen Bogen, dass sich die Abweichungen nicht in gleichem Maasse auf die bei der Dimensionirung in Frage kommenden Beanspruchungen fortzupflanzen brauchen. B 34, 35, 36.

Auch wenn bei Berechnung der Stützenreaktionen und Beanspruchungen die einfacheren Formeln der §§ 16, 34 zur Verwendung kommen, sind die Einsenkungen im Allgemeinen möglichst genau zu berechnen, da diese durch Vernachlässigungen selbst dann bis zur Unbrauchbarkeit beeinflusst werden können, wenn die erhaltenen Beanspruchungen für praktische Zwecke noch genügend genau sind. Siehe die Vergleiche in B 41 und 44.

Gewölbe. Die durch die Wiener Versuche (§ 19) als zutreffend bewiesene Berechnung von Tonnengewölben als elastische Bogenträger bestätigt zugleich die Willkür der gewöhnlichen Berechnung. Die freie Wahl gewisser Durchgangspunkte der Stützlinie in einzelnen Fugen kommt auf die Annahme von Gelenken in den betreffenden Punkten hinaus, während bei eisernen Bogen Niemand Gelenke annimmt, wo keine sind, und auch bei Gewölben, je nachdem Gelenke angewandt werden oder nicht, ganz verschiedene Beanspruchungen entstehen können. Vergl. die

Resultate der Beispiele 13, 30 und die Bemerkungen S. 127. Gewölbe sind nicht weniger genau zu berechnen als eiserne Bogen, da für sie die Vermeidung grösserer Zugspannungen von Wichtigkeit ist (§ 19). Man hat also entweder wirklich Gelenke anzuordnen (§ 18), oder die Gewölbe bei entsprechender Ausführung als elastische Bogen ohne Gelenk zu berechnen. *B* 13, 27—30, 33—37, 43—44. Abgesehen ist hierbei von solchen Gewölben, für welche auf Grund genügender Erfahrungen das bisherige Vorgehen mit den üblichen geringen rechnungsmässigen Beanspruchungen als empirische Methode gelten kann.

Während die Berechnung von Gewölben mit drei Gelenken nach § 15 erfolgen kann (*B* 13) uud nur für die Einsenkungen bei nicht parabolischer Axe nach § 33 zu greifen ist, wären Gewölbe ohne Gelenke nach § 17 zu berechnen (*B* 27—30, 33—37, 43—44), wozu sich bei nicht parabolischer Axe die H, M, M' am genauesten aus § 35 ergeben. (*B* 43). Aber selbst bei Ermittelung der H, M, M' nach den unter Vernachlässigung der Axialkraft etc. entstandenen Formeln des § 34 (*B* 33) wäre die Berechnung des Gewölbes als elastischer Bogenträger dem willkürlichen gewöhnlichen Verfahren vorzuziehen. Für das Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe gestatten die Tabellen der Beispiele 35, 36 (S. 151, 154), in welchen die grossen Zahlen die genaueren, die kleinen die weniger genauen Werthe bedeuten, Vergleiche der schliesslichen Rechnungsergebnisse ohne und mit jenen Vernachlässigungen. Auch die kleinen Zahlen stehen mit den Versuchsresultaten noch verhältnissmässig gut im Einklang, während das gewöhnliche Verfahren über dieselben überhaupt keinen Aufschluss geben kann (S. 152).

Das besonders bei Gewölben nicht seltene Vorgehen, der Berechnung nur einen Belastungsfall zu Grunde zu legen (z. B. einseitige Verkehrsbelastung bis zur Bogenmitte oder Vollbelastung des ganzen Bogens), ist für Brücken durchaus ungenügend. *B* 13, 30.* Dagegen ist die Verzeichnung der Stützlinie zur Berechnung von Gewölben ebensowenig nöthig wie bei eisernen Bogen. Sie kann jedoch behufs grösserer Anschaulichkeit für einzelne Belastungsfälle beigefügt werden. Vergl. S. 69 und *B* 36.

---

* Siehe in dieser Beziehung auch: L e i b b r a n d, Donaubrücke bei Inzigkofen in Hohenzollern, Zeitschrift für Bauwesen 1896, S. 279 (Gewölbe mit drei Gelenken).

IV. Abschnitt.

Berechnung der König-Karls-Brücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt.

Die im Jahre 1893 dem Verkehr übergebene Strassenbrücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt ist 1891—93 durch die Württembergische Ministerialabtheilung unter Präsident von Leibbrand erbaut worden. Bezüglich eingehenden Studiums aller Verhältnisse der Brücke wird auf dessen Schrift „die König Karlsbrücke" Berlin 1895, verwiesen.

Die Lieferung der Eisenkonstruktion aus basischem Martinflusseisen, Niete aus Schweisseisen, wurde infolge engeren Wettbewerbs der Esslinger Maschinenfabrik übertragen. Die Konstruktion zeichnet sich durch Einfachheit, Uebersichtlichkeit und bequeme Zugänglichkeit aus. Die Brückenbahn von 18 m Breite (Fahrbahn 11 m, Fusswege je 3,5 m) wird in jeder Oeffnung durch sechs parabolische Blechbogen mit Kämpfergelenken, ohne Scheitelgelenk, in Abständen von 3,2 m getragen. Infolge der Bedingungen für das Längenprofil, die Lichtweiten, Höhenlage der Kämpfergelenke u. s. w. ergaben sich folgende Spannweiten und Pfeilhöhen der Bogenaxen in der Oeffnungsfolge von Stuttgart nach Cannstatt:

Für Oeffnung	I	II	III	IV	V
$l =$	45,51	48	50,48	48	45,51 m,
$f =$	4,375	4,735	4,855	4,505	3,695 „.

Es sind also nicht zwei Oeffnungen vollständig übereinstimmend.

Die erste Berechnung einer Oeffnung wurde durch Oberingenieur Kübler von der Esslinger Maschinenfabrik vorgenommen und den Plänen der letzteren beigefügt. Ihr allgemeiner Gang ist aus der oben citirten Schrift ersichtlich, wenn auch die Durchführung für letztere nachträglich auf Grund der definitiven Querschnitte widerholt und in einzelnen Punkten modificirt wurde. Unter Beiziehung jener Berechnuug fand eine Prüfung der Pläne an der Hand der Lieferungsbedingungen statt, worauf im Einvernehmen der Bauverwaltung, der Esslinger Maschinenfabrik und des Verfassers vorliegenden Werks eine Anzahl Aenderungen beschlossen wurden (Verstärkung der Stirnbogen und der Horizontalplatten aller Bogen, Wegfall der Unterbrechung der zweiten Horizontalpatten um die Bogenmitten, Ergänzung der Windkreuzverbände, Verstärkung der Vertikalständer und des Zoreseisenbelags). Auf Grund der so erhaltenen Querschnitte und Gewichte wurde die definitive Berechnung durch den Verfasser entsprechend den Bauvorschriften für alle fünf Oeffnungen getrennt durchgeführt. Die vollständige Berechnung ist in der Wiener „Allgemeinen Bauzeitung" 1895 veröffentlicht. Sie gestattet interessante Vergleiche und insbesondere auch Schlüsse darüber, inwieweit man in ähnlichen Fällen von vollständiger Berechnung der verschiedenen Oeffnungen absehen kann. Selbstverständlich ist jedoch der Gang der Berechnung für alle Oeffnungen derselbe.

Im Folgenden geben wir die Berechnung von Oeffnung IV mit folgenden Aenderungen: 1) Entsprechend dem Zwecke dieses Buches ist eine vorläufige Berechnung zur Ermittelung der Querschnitte beigefügt; 2) anstatt des genaueren Verfahrens zur Bestimmung der Grenzwerthe der Normalspannungen ist das in

§ 11 erwähnte einfachere Verfahren verwendet, da letzteres in der Praxis meist vorgezogen werden wird, ersteres aber in dem erwähnten Aufsatze verfolgt werden kann (vergl. S. 278 oben); 3) der Einfluss der Temperaturänderungen ist etwas anders als in diesem Aufsatze berücksichtigt (vergl. S. 15), Uebereinstimmung würde erreicht, wenn in letzterem $\lambda = 1$ gesetzt würde, während mit $\lambda = 0{,}953021$ gerechnet ist. — Bei der eingehaltenen Genauigkeit der Berechnung kommt es uns keineswegs immer auf den Werth der berücksichtigten Dezimalen für die Schlussresultate an, so wenig, wie dem Kaufmann, welcher seine Bücher auf den Pfennig genau führt, dieser Betrag von Bedeutung ist. Rechnet man aber bei umfassenderen Ableitungen zu ungenau, so wird nach und nach jede Kontrolle unmöglich, es entstehen Widersprüche, bei welchen nicht mehr gesagt werden kann, ob sie in Fehlern oder in Vernachlässigungen ihren Grund haben. In der Praxis wird denn auch oft genauer gerechnet als auf der technischen Hochschule.

Bemerkt sei noch, dass in der folgenden Darstellung manche Berechnungen vorkommen, welche häufig wegfallen (künstlicher Horizontalschub, Reduktion der Normaltemperatur u. s. w.). Sodann rechnen wir mitunter desshalb genauer als unbedingt nöthig wäre, um die Zulässigkeit gewisser Vereinfachungen (Vernachlässigung von β, Zusammenfassung des Eigengewichts u. s. w.) wie in früheren Beispielen hervortreten zu lassen. Auch soll auf gewisse Modifikationen der Berechnung hingewiesen werden. Die praktische Berechnung einer Bogenbrücke wird also oft wesentlich kürzer als hier ausfallen. Besonders trifft dies dann zu, wenn man auf die Bestimmung der ungünstigsten Belastungen verzichtet, und sich wie in den Beispielen 13, 30 auf die Durchrechnung einiger im Voraus gewählter Belastungsfälle beschränkt, was bisher sehr häufig geschah. In diesem Falle wäre nach der vorläufigen Berechnung unter *A* für die Bogen selbst meist nicht viel mehr erforderlich, als eine nochmalige Behandlung der gleichen Belastungsfälle mit Verwendung der in IV *B*, *C* erhaltenen genaueren Werthe, und Feststellung der entsprechenden σ_o, σ_u. Der Einfluss der Temperatur könnte wie in *J* nachträglich berücksichtigt werden.

A. Vorläufige Berechnung.

Da es sich um parabolische Bogen von $l = 48$ m Spannweite und $f = 4{,}505$ m Pfeil der Axe handelt, so hat man nach § 15, 8) 18) an jeder Stelle x der Bogenaxe:

$$y = \frac{4f}{l^2}\, x\,(l-x) = 0{,}00782118\, x\,(48-x),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4f}{l^2}\,(l-2x) = 0{,}01564236\,(24-x),$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

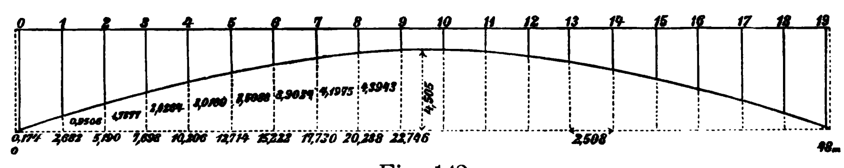


Fig. 142

Die Vertikalen, welche nach dem Bauprogramm ohne Diagonalen in Abständen von 2,5 m anzunehmen waren, gelangten mit Rücksicht auf die Anordnung der Bogenenden, Fahrbahn, Geländer u. s. w. an die in Fig. 142 ersichtlichen Stellen symmetrisch zur Trägermitte. Obige Gleichungen ergeben auf der

ersten Trägerhälfte unter den Axen der Vertikalen sowie am Kämpfer und Scheitel die in Kolumne 2—4 der Tabelle II (S. 265) eingetragenen Werthe.

Als Verkehrslast waren (abgesehen von Fuhrwerken etc., vergl. unter IV *K*) 400 kg. per qm Fahrbahn und 560 kg per qm Fusswege vorgeschrieben, also für jeden der sechs Bogen durchschnittlich per m Spannweite:

$$\frac{400 \,.\, 11 + 560 \,.\, 7}{6} = 1387 \text{ kg},$$

wofür hier rund 1400 kg gesetzt wird. Das Eigengewicht der Brücke sei auf Grund von Erfahrungen, empirischen Formeln oder überschlägischen Ermittelungen zu 2100 kg per m angenommen, wonach als grösste Gesammtlast 3500 kg per m Spannweite in Rechnung zu stellen ist.

Für die vorläufige Berechnung der Bogen ziehen wir nur gleichmässig vertheilte Lasten in Betracht und zwar: *a*) Vollbelastung des ganzen Bogens; *b*) Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte; *c*) Verkehrsbelastung der zweiten Bogenhälfte. In den für diese Belastungen beim Parabelbogen von konstantem (mittlerem) $J \cos \varphi$ gültigen Formeln könnte vorläufig neben $\beta = 0$ auch $\varepsilon = 0$ gesetzt werden. Da wir jedoch übersehen, dass die mittlere Entfernung der Gurtungsschwerpunkte etwa $h = 0{,}8$ m betragen wird, so lässt sich entsprechend dem zu § 15, 40) Gesagten (S. 64) setzen:

$$\gamma = \frac{h^2}{12} = \frac{0{,}64}{12} \text{ qm}, \qquad r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = 66{,}181 \text{ m},$$

und damit nach § 15, 40):

$$\varepsilon = \frac{15\,\gamma}{8} \left(\frac{r-f}{rf}\right)^2 = 0{,}012.$$

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von u per Längeneinheit hat man nach § 16, 20) 5) mit § 16, 21) und $\beta = 0$:

$$M_x = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{u}{2} x (l-x), \tag{1}$$

$$N_x = \left[\left(\frac{l}{2} - x\right) u \operatorname{tg} \varphi + \frac{u}{1+\varepsilon} \frac{l^2}{8f}\right] \cos \varphi, \tag{2}$$

während für verschiedene gleichmässig vertheilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Bogenhälfte nach § 16, 25) 28):

$$V = \frac{3u + u'}{8} l, \qquad H = \frac{u + u'}{1+\varepsilon} \frac{l^2}{16f}, \tag{3}$$

und damit nach § 16, 27) 5) 26) auf der ersten Bogenhälfte:

$$M_x = Vx - Hy - \frac{u x^2}{2}, \tag{4}$$

$$N_x = [(V - ux) \operatorname{tg} \varphi + H] \cos \varphi. \tag{5}$$

Da $l = 48$ m, $f = 4{,}205$ m, $\varepsilon = 0{,}012$, so erhalten wir für Vollbelastung, mit $u = 3500$ kg:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= 20{,}25\, x\, (48 - x), \\ N_x &= [(84000 - 3500\,x) \operatorname{tg} \varphi + 245938] \cos \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

für Verkehrslast von 0 bis m, mit $u = 3500$ kg, $u' = 2100$ kg, wegen $V = 75600$ kg $H = 176878$ kg:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= 75600\, x - 176878\, y - 1750\, x^2, \\ N_x &= [(75600 - 3500\, x) \operatorname{tg} \varphi + 176878] \cos \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

für Verkehrslast von m bis l, mit $u = 2100$ kg, $u' = 3500$ kg, wegen $V = 58800$ kg, $H = 176878$ kg:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= 58800\, x - 176878\, y - 1050\, x^2, \\ N_x &= [(58800 - 2100\, x) \operatorname{tg} \varphi + 176878] \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Mit Rücksicht auf die y, $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$ in Tabelle II erhalten wir z. B. bei $x = 12{,}714$ m wegen $y = 3{,}5088$ m, $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}17654$, $\cos \varphi = 0{,}98477$ im Falle *a*):

$M_x = 9309$ mk. $\qquad N_x = 249060$ kg.

im Falle *b*):

$M_x = 57668$ mk. $\qquad N_x = 179592$ kg.

im Falle *c*):

$M_x = -42775$ mk. $\qquad N_x = 179765$ kg.

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der folgenden Tabelle I berechnet.

Tabelle I.

Querschnitt x	*a.* Vollbelastung		*b.* Verkehrslast von 0 bis *m*		*c.* Verkehrslast von *m* bis *l*	
m	M_x mk	N_x kg	M_x mk	N_x kg	M_x mk	N_x kg
2,682	2522	256911	22031	188741	− 17992	184618
5,190	4610	254522	37865	185898	30472	183207
7,698	6437	252410	49049	183416	− 38757	181928
10,206	8004	250587	55668	181310	42880	180780
12,714	9309	249060	57668	179592	− 42775	179765
15,222	10358	247831	55043	178270	− 38489	178884
17,730	11136	246904	47825	177354	− 29992	178316
20,238	11658	246286	35978	176853	− 17317	177529
22,746	11919	245977	19521	176765	− 445	177060

Bei Belastung durch Eigengewicht allein stehen alle M_x, N_x im Verhältniss $\frac{2100}{3500} = \frac{3}{5}$ zu den unter *a*) angeführten.

Auf Grund vorstehender Tabelle hat nun die vorläufige Bestimmung der Querschnitte zu erfolgen. Einige Anhaltspunkte pflegen von vornherein gegeben zu sein. Bei Wahl der Höhe kommt neben statischen Gesichtspunkten (je höher die Vertikalplatte, desto kleiner die Gurtungsquerschnitte) das Ansehen in Betracht. Vielfach wurde die Höhe konstant angenommen. Für die Cannstatter Brücke war, wie ebenfalls häufig geschieht, eine Zunahme der Höhe nach den Kämpfern vorgeschrieben; die Veränderlichkeit der Vertikalplattenhöhe wird dann nach Ermittelung der statischen Bedürfnisse für einige Querschnitte am besten graphisch festgestellt. Die Querschnitte der Cannstatter Brücke wurden symmetrisch zur Axschicht und die Dicke der Vertikalplatte gleich 1,2 cm gewählt (vergl. S. 184).

Bei den weiteren Ermittelungen können Profiltabellen, graphische Darstellungen und anderes Erfahrungsmaterial gute Dienste leisten. Wird z. B. bei $x = 12{,}714$ m ein Profil vom Querschnitt $F = 382{,}6$ qcm und Widerstandsmoment $W = 12959$ ccm angenommen, so liefern die nach § 8, 11) bei symmetrischem Querschnitt gültigen Formeln

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W} \tag{6}$$

die Normalspannungen des obersten und untersten Querschnittselements per qcm im Belastungsfalle *a*):

$$\sigma_o = \frac{249060}{382{,}6} + \frac{9309 \,.\, 100}{12959} = 723 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{249060}{382{,}6} - \frac{9309 \,.\, 100}{12959} = 580 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle *b*):

$$\sigma_o = \frac{179592}{382,6} + \frac{5766800}{12959} = 914 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{179592}{382,6} - \frac{5766800}{12959} = 24 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle *c*):

$$\sigma_o = \frac{179765}{382,6} - \frac{4277500}{12959} = 140 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{179765}{382,6} + \frac{4277500}{12959} = 800 \text{ kg}.$$

Bei Beurtheilung dieser Zahlen kommt es in erster Linie darauf an, welche Beanspruchungen unter den gegebenen Verhältnissen (Material etc.) zugelassen werden sollen. Für die Cannstatter Brücke (Martinflusseisen) waren Beanspruchungen durch Belastung bis $800\left(1 + \frac{\min\sigma}{2\max\sigma}\right)$ gestattet, doch durfte unter Hinzurechnung der Temperatureinflüsse die Grenze von 1000 kg nicht überschritten werden. Hiernach wäre die Normalspannung $\sigma_0 = 914$ kg zu hoch, da wir nicht genau die ungünstigsten Belastungen berücksichtigt haben, während nach obigen Zahlen die Normalspannung im obersten Querschnittselement nicht über

$$800\left(1 + \frac{140}{2 . 914}\right) = 862 \text{ kg}$$

betragen sollte. Für die hinzukommenden Temperaturspannungen bliebe auch bei 914 kg genügend Spielraum. Im vorliegendem Falle ist jedoch zu beachten, dass ein künstlicher Horizontalschub (vergl. Aufgabe 9) vorgesehen war, durch welchen der Druck im Obergurt vermindert wird. Da nun das Eigengewicht für die vorläufige Berechnung absichtlich etwas hoch gewählt wurde, und bei Zweigelenkbogen von weniger veränderlicher Höhe die Normalspannungen erfahrungsgemäss um die Grenzen der äussersten Viertel am ungünstigsten ausfallen, so kann der angenommene Querschnitt vorläufig belassen und zu andern Stellen übergegangen werden.

Im Allgemeinen ist bei diesen vorläufigen Ermittelungen Folgendes im Auge zu behalten: 1. Die grössten zugelassenen Beanspruchungen sind nicht für alle Theile vollständig auszunützen. Auf besondere Umstände und rechnerisch nicht verfolgbare Einflüsse kann schon bei der vorläufigen Berechnung Rücksicht genommen werden. 2. Die Querschnitte lassen sich nicht überall gleichmässig den Beanspruchungen anpassen, besonders dann nicht, wenn die Winkeleisen in gleicher Stärke durchlaufen und die Veränderlichkeit der Querschnitte nur durch die Höhe der Vertikalplatte und Auflegen von Horizontalplatten bewirkt wird, was meist zu empfehlen ist. 3. Der ungünstigere Einfluss koncentrierter Lasten (Strassenwalze u. s. w.) gegenüber der Belastung durch Menschengedränge macht sich besonders um die Bogenmitte und an den Bogenenden geltend (IV *K* und Beisp. 11). Es ist also gut, die Beanspruchungen durch Menschengedränge allein hier nicht bis zur zulässigen Grenze gelangen zu lassen. 4. Der Einfluss der Temperaturänderungen nimmt von den Kämpfern nach der Mitte hin zu, sodass ohne Berücksichtigung der Temperaturänderungen besonders nach der Mitte hin genügend Spielraum für ein Anwachsen der Beanspruchungen bleiben muss. Uebrigens können die Temperaturspannungen (bei Parabelbogen unter Einführung eines Schätzungswerthes von *c*, vergl. Beisp. 16) schon bei der vorläufigen Berechnung berücksichtigt werden. 5. Auch der Einfluss eines künstlichen Horizontalschubs lässt sich übersehen (Aufg. 6) und in dem Falle, dass er die Momente durch eine gleichmässig vertheilte Last (Eigengewicht) aufheben soll, im Voraus annähernd berechnen (Aufg. 6, 9). 6. Etwaige Bewegungen der Widerlager üben von den Kämpfern nach dem Scheitel hin wachsende Einflüsse aus (Beisp. 18).

Nachdem die vorläufige Ermittelung der Querschnitte in der angedeuteten Weise beendigt ist, findet eine Revision, Ausgleichung und Berichtigung der Bogen nach konstruktiven, aesthetischen und statischen Gesichtspunkten statt. Das Endergebniss war für die Cannstatter Brücke, dass sämmtliche Bogenquer-

schnitte entsprechend Fig. 143 durch eine Vertikalplatte von 1,2 cm Dicke und wechselnder Höhe h, vier Winkeleisen von 9/9/1,2 cm und zwei Horizontalplatten von 38/1,4 cm gebildet sind, wozu von den Mitten zwischen den zweiten und dritten Vertikalen noch horizontale Verstärkungsplatten von 38/1,2 cm kommen. Die entsprechenden h und halben Querschnittshöhen e (Entfernungen der äussersten Fasern von der Axschicht) sind in Kolumne 5 und 6 der Tabelle II (S. 265) eingetragen.

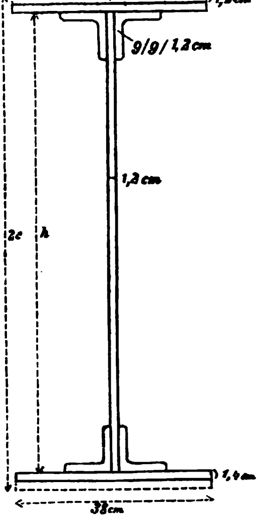
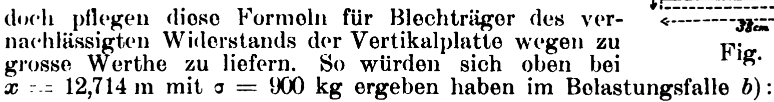


Fig. 143

Bemerkungen. Man hätte beabsichtigen können, die Gurtungsquerschnitte nach den Formeln § 8, 18) 19) zu berechnen, welche mit einer vorläufigen zulässigen Beanspruchung σ und $O = \sigma f_o$, $U = \sigma f_u$ unter Vernachlässigung der Füllung liefern:

$$f_o = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{N_x}{2} + \frac{M_x}{h}\right),$$
$$f_u = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{N_x}{2} - \frac{M_x}{h}\right), \qquad 7)$$



doch pflegen diese Formeln für Blechträger des vernachlässigten Widerstands der Vertikalplatte wegen zu grosse Werthe zu liefern. So würden sich oben bei $x = 12{,}714$ m mit $\sigma = 900$ kg ergeben haben im Belastungsfalle b):

$$f_o = \frac{1}{900}\left(\frac{179592}{2} + \frac{57668}{0{,}87}\right) = 173 \text{ qcm},$$

im Belastungsfalle c):

$$f_u = \frac{1}{900}\left(\frac{179765}{2} - \frac{42775}{2}\right) = 154 \text{ qcm},$$

während man thatsächlich mit $f_o = f_u = 139$ qcm ausreichte. Bei Verwendung der Formeln 7) wäre also hierauf Rücksicht zu nehmen.

Bezüglich der zulässigen Beanspruchungen von Bogen ist zu beachten, dass bei den meisten praktischen Ausführungen eine Nietverschwächung nicht gerechnet wurde, wie dies für gedrückte Theile bei vollkommener Ausfüllung der Nietlöcher theoretisch berechtigt erscheint. Wird nun beim Ausschreiben eines Bauwerkes mit elastischen Bogenträgern eine gewisse zulässige Beanspruchung vorgeschrieben, so rechnet entweder keiner der Bewerber eine Nietverschwächung, oder diejenigen, welche eine solche rechnen, befinden sich den Uebrigen gegenüber im Nachtheil. Dies gilt auch, wenn die Nietverschwächungen für das Bauwerk im Allgemeinen in Rechnung zu ziehen sind, da man eben für die Bogen keine annehmen zu müssen glaubt. Berücksichtigt man nun, dass das Maass der thatsächlichen Schwächung allerdings zweifelhaft ist und jedenfalls von der Güte der Arbeit abhängt, so empfiehlt es sich, bei Ausschreibung von Bogenträgern entweder genau anzugeben, welche Nietverschwächung zu rechnen ist (wie bei gezogenen Theilen, halb soviel, u. s. w.), oder die zulässige Beanspruchung für den Bogen so festzusetzen, dass eine Nietverschwächung überhaupt nicht mehr gerechnet zu werden braucht. Letzteres Vorgehen hat den Vortheil, dass alsdann bei Berechnung der Beanspruchungen und der Formänderungen die gleichen F, J, W verwendet werden können, während andernfalls für die Beanspruchungen die verschwächten, für die Formänderung und daraus folgende statisch unbestimmte Grössen (H, M, M' u. s. w.) die unverschwächten Querschnitte in Betracht zu ziehen sind. Im Folgenden gelten die erwähnten zulässigen Beanspruchungen ohne besondere Berücksichtigung von Nietverschwächungen.

B. Querschnittsverhältnisse. Horizontalschub.

Die Bogenquerschnitte sind wie am Schlusse von IV *A* angegeben bestimmt (S. 264, Fig. 143).

Da die vier Winkeleisen und zwei durchgehenden Horizontalplatten zusammen den Querschnitt

$$2\,.\,16{,}8\,.\,1{,}2 + 2\,.\,38\,.\,1{,}4 = 187{,}04 \text{ qcm},$$

und die zwei Verstärkungsplatten den Querschnitt

$$2\,.\,38\,.\,1{,}2 = 91{,}2 \text{ qcm}$$

haben, während das Trägheitsmoment eines Rechtecks der Seiten a, b in Hinsicht einer der Seiten a durch $\frac{a\,b^3}{3}$ ausgedrückt ist (vergl. Aufg. 3), so ergeben sich der ganze Bogenquerschnitt und das Trägheitsmoment desselben hinsichtlich der Axschicht bei $x = 0{,}174$ m, wo $h = 90$ cm, $e = 46{,}4$ cm (Tab. II):

$$F = 90\,.\,1{,}2 + 187{,}04 = 295{,}0 \text{ qcm},$$

$$J = \frac{2}{3}\,(38\,.\,46{,}4^3 - 18{,}8\,.\,45^3 - 15{,}6\,.\,43{,}8^3 - 2{,}4\,.\,36^3) = 440150,$$

und bei $x = 22{,}746$ m, wo $h = 79$ cm, $e = 42{,}1$ cm:

$$F = 79\,.\,1{,}2 + 187{,}04 + 91{,}2 = 373{,}0 \text{ qcm},$$

$$J = \frac{2}{3}\,(38\,.\,42{,}1^3 - 18{,}8\,.\,39{,}5^3 - 15{,}6\,.\,38{,}3^3 - 2{,}4\,.\,30{,}5^3) = 488110.$$

In gleicher Weise sind die übrigen J, F der Tabelle II berechnet, worauf auch die in Kolumne 9 eingetragenen $W = J : e$ und mit den $\cos\varphi$ der Kolumne 4 die in Kolumne 10 und 11 enthaltenen $F\cos\varphi$ und $J\cos\varphi$ folgen.

Tabelle II.

x m	y m	$\operatorname{tg}\varphi$	$\cos\varphi$	h cm	e cm	F qcm	J cm^4	W ccm	$F\cos\varphi$ qcm	$J\cos\varphi$ cm^4	$\frac{W}{F}$ cm
0	0	0,37542	0,93620	90	46,4	295,0	440150	9486	276,18	412068	32,16
0,174	0,0651	0,37269	0,93688	90	46,4	295,0	440150	9486	276,38	412368	32,16
2,682	0,9506	0,33346	0,94865	90	46,4	295,0	440150	9486	279,85	417548	32,16
5,190	1,7377	0,29423	0,95934	90	47,6	386,2	641690	13481	370,50	615599	34,91
7,698	2,4264	0,25500	0,96899	89	47,1	385,0	626620	13304	373,06	607189	34,56
10,206	3,0169	0,21577	0,97750	88	46,6	383,8	612100	13135	375,16	598328	34,22
12,714	3,5088	0,17654	0,98477	87	46,1	382,6	597430	12959	376,77	588331	33,87
15,222	3,9024	0,13731	0,99070	85	45,1	380,2	569050	12617	376,66	563758	33,19
17,730	4,1975	0,09808	0,99522	83	44,1	377,8	541300	12274	375,99	538713	32,49
20,238	4,3943	0,05885	0,99827	81	43,1	375,4	514410	11935	374,75	513520	31,79
22,746	4,4927	0,01962	0,99981	79	42,1	373,0	488110	11594	372,93	488017	31,08
24,000	4,5050	0	1	79	42,1	373,0	488110	11594	373,00	488110	31,08
Mittel M =									358,75 = c	539827 = k	
1	5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Wenn z_0, z_1, z_2, . . z_{11} die in einer der Kolumnen 2 bis 10 dieser Tabelle für $x = 0$ bis $x = \frac{l}{2}$ angeführten Zahlen bezeichnen, dann hat man die entsprechenden Mittelwerthe für den ganzen Bogen:

$$M = \left(\frac{z_0+z_1}{2}\,0{,}174 + \frac{z_1+z_2}{2}\,2{,}508 + \ldots + \frac{z_9+z_{10}}{2}\,2{,}508 + \frac{z_{10}+z_{11}}{2}\,1{,}254\right)\frac{1}{24}$$

oder auch:

$$M = (0{,}087\,z_0 + 1{,}341\,z_1 + 2{,}508\,(z_2 + \ldots z_9) + 1.881\,z_{10} + 0{,}627\,z_{11})\,\frac{1}{24}. \qquad a)$$

Dieser Ausdruck wurde für die der Tabelle II beigefügten c, k verwendet. (Auch die am Schlusse von § 27 erwähnten Mittelwerthe von $J:F$ sind in analoger Weise berechnet).

Nach § 15, 7) hat man den Horziontalschub durch beliebige Belastung:

$$H = \frac{5}{(1+\varepsilon)\,8\,f\,l^3}\sum_0^l P\,f(a)$$

mit

$$f(a) = a\,(l-a)\,(l^2 + l\,a - a^2 - \beta\,l^2),$$

und nach § 16, 21) speziell durch eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von g per Längeneinheit:

$$H = \frac{1-5/6\,\beta}{1+\varepsilon}\,\frac{g\,l^2}{8\,f}. \qquad 3)$$

Durch eine beliebige Temperaturänderung τ entsteht nach § 16, 8):

$$H = \frac{15\,c}{(1+\varepsilon)\,8\,f^2}\,E\,\alpha\,\tau, \qquad 4)$$

während eine Aenderung $\Delta\,l$ der Spannweite nach § 16, 9) bewirken würde:

$$H = -\frac{15\,c}{(1+\varepsilon)\,8\,f^2}\,\frac{E\,\Delta\,l}{l}. \qquad 5)$$

In diesen Ausdrücken sind mit $l = 48$ m, $f = 4{,}505$ m:

$$\frac{l^2}{8\,f} = 63{,}926 \text{ m}, \qquad \frac{8\,f^2}{15} = 11{,}4164 \text{ qm}, \qquad \frac{8\,f\,l^3}{5} = 797138 \text{ m}^4,$$

$$r = \frac{l^2}{8\,f} + \frac{f}{2} = 66{,}181 \text{ m}, \qquad \left(\frac{r\,f}{r-f}\right)^2 = 23{,}388 \text{ qm}.$$

und mit $c = 539827$ cm^4, $k = 358{,}75$ qcm:

$$\gamma = \frac{c}{k} = 1504{,}74 \text{ qcm},$$

wonach mit Rücksicht auf § 15, 40) und § 16, 10) weiter folgen:

$$\varepsilon = \frac{15\,\gamma}{8}\left(\frac{r-f}{r\,f}\right)^2 = \frac{15\,.\,1504{,}74}{8\,.\,233880} = 0{,}012063,$$

$$\beta = \frac{3\,\gamma}{r^2}\,\frac{r-f}{f} = \frac{3\,.\,1504{,}74}{6618{,}1^2\,.\,4{,}505} = 0{,}001411.$$

$$\frac{1-5/6\,\beta}{1+\varepsilon} = \frac{0{,}998824}{1{,}012063} = 0{,}98692.$$

$$\frac{1-5/6\,\beta}{1+\varepsilon}\,\frac{l^2}{8\,f} = 0{,}98692\,.\,63{,}929 = 63{,}093 \text{ m}.$$

$$\frac{(1+\varepsilon)\,8\,f\,l^3}{5} = 1{,}012063\,.\,797138 = 806754 \text{ m}^4,$$

$$\frac{15\,c}{(1+\varepsilon)\,8\,f^2} = \frac{539827}{1{,}012063\,.\,114{,}164} = 4{,}6722 \text{ qcm}.$$

Wir erhalten damit nach 1)—5) den Horizontalschub für beliebige Belastung:

$$H = \frac{\sum\limits_{0}^{1} P f(a)}{806754}, \qquad b)$$

für eine gleichmässig vertheilte Last von g per Längeneinheit:

$$H = 63{,}093\, g, \qquad c)$$

für eine beliebige Temperaturänderung τ:

$$H = 4{,}6722\, E \alpha \tau, \qquad d)$$

und für eine Aenderung der Spannweite um Δl:

$$H = -\, 4{,}6722\, E \frac{\Delta l}{l}, \qquad e)$$

worin E per qcm in Einheiten von P, H einzusetzen ist; wir werden dieselben in kg ausdrücken.

Wird wie bei der Cannstatter Brücke ein künstlicher Horizontalschub K angewandt, so tritt dieser den aus andern Einflüssen herrührenden Werthen von H bei jeder Belastung hinzu.

C. Belastungsverhältnisse.

Die Vertheilung der Fahrbahnlast auf die einzelnen Bogenträger lässt sich mit Rücksicht auf die Continuität der Querträger (welche alternirend über die 4 innern bezw. über alle 6 Tragwände weglaufen) und andere Umstände nicht genau ermitteln, es wurden die feste Last und die grösste Verkehrslast für die 6 Bogen jeder Oeffnung als gleichgross angenommen. Auf Grund der vorgeschriebenen Belastungen durch Menschengedränge (400 kg per qm Fahrbahn, 560 kg per qm Fusswege) und die Anordnung der Konstruktion würden allerdings die Stirnbogen etwas mehr als die mittlere Verkehrslast neben etwas weniger als der mittleren festen Last erhalten, da aber auch jene Vorschriften einer gewissen unvermeidlichen Willkür nicht entbehren, so konnte man sich mit der angenommenen Vertheilungsweise umsomehr zufrieden geben, als damit die Berechnung vereinfacht wurde und alle 6 Bogen gleiche Querschnitte erhielten.

Nach dem Bauprogramm sollten als Eigengewicht von 1 cbm Material gelten:

für Holz	1000	kg,
„ Asphalt	2200	„ ,
„ Beton	2500	„ ,
„ Flusseisen	7850	„ .

Mit Rücksicht hierauf und die Anordnung der Brückenbahn setzte sich das Eigengewicht per Meter der letzteren, einschliesslich der zum Belage verwendeten Zoreseisen wie folgt zusammen.

Fahrbahn.		
41 Zoreseisen von 1 m Länge und 24,2 qm Querschnitt (D N P Nr. 11)	$41 \,.\, 0{,}00242 \,.\, 7850 =$	777 kg
Betonirung auf 11,4 m Breite und 0,15 m Höhe, abzüglich des Raums für die Zoreseisen	$\left(11{,}4 \,.\, 0{,}15 - 41 \,.\, 0{,}11 \frac{0{,}24 + 0{,}063}{2}\right) 2500 =$	2567 „
11 qm Holzpflaster von 0,15 m Höhe	$11 \,.\, 0{,}15 \,.\, 1000 =$	1650 „
Fusswege.		
8 Zoreseisen von 3,35 m Länge und 10,1 qcm Querschnitt	$8 \,.\, 3{,}35 \,.\, 0{,}00101 \,.\, 7850 =$	212 „
Betonirung auf 2 . 3,35 m Breite und 0,11 m Höhe, abzüglich des Raums der Zoreseisen	$6{,}7 \left(0{,}11 - 4 \,.\, 0{,}06 \frac{0{,}16 + 0{,}042}{2}\right) 2500 =$	1436 „
Asphaltirung auf 2 . 3,35 m Breite und 0,03 m Höhe	$6{,}7 \,.\, 0{,}03 \,.\, 2200 =$	442 „
2 Randsteine von 124 kg per m	$2 \,.\, 124 =$	248 „
2 Geländer von 150 kg per m	$2 \,.\, 150 =$	300 „
	zusammen per m	7632 kg.

Das Fahrbahngewicht per m beträgt also für jeden der 6 Bogen nach oben abgerundet 1280 kg, wovon $\frac{777+212}{6} = 165$ kg auf die Zoreseisen kommen.

Das Eisengewicht der hier betrachteten Brückenöffnung ohne Zoreseisen und Auflager ergab sich auf Grund der vorläufigen Berechnung und Konstruktion mit Berücksichtigung der nachträglich vorgenommenen Aenderungen (vergl. S. 259) per Meter Bogen 756 kg. Da jedoch die Vertikalplatten der mittleren Oeffnung 0,04 m höher, also bei 1,2 cm Dicke per m um $0{,}04 \,.\, 0{,}012 \,.\, 7850 = 4$ kg schwerer sind, so wurde das fragliche Eisengewicht per m für alle Bogen der Brücke gleich 760 kg gesetzt, wovon 340 kg auf das Eigengewicht der Bogen selbst entfallen.

Als Verkehrslast war für die Berechnung der Bogen Menschengedränge anzunehmen (über die Belastung durch eine Strassenwalze siehe IV *K*), und zwar nach den Vorschriften des Bauprogramms 400 kg per qm der 11 m breiten Fahrbahn und 560 kg per qm der zwei 3,5 m breiten Fusswege. Bei gleichmässiger Vertheilung auf alle 6 Bogen macht dies per m Bogen $\frac{400 \,.\, 11 + 560 \,.\, 7}{6} = 1387$ kg, was auf 1390 kg abgerundet wurde.

Für jeden Bogen kamen also per m Spannweite in Rechnung:

Eigengewicht der Brücke	$G = 1280 + 760 =$	2040 kg,
Eigengewicht des Bogens allein	$g = \frac{G}{6} =$	340 „ ,
Eigengewicht ohne Bogen		1700 „ ,
Verkehrslast	$p =$	1390 „ .

Das Eigengewicht der Bogen selbst kann als gleichmässig vertheilt auf dieselben gelten, (g per m Spannweite), während das übrige Eigengewicht der Brücke und die Verkehrslast durch die Vertikalständer konzentrirt auf die Bogen übertragen werden. Da die Entfernungen der Vertikalständer 2,508 m betragen, so sind die übertragenen Lasten für das Eigengewicht:

$$P = 1700 \,.\, 2{,}508 = 4264 \text{ kg},$$

für die Verkehrslast:

$$P = 1390 \,.\, 2{,}508 = 3486 \text{ kg},$$

für das Eisengewicht einschliesslich Zoreseisen, ohne sonstige Fahrbahn und Geländer:

$$P = (760 - 340 - 165)\, 2{,}508 = 1467 \text{ kg}.$$

Die Vertikalständer bei den Kämpfern erhalten zwar mit Rücksicht auf die Anordnung der Fahrbahnauflager über den Pfeilern u. s. w. nur $^2/_3$ dieser Lasten, doch kann man mit lauter gleichen P rechnen, wenn bei den Kämpfervertikalen der jeweilige Faktor von P nur mit $^2/_3$ seines Werthes in Rechnung gezogen wird.

Die Abscissen a der Vertikalständer und damit der Angriffspunkte konzentrirter Lasten am Bogen nebst einigen davon abhängigen Grössen sind in Tabelle III (S. 269) zusammengestellt. Da wegen $l = 48$ m, $\beta = 0{,}001411$:

$$l^2 + l\,a - a^2 - \beta\, l^2 = a\,(l - a) + 2300{,}75,$$

so war die letzte Zahl zu den Werthen der vierten Kolumne zu addiren, um diejenigen der fünften zu erhalten. Bei Vernachlässigung von β wäre 2304 an Stelle von 2300,75 getreten, was keine nennenswerthen Unterschiede bedingt hätte (abgesehen etwa von der Berechnung eines künstlichen Horizontalschubs, vergl. Aufg. 9 und IV *E*). Durch Multiplikation der Zahlen in der vierten and fünften Kolumne ergaben sich zufolge IV *B* 2) die $f(a)$ in der fünften. Die $a\,(l - a)$, $l^2 + l\,a - a^2 - \beta\, l^2$, $f(a)$ haben für zwei symmetrisch zur Mitte liegende Lastangriffspunkte gleiche Werthe, sodass die in der Tabelle angeführten Werthe nicht nur für die danebenstehenden a, $l - a$, sondern auch bei deren Vertauschung gelten. Entsprechend dem oben Gesagten sind die $l - a$, $a\,(l - a)$, $f(a)$ und $a\,(3\, l^2 - 4\, a^2)$ der Kämpfervertikale in zwei Faktoren eingesetzt, deren erster $^3/_2$ ist, während der zweite $^2/_3$ des ganzen Werthes beträgt. Bei der Addition sind nur die zweiten Faktoren berücksichtigt.

Tabelle III.

Knotenpunkte	a m	$l-a$ m	$a(l-a)$ qm	$l^2+la-a^2-\beta l^2$ qm	$f(a)$ m⁴	b m	$3l^2-4a^2$ qm	$a(3l^2-4a^2)$ cbm
0	0,174	$\frac{3}{2}$ 31,884	$\frac{3}{2}$ 5,55	2309,1	$\frac{3}{2}$ 12808	7,279	6911,88	$\frac{3}{2}$ 802
1	2,682	45,318	121,54	2422,3	294406	6,939	6883,24	18461
2	5,190	42,810	222,18	2522,9	560538	6,662	6804,24	35314
3	7,698	40,302	310,24	2611,0	810037	6,437	6674,96	51384
4	10,206	37,794	385,73	2686,5	1036264	6,256	6495,36	66292
5	12,714	35,286	448,63	2749,4	1233463	6,113	6265,40	79658
6	15,222	32,778	498,95	2799,7	1396910	6,004	5985,16	91106
7	17,730	30,270	536,69	2837,4	1522804	5,924	5654,60	100256
8	20,238	27,762	561,85	2862,6	1608352	5,872	5273,68	106729
9	22,746	25,254	574,43	2875,2	1651601	5,846	4842,48	110147
	Summe:	349,418	3665,79		10127183			660149

Mit Rücksicht auf die S. 267 gegebenen Formeln *c*) *b*) und § 16, 18) 36) hat man den Horizontalschub und die Vertikalreaktionen der Kämpfer durch die feste Last allein:

$$H = 63{,}093 \, . \, 340 + 4264 \, \frac{2 \, . \, 10127183}{806754} = 21439 + 107052 = 128491 \text{ kg},$$

$$V = 340 \, . \, 24 + 4264 \left(\frac{2}{3} + 9\right) = 8160 + 41219 = 49379 \text{ kg},$$

und durch die Verkehrslast allein bei Vollbelastung des Bogens:

$$H = 107052 \, \frac{1390}{1700} = 87531 \text{ kg}, \qquad V = 41219 \, \frac{1390}{1700} = 33703 \text{ kg}.$$

D. Momente und Normalkräfte durch das Eigengewicht allein.

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von g per Längeneinheit hat man nach § 16, 20) 21) 5) 19) mit § 15, 8):

$$M_x = \left(1 - \frac{1-5/6\,\beta}{1+\varepsilon}\right)\frac{g}{2}\,x\,(l-x), \qquad 1)$$

$$N_x = \left[\left(\frac{l}{2} - x\right)\operatorname{tg}\varphi + \frac{1-5/6\,\beta}{1+\beta}\,\frac{l^2}{8f}\right] g\cos\varphi, \qquad 2)$$

wonach mit den unter IV C festgestellten Werthen der Brüche für das gleichmässig vertheilte Eigengewicht der Bogen allein von $g = 340$ kg:

$$M_x = 2{,}2236\,x\,(l-x),$$

$$N_x = [(24-x)\operatorname{tg}\varphi + 63{,}093]\,340\cos\varphi. \qquad b)$$

Durch beliebige Belastung entstehen nach § 16, 3)--5):

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P\,(x-a), \qquad 3)$$

$$N_x = \left[\left(V - \sum_0^x P\right)\operatorname{tg}\varphi + H\right]\cos\varphi, \qquad 4)$$

wonach für das koncentrirte (durch die Vertikalen übertragene) Eigengewicht mit den am Schlusse von IV C bestimmten V, H:

$$M_x = 41219\,x - 107052\,y - \sum_0^x P\,(x-a). \qquad c)$$

$$N_x = \left[\left(41219 - \sum_0^x P\right)\operatorname{tg}\varphi + 107052\right]\cos\varphi. \qquad d)$$

Liegt eine koncentrirte Last P gerade bei $a = x$ (Fig. 144), so ist es bei Berechnung von M_x nach 3) gleichgültig, ob man dieselbe in $\sum_0^x P\,(x-a)$ berücksichtigt oder nicht, da sich auch im ersteren Falle wegen $x - a = 0$ ihr Beitrag gleich Null ergibt. Dagegen kann es sich bei Berechnung von N_x fragen, ob eine solche Last in $\sum_0^x P$ aufzunehmen ist. Die Frage ist für die allein nöthige Berechnung der ersten Trägerhälfte zu verneinen, da die Summengrenzen von $\sum_0^x P$ genau genommenen nicht Punkte oder Abscissen, sondern Querschnitte bedeuten (§ 1) und auf der ersten Trägerhälfte eine Last P bei Abscisse $a = x$ nach dem Querschnitt x auf den Träger kommt (Fig. 144).

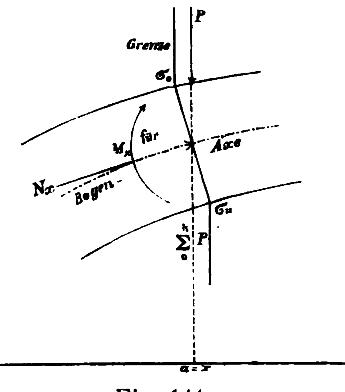


Fig. 144

Die Werthe der y, $\operatorname{tg}\varphi$, $\cos\varphi$ für die in der folgenden Tabelle IV angeführten Querschgitte x sind in Tabelle II gegeben, die $x\,(l-x)$ stimmen mit den in Tabelle III enthaltenen $a\,(l-a)$ überein, bezüglich der durch die Vertikalen übertragenen Lasten P wurde in IV C das Nöthige festgestellt. Wir erhalten z. B. bei $x = 2{,}682$ m für das gleichmässig vertheilte Eigengewicht:

$$M_x = 2{,}2236\,.\,121{,}54 = 270 \text{ mk},$$

$$N_x = (21{,}318\,.\,0{,}33346 + 63{,}093)\,340\,.\,0{,}94865 = 22643 \text{ kg},$$

für das koncentrirte Eigengewicht:

$$M_x = 41219\,.\,2{,}682 - 107052\,.\,0{,}9506 - 4264\,.\,2{,}508\,.\,\frac{2}{3} = 1656 \text{ mk}.$$

$$N_x = (38376\,.\,0{,}33346 + 107052)\,0{,}94865 = 113695 \text{ kg}.$$

also für das gesammte Eigengewicht:

$$M_x = 270 + 1656 = 1926 \text{ mk},$$
$$N_x = 22643 + 113695 = 136338 \text{ kg};$$

ferner bei $x = 5{,}190$ m für das gleichmässig vertheilte Eigengewicht:

$$M_x = 2{,}2236 \,.\, 222{,}18 = 494 \text{ mk},$$
$$N_x = (18{,}810 \,.\, 0{,}29423 + 63{,}093)\, 340 \,.\, 0{,}95934 = 22384 \text{ kg},$$

für das koncentrirte Eigengewicht:

$$M_x = 41219 \,.\, 5{,}190 - 107052 \,.\, 1{,}7377 - 4264 \,.\, 2{,}508 \left(\frac{2}{3}\, 2 + 1\right) = 2950 \text{ mk},$$
$$N_x = (34112 \,.\, 0{,}29423 + 107052)\, 0{,}95934 = 112328 \text{ kg},$$

und für das gesammte Eigengewicht:

$$M_x = 494 + 2950 = 3444 \text{ mk},$$
$$N_x = 22384 + 112328 = 134712 \text{ kg}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen M_x, N_x der Tabelle IV berechnet.

Mit den gegebenen M_x, N_x durch das gesammte Eigengewicht und den aus Tabelle II (S. 265) zu entnehmenden W, F erhält man aus

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W} \tag{5}$$

die entsprechenden Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement. Per qcm ergeben sich bei $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = \frac{136338}{295{,}0} + \frac{196200}{9486} = 482{,}9 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{136338}{295{,}0} - \frac{196200}{9486} = 441{,}5 \text{ ,, },$$

und bei $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = \frac{134712}{386{,}2} + \frac{344400}{13481} = 374{,}3 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \frac{134712}{386{,}2} - \frac{344400}{13441} = 323{,}3 \text{ ,, }.$$

Tabelle IV.

bei x	durch das gleichmässig vertheilte Eigengewicht		durch das koncentrirte Eigengewicht		durch das gesammte Eigengewicht.			
	M_x	N_x	M_x	N_x	M_x	N_x	σ_o	σ_u
m	mk	kg	mk	kg	mk	kg	kg	kg
2,682	270	22643	1656	113695	1926	136338	482,9	441,5
5,190	494	22384	2950	112328	3444	134712	374,3	323,3
7,698	690	22156	4083	111107	4773	133263	382,1	310,3
10,206	858	21959	5034	110039	5892	132098	389,1	299,3
12,714	998	21792	5846	109128	6844	130920	395,0	289,4
15,222	1110	21658	6488	108377	7598	130035	402,2	281,8
17,730	1193	21557	6980	107789	8173	129346	409,0	275,8
20,238	1249	21490	7301	107368	8550	128858	414,9	271,7
22,746	1277	21456	7462	107116	8739	128572	420,1	269,3

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der beiden letzten Kolumnen der Tabelle IV berechnet.

Bemerkungen. Hätten wir das ganze Eigengewicht als gleichmässig vertheilt angenommen, so würde unter Wegfall der Berechnungen nach 3) 4) die M_x, N_x, σ_o, σ_u durch das gesammte Eigengewicht nach 1) 2) 5) $\frac{2040}{340} = 6$ mal so gross als oben durch das gleichmässig vertheilte Eigengewicht. Hätten wir dagegen das Eigengewicht der Bogen in den koncentrirten Lasten eingeschlossen, so würden unter Wegfall der Berechnungen nach 1) 2) die M_x, N_x, σ_o, σ_u nach 3) 4) 5) $\frac{2040}{1700} = 1{,}2$ mal so gross, als oben durch das koncentrierte Eigengewicht (vergl. Beisp. 12).

E. Künstlicher Horizontalschub.

Während bei Vernachlässigung von ε, β im Ausdrucke für den Horizontalschub für beliebige auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Lasten in allen Querschnitten $M_x = 0$ wäre, haben sich in IV D durch das Eigengewicht allein Momente ergeben, welche keineswegs ohne Weiteres zu vernachlässigen sind. Seitens der Esslinger Maschinenfabrik war die Beseitigung der vom Eigengewicht herrührenden Momente durch künstliche Ueberhöhung der Bogen vorgeschlagen worden.

Nach den „besonderen Bestimmungen“ für die Lieferung der Eisenkonstruktion sollte eine Ueberhöhung der Bogen derart stattfinden, dass auch bei der grössten Kälte kein Einschlagen der Längsträger (Obergurten der Tragwände) unter eine Gerade stattfinden könne. Die Ueberhöhung hat durch einen künstlichen Horizontalschub zu erfolgen, welcher bei vollständig gleichmässig vertheilter Last so gewählt werden kann, dass alle durch die letzteren erzeugten M_x aufgehoben werden (Aufgabe 9). Damit würde für die betreffende Belastung die resultirende Schnittkraft gleich der Normalkraft N_x und in der Axe angreifend, sodass die kleinstmöglichen Spannungen σ_o, σ_u entstünden. In unserm Falle lässt sich dies zwar wegen des theilweise konzentrirten Eigengewichts nicht für alle Querschnitte vollständig, aber doch annähernd erreichen (siehe die Tabelle S. 281).

Die M_x durch das gesammte Eigengewicht allein sind positiv. Durch einen beliebigen Horizontalschub H allein dagegen wird nach § 16, 45):

$$M_x = -Hy. \qquad 1)$$

Dividirt man also die in Tabelle IV (S. 271) zuletzt angeführten M_x durch die in Tabelle II (S. 265) gegebenen y der zugehörigen Querschnitte, so erhält man diejenigen H, durch welche jene Momente aufgehoben werden könnten. Beispielsweise folgen für $x = 2682$ m und 5,,190 m:

$$\frac{1926}{0{,}9506} = 2026 \text{ kg}, \qquad \frac{3444}{1{,}7377} = 1982 \text{ kg}.$$

Die so berechneten Werthe sind in Kolumne 2 der Tabelle V eingetragen. Mit Rücksicht auf diese Werthe wurde der künstliche Horizontalschub gewählt:

$$K = 1950 \text{ kg},$$

womit die Momente gerade da fast vollständig beseitigt werden, wo ohnehin die grössten Beanspruchungen entstehen (Tabelle S. 281).

Ein beliebiger Horizontalschub H allein erzeugt nach § 16, 46) die Normalspannungen:

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos\varphi}{F} - \frac{y}{W}\right) H, \qquad \sigma_u = \left(\frac{\cos\varphi}{F} + \frac{y}{W}\right) H. \qquad 2)$$

Die Werthe y, $\cos\varphi$, F, W sind aus Tabelle II (S. 265) zu entnehmen. Wir erhalten als Beitrag des künstlichen Horizontalschubs allein bei $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = \left(\frac{0{,}94865}{295{,}0} - \frac{95{,}06}{9486}\right) H = -\ 0{,}006805 \,.\, 1950 = -\ 13{,}3 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \left(\frac{0{,}94865}{295{,}0} + \frac{95{,}06}{9486}\right) H = 0{,}013237 \,.\, 1950 = 25{,}8 \text{ ,, ,}$$

und bei $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = \left(\frac{0{,}95934}{386{,}2} - \frac{173{,}77}{13481}\right) H = -\ 0{,}010406 \,.\, 1950 = -\ 20{,}3 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \left(\frac{0{,}95934}{386{,}2} + \frac{173{,}77}{13481}\right) H = 0{,}015374 \,.\, 1950 = 30{,}0 \text{ ,, .}$$

In gleicher Weise sind die übrigen σ_o, σ_u der folgenden Tabelle V berechnet.

Die Werthe der Klammerausdrücke wurden in den beiden letzten Kolumnen vorgemerkt, weil sie auch bei Ermittelung der Einflüsse von Aenderungen der Temperatur und der Spannweiten zur Verwendung kommen.

Tabelle V.

x m	$\frac{M_x}{y}$ kg	durch K allein σ_o kg	σ_u kg	$\frac{\cos\varphi}{F} - \frac{y}{W}$	$\frac{\cos\varphi}{F} + \frac{y}{W}$
2,682	2226	— 13,3	25,8	— 0,006805	0,013237
5,190	1982	— 20,3	30,0	— 0,010406	0,015374
7,698	1967	— 30,7	40,5	— 0,015721	0,020755
10,206	1953	— 39,8	49,8	— 0,020421	0,025515
12,714	1950	— 47,8	57,8	— 0,024502	0,029650
15,222	1947	— 55,2	65,4	— 0,028324	0,033536
17,730	1947	— 61,5	71,8	— 0,031564	0,036832
20,238	1946	— 66,6	77,0	— 0,034159	0,039477
22,746	1945	— 70,3	80,8	— 0,036070	0,041430

Bemerkungen. Bei vollständig gleichmässig vertheiltem Eigenwicht wäre nach Formel 5) der Aufgabe 9 mit Rücksicht auf IV B (S. 265) und $u = 2040$ kg der künstliche Horizontalschub $K = 1705$ kg oder 14,5 % kleiner als oben geworden. Unter Vernachlässigung von β würde sich im gleichen Falle $K = 1554$ kg oder 25,5 % kleiner als oben ergeben haben. Wenn keine künstliche Ueberhöhung stattfinden soll, so fällt natürlich die ganze K betreffende Berechnung weg. Die Berücksichtigung von β kann dann um so eher unterbleiben.

F. Ungünstigste Belastungen. Kämpferdrucklinie. Kernlinien.

Zur Bestimmung der Belastungen für die Grenzwerthe der Normalspannungen σ_o, σ_u in beliebigen Querschnitten x haben wir in §§ 15, 16 (S. 62, 84) ein genaueres und ein einfacheres Verfahren angeführt. Beide erfordern die Ermittelung der Kämpferdrucklinie.

Die Gleichung der letzteren ist nach § 16, 40):

$$b = \frac{1 + \varepsilon}{l^2 + l\,a - a^2 - \beta\, l^2} \frac{8 f l^2}{5} \qquad 1)$$

und in unserm Falle mit Rücksicht auf IV B (S. 265):

$$b = \frac{16808}{l^2 + l\,a - a^2 - \beta\,l^2},$$

worin $l = 48$ m; $l^2 - \beta\,l^2 = 2300.75$ qm (S. 268). Hieraus folgen z. B.

für $a = 0$ $b = 7{,}306$ m,

„ $a = 24$ m $b = 5{,}843$ „,

während die übrigen Ordinaten b bereits in Tabelle III (S. 269) eingetragen sind. Die Kämpferdrucklinie konnte hiernach auf der beigegebenen Tafel verzeichnet werden. Selbstverständlich hätten wir β und selbst ε in 1) vernachlässigen können.

Die Kernlinien sind nur für die genaueren Bestimmungen der ungünstigsten Belastungen nöthig. Sie liegen im Falle symmetrisch zur Axschicht angeordneter Querschnitte zufolge § 16, 44) um

$$k = \frac{W}{F} \tag{2}$$

oberhalb und unterhalb der Bogenaxe. Diese Werthe k sind bereits in Kolumne 12 der Tabelle II (S. 265) enthalten. Die Kernlinien wurden darnach auf der beigegebenen Tafel durch die punktirten Linien oberhalb und unterhalb der ausgezogenen Bogenaxe angedeutet.

Auf der gleichen Tafel sind die Belastungen für die die Grenzwerthe max. druck σ_0, max. pos. M_x, min. druck σ_u in den Querschnitten unter den Axen der Vertikalen zusammengestellt. Um die Belastungen für min. druck σ_0, max. neg. M_x, max. druck σ_u zu erhalten, hat man nur feine Striche (Eigengewicht allein) und fette Striche (Vollbelastung) vertauscht zu denken. Bei der genaueren Berechnung der Grenzwerthe von σ_0, σ_u ist die Ermittelung der Belastung für die Grenzwerthe von M_x, bei der einfacheren Berechnung die Ermittelung der übrigen Belastungen überflüssig. Ueber die Resultate beider Verfahren siehe am Schlusse von § 11 (S. 41).

Wir haben bereits S. 259 erwähnt, dass die genauere Berechnung der σ_0, σ_u in der Allgemeinen Bauzeitung von 1895 mitgetheilt ist, während hier das einfachere Verfahren vorgeführt werden soll. Bei diesem sind für max. druck σ_0 und min. druck σ_u die Belastungen für max. pos. M_x, für max. druck σ_u und min. druck σ_0 die Belastungen für max. neg. M_x zu verwenden.

G. Erste Grenzwerthe der Normalspannungen durch die Verkehrslast allein.

Diejenigen Knotenpunkte (vergl. Fig. 142, S. 260), welche sich durch die am Schlusse von IV F erwähnte Konstruktion für die max. druck σ_0 und min. druck σ_u als vollbelastet ergaben (s. Tafel), sind in der zweiten Kolumne von Tabelle VI (S. 277) bei den betreffenden Querschnitten angeführt. Im Folgenden ist bezüglich der Kämpfervertikalen, welche nur zweidrittel so grosse Lasten wie die übrigen Vertikalen übertragen, das unter IV C Gesagte (S. 268) zu beachten.

Da im Falle beliebig vieler gleicher Lasten P die Vertikalreaktion des Kämpfers 0 und der Horizontalschub zufolge § 16, 2) und S. 267):

$$V = \frac{P}{48}\sum_0^1 (l-a), \qquad H = \frac{P}{806754}\sum_0^1 f(a), \tag{a}$$

und speziell für die Verkehrslasten $P = 3486$ kg:

$$V = 72{,}625 \sum_0^1 (l-a), \qquad H = \frac{\sum_0^1 f(a)}{231425}, \tag{b}$$

so wurden zunächst die hierin auftretenden Summen x für die in Frage kommenden Belastungsfälle auf Grund von Tabelle III berechnet. Man erhält für $x = 2{,}682$ m:

$$\sum_0^1 (l-a) = 31{,}884 + 45{,}318 + 42{,}810 + 40{,}302 + 37{,}794 + 35{,}282 + 32{,}778$$
$$= 266{,}172 \text{ m},$$

$$\sum_0^1 f(a) = 12808 + 294406 + 560538 + 810037 + 1036264 + 1233463 + 1396910$$
$$= 5344426 \text{ m}^4,$$

für $x = 5{,}190$ m, $x = 7{,}698$ m, $x = 10{,}206$ m:

$$\sum_0^1 (l-a) = 266{,}172 + 30{,}270 = 296{,}442,$$

$$\sum_0^1 f(a) = 5344426 + 1522804 = 6867230,$$

für $x = 12{,}714$ m:

$$\sum_0^1 (l-a) = 296{,}442 + 27{,}762 = 324{,}204,$$

$$\sum_0^1 f(a) = 6867230 + 1608352 = 8475582,$$

für $x = 15{,}222$ m, $x = 17{,}730$ m:

$$\sum_0^1 (l-a) = 324{,}204 + 25{,}254 = 349{,}458,$$

$$\sum_0^1 f(a) = 8475582 + 1651601 = 10127183,$$

für $x = 20{,}238$ m:

$$\sum_0^1 (l-a) = 40{,}302 + 37{,}794 + 35{,}286 + 32{,}778 + 30{,}270 + 27{,}762 + 25{,}254 + 22{,}746$$
$$= 252{,}192,$$

$$\sum_0^1 f(a) = 810037 + 1036264 + 1233463 + 1396910 + 1522804 + 1608352 + 1651601 . 2$$
$$= 10911032,$$

und für $x = 22{,}746$ m:

$$\sum_0^1 (l-a) = 32{,}778 + 30{,}270 + 27{,}762 + 25{,}254 + 22{,}746 + 20{,}238 = 159{,}048,$$

$$\sum_0^1 f(a) = 1396910 + 1522804 + 1608352 . 2 + 1651601 . 2 = 9439620.$$

Mit diesen Summen, welche in der dritten und vierten Kolumne von Tabelle VI (S. 277) aufgeführt sind, ergaben sich nach *b*) die in der fünften und sechsten Kolumne eingesetzten V, H.

Für die gleichen Belastungsfälle erhalten wir bei den neun in der Tabelle angeführten Querschnitten der Reihe nach:

$$V_x = V - \sum_0^1 P = 19331 - 3486 . \frac{2}{3} = 17007 \text{ kg}$$

$$21529 - 3486 . \frac{5}{3} = 15719$$

$$21529 - 3486 . \frac{8}{3} = 12233$$

$$21529 - 3486 . \frac{11}{3} = 8747$$

$$23545 - 3486 . \frac{14}{3} = 7277$$

$$
\begin{aligned}
25380 - 3486 \,.\, \tfrac{17}{3} &= 5626 \text{ kg} \\
25380 - 3486 \,.\, \tfrac{20}{3} &= 2140 \\
18315 - 3486 \,.\, 5 &= 885 \\
11551 - 3486 \,.\, 3 &= 1093.
\end{aligned}
$$

und ebenso:

$$
\begin{aligned}
\sum_0^x P(x-a) = 3486 \,.\, 2{,}508 \,.\, \tfrac{2}{3} &= 5829 \text{ mk} \\
3486 \,.\, 2{,}508 \left(\tfrac{2}{3}\, 2 + 1\right) &= 20400 \\
3486 \,.\, 2{,}508 \left(\tfrac{2}{3}\, 3 + 2 + 1\right) &= 43714 \\
3486 \,.\, 2{,}508 \left(\tfrac{2}{3}\, 4 + 3 + 2 + 1\right) &= 75772 \\
3486 \,.\, 2{,}508 \left(\tfrac{2}{3}\, 5 + 4 + 3 + 2 + 1\right) &= 116572 \\
3486 \,.\, 2{,}508 \left(\tfrac{2}{3}\, 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1\right) &= 166115 \\
3486 \,.\, 2{,}508 \left(\tfrac{2}{3}\, 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1\right) &= 224401 \\
3486 \,.\, 2{,}508\, (5 + 4 + 3 + 2 + 1) &= 131143 \\
3486 \,.\, 2{,}508\, (3 + 2 + 1) &= 52457.
\end{aligned}
$$

Mit den nun bekannten, in Tabelle VI (S. 277) zusammengestellten Werthen folgen nach

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \tag{1}$$

$$N_x = (V_x \operatorname{tg} \varphi + H) \cos \varphi, \tag{2}$$

unter Verwendung der in Tabelle II (S. 265) gegebenen y, $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$, für die von der Verkehrslast allein herrührenden max. druck σ_o und min. druck σ_u die Momente:

$$
\begin{aligned}
M_x = {} & 19331 \,.\, 2{,}682 - 23094 \,.\, 0{,}9506 - 5829 = 24064 \text{ mk} \\
& 21529 \,.\, 5{,}190 - 29674 \,.\, 1{,}7377 - 20400 = 39771 \\
& 21529 \,.\, 7{,}698 - 29674 \,.\, 2{,}4264 - 43714 = 50015 \\
& 21529 \,.\, 10{,}206 - 29674 \,.\, 3{,}0169 - 75772 = 54430 \\
& 23545 \,.\, 12{,}714 - 36623 \,.\, 3{,}5088 - 116572 = 54276 \\
& 25380 \,.\, 15{,}222 - 43760 \,.\, 3{,}9024 - 166115 = 49450 \\
& 25380 \,.\, 17{,}730 - 43760 \,.\, 4{,}1975 - 224401 = 41903 \\
& 18315 \,.\, 20{,}238 - 47147 \,.\, 4{,}3943 - 131143 = 32338 \\
& 11551 \,.\, 22{,}746 - 40789 \,.\, 4{,}4927 - 52457 = 27029,
\end{aligned}
$$

und die Normalkräfte:

$$
\begin{aligned}
N_x = {} & (17007 \,.\, 0{,}33346 + 23094)\, 0{,}94865 = 27288 \text{ kg} \\
& (15719 \,.\, 0{,}29423 + 29674)\, 0{,}95934 = 32904 \\
& (12233 \,.\, 0{,}25500 + 29674)\, 0{,}96899 = 31776 \\
& (8747 \,.\, 0{,}21577 + 29674)\, 0{,}97750 = 30851 \\
& (7277 \,.\, 0{,}17654 + 36623)\, 0{,}98477 = 37331 \\
& (5626 \,.\, 0{,}13731 + 43760)\, 0{,}99070 = 44119 \\
& (2140 \,.\, 0{,}09808 + 43760)\, 0{,}99522 = 43760 \\
& (885 \,.\, 0{,}05885 + 47147)\, 0{,}99827 = 47117 \\
& (1093 \,.\, 0{,}01962 + 40789)\, 0{,}99981 = 40802,
\end{aligned}
$$

wonach sich aus

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \qquad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \tag{3}$$

mit den in Tabelle III (S. 269) angeführten F, W auch die betreffenden Grenzwerthe selbst ergeben. Beispielsweise erhält man in **kg** per qcm bei $x = 2{,}682$ m:

$$\frac{N_x}{F} = \frac{27288}{295{,}0} = 92{,}5, \qquad \frac{M_x}{W} = \frac{2406400}{9486} = 253{,}7,$$

$$\sigma_o = 92{,}5 + 253{,}7 = 346{,}2 \qquad \sigma_u = 92{,}5 - 253{,}7 = -161{,}2,$$

und bei $x = 5{,}190$ m:

$$\frac{N_x}{F} = \frac{32904}{295{,}0} = 85{,}2 \qquad \frac{M_x}{W} = \frac{3977100}{9486} = 295{,}0$$

$$\sigma_o = 85{,}2 + 295{,}0 = 380{,}2 \qquad \sigma_u = 85{,}2 - 295{,}0 = -293{,}4.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 11 bis 14 der Tabelle VI berechnet.

Tabelle VI.

x m	Belastete Knotenpunkte	$\sum_0^1 (l-a)$ m	$\sum_0^1 f(a)$ m⁴	V kg	H kg	V_x kg	$\sum_0^x P(x-a)$ mk	M_x mk	N_x kg	$\frac{N_x}{F}$ kg	$\frac{M_x}{W}$ kg	σ_o kg	σ_u kg
2,682	0 bis 6	266,172	5344426	19331	23094	17007	5829	24064	27288	92,5	253,7	346,2	— 161,2
5,190	0 „ 7	296,442	6867230	21529	29674	15719	20400	39771	32904	85,2	295,0	380,2	— 209,8
7,698	0 „ 7	296,442	6867230	21529	29674	12233	43714	50015	31776	82,5	375,9	458,4	— 293,4
10,206	0 „ 7	296,442	6867230	21529	29674	8747	75772	54430	30851	80,4	414,4	494,4	— 334,0
12,714	0 „ 8	324,204	8475582	23545	36623	7277	116572	54276	37331	97,6	418,8	516,4	— 321,2
15,222	0 „ 9	349,458	10127183	25380	43760	5626	166115	49450	44119	116,0	391,9	507,9	— 275,9
17,730	0 „ 9	349,458	10127183	25380	43760	2140	224401	41903	43760	115,8	341,4	457,2	— 225,6
20,238	0 „ 10	252,192	10911032	18315	47147	885	131143	32338	47117	125,5	271,0	396,5	— 145,5
22,746	0 „ 11	159,048	9439620	11551	40789	1093	52457	27029	40802	109,4	233,1	342,5	— 123,7

Bemerkungen. Hätten wir das genauere Verfahren zur Bestimmung der ungünstigsten Belastungen gewählt (vergl. S. 273), so würden zwei Tabellen wie die vorstehende zu berechnen sein,* indem dann die Belastungen für max. druck σ_u (bei deren Ermittelung die untere Kernlinie anstatt der Bogenaxe zu verwenden ist) mit den Belastungen für min. druck σ_u (bei deren Ermittelung die obere Kernlinie an Stelle der Bogenaxe tritt) nicht mehr übereinstimmen. Die weiter folgenden Ermittelungen würden jedoch keinerlei Aenderung erfahren.

H. Normalspannungen bei Vollbelastung und zweite Grenzwerthe der Normalspannungen durch die Verkehrslast allein.

Die M_x, N_x, σ_o, σ_u durch die Verkehrslast bei Vollbelastung der ganzen Oeffnung stehen zu den entsprechenden Werthen durch das koncentrirte Eigengewicht im Verhältniss

$$\frac{1390}{1700} = 0{,}81765$$

vergl. S. 268). Mit Rücksicht auf Tabelle IV (S. 271) und II (S. 265) erhält man also bei Vollbelastung für $x = 2{,}682$ m per qcm:

$$\sigma_o = \left(\frac{113695}{295{,}0} + \frac{165600}{9486}\right) 0{,}81765 = 329{,}4 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \left(\frac{113695}{295{,}0} - \frac{165600}{9436}\right) 0{,}81765 = 300{,}8 \text{ „ },$$

und für $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = \left(\frac{112328}{386{,}2} + \frac{295000}{13481}\right) 0{,}81765 = 255{,}8 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \left(\frac{112328}{386{,}2} - \frac{295000}{13481}\right) 0{,}81765 = 219{,}9 \text{ „ }.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der zweiten und dritten Kolumne nachstehender Tabelle VII berechnet.

Tabelle VII.

x	bei Vollbelastung		Grenzwerthe	
m	σ_o kg	σ_u kg	σ_o kg	σ_u kg
2,682	329,4	300,8	— 16,8	462,0
5,190	255,8	219,9	— 124'4	429,7
7,698	261,1	210,9	— 197,3	504,3
10,206	265;7	203,4	— 228,7	537,4
12,714	270,1	196,3	— 246,3	517,5
15,222	275,1	191,1	— 232,8	467,0
17,730	279,8	186,8	— 177,2	412,4
20,238	283,9	183,8	— 112,6	329,3
22,746	287,5	182,2	— 55,0	305,9

* Siehe dieselben Allgemeine Bauzeitung 1895, S. 76 (Tab. XV).

Die Beiträge der Verkehrslast allein zu den ersten Grenzwerthen der Normalspannungen σ_o, σ_u, nämlich zu max. druck σ_o und min. druck σ_u, wurden in Tabelle VI (S. 277) gegeben. Subtrahirt man diese Werthe von den soeben erwähnten Normalspannungen durch die Verkehrslast allein bei Vollbelastung, so ergeben sich die Beiträge der Verkehrslast zu den zweiten Grenzwerthen der Normalspannungen σ_o, σ_u, nämlich zu min. druck σ_o und max. druck σ_u. Man erhält z. B bei $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = 329{,}4 - 346{,}2 = -16{,}8 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 300{,}8 + 161{,}2 = 462{,}0 \text{ ,, },$$

und bei $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = 255{,}8 - 380{,}2 = -124{,}4 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 219{,}9 + 209{,}8 = 429{,}7 \text{ ,, }.$$

In dieser Weise wurden auch die übrigen Werthe der beiden letzten Kolumnen von Tabelle VII berechnet.

J. Resultirende Normalspannungen. Einfluss von Aenderungen der Temperatur und der Spannweite.

Die durch das gesammte Eigengewicht allein erzeugten Normalspannungen sind in Tabelle IV (S. 271) zusammengestellt. Zugleich mit dem Eigengewicht wie mit jeder Belastung wirkt im vorliegendem Falle der künstliche Horizontalschub, dessen Beiträge zu σ_o, σ_u in Tabelle V (S. 273) gegeben sind. Mit Rücksicht hierauf erhalten wir die ganzen Normalspannungen bei Belastung durch das Eigengewicht allein für $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = 482{,}9 - 13{,}3 = 470 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 441{,}5 + 25{,}8 = 467 \text{ ,, },$$

und für $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = 374{,}3 - 20{,}3 = 354 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 323{,}3 + 30{,}0 = 353 \text{ ,, }.$$

Auf gleiche Weise sind die übrigen Werthe der zweiten und dritten Kolumne von Tabelle VIII (S. 281) berechnet werden.

Man sieht an der Gleichheit der σ_o, σ_u, dass infolge der getroffenen Wahl des künstlichen Horizontalschubs fast auf der ganzen Länge des Bogens gleichmässige Vertheilung der Beanspruchungen auf die Querschnitte ereicht ist.

In Tabelle VII wurden die Normalspannungen durch die Verkehrslast allein bei Vollbelastung der ganzen Oeffnung gegeben. Addirt man zu diesen Werthen die Normalspannungen bei Belastung durch das Eigengewicht allein, einschliesslich der Beiträge des künstlichen Horizontalschubs, so ergeben sich die ganzen Normalspannungen bei Vollbelastung. Wir erhalten für $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = 329 + 470 = 799 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 301 + 467 = 768 \text{ ,, }.$$

und für $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = 256 + 354 = 610 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 220 + 353 = 573 \text{ ,, }.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 4 und 5 von Tabelle VIII (S. 281) berechnet.

Die Grenzwerthe der Normalspannungen bei normaler Temperatur im Ganzen finden sich, wenn man zu den in Tabelle VI und VII (S. 277, 278) gegebenen Grenzwerthen durch die Verkehrslast allein die in Kolumne 2 und 3 der Tabelle VIII enthaltenen Normalspannungen für Eigengewicht allein addirt. Es folgen so bei $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = 470 + 346 = 816 \text{ kg},$$
$$\sigma_o = 470 - 17 = 453 \text{ „},$$
$$\sigma_u = 467 - 161 = 306 \text{ „},$$
$$\sigma_u = 467 + 462 = 929 \text{ „},$$

und bei $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = 354 + 380 = 734 \text{ kg},$$
$$\sigma_o = 354 - 124 = 230 \text{ „},$$
$$\sigma_u = 353 - 210 = 143 \text{ „},$$
$$\sigma_u = 353 + 430 = 783 \text{ „}.$$

In derselben Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 6 bis 9 nebenstehender Tabelle VIII berechnet.

Der von einer Temperaturänderung um τ^0 gegen die Normaltemperatur herrührende Horizontalschub ist nach Formel *d*) auf S. 267:

$$H = 4{,}6722\; E\, \alpha\, \tau.$$

Elasticitätsmodul und Ausdehnungskoefficient des verwendeten Flusseisens (welches in Längs- und Querrichtung mindestens 3700 kg und höchstens 4400 kg per qcm Zugfestigkeit bei mindestens 20 % Dehnung aufweisen musste) wurden nicht besonders festgestellt. Indem man auf Grund sonstiger Erfahrungen annahm:

$E = 2150000$ kg per qcm, $\alpha = 0{,}0000115$ für Grad C,

ergab sich mit $E\,\alpha = 24{,}725$:

$$H = 115{,}520\, \tau.$$

Nach dem Bauprogramm waren als Grenzen der Temperaturänderungen $\tau = \pm 25^0$ anzunehmen, für die in den Brückenstirnen gelegenen Bogen jedoch $\pm 5^0$ mehr. Die Berechnung wurde jedoch für alle Bogen mit $\tau = \pm 25^0$ durchgeführt, wonach zunächst für die sechs Bogen jeder Oeffnung gleiche Querschnitte resultirten (vergl. S. 267). Dem für die Stirnbogen um $^1/_5$ grösseren Einfluss der Temperaturänderungen ist durch aufgenietete Winkeleisen von 10/10/1 cm, welche zur Befestigung der Vertikalständer an den Stirnbogen dienen, mehr als genügend Rechnung getragen.

Mit $\tau = \pm 25^0$ liefert die letzte Gleichung

$$H = \pm 2888 \text{ kg},$$

während die entsprechenden Normalspannungen aus den auf S. 272 angeführten Formeln 2) folgen. Da die Klammerausdrücke dieser Formeln bereits in Tabelle V (S. 273) vorgemerkt wurden, so erhalten wir z. B. bei $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = \mp 0{,}006805 \,.\, 2888 = \mp 20 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \pm 0{,}013237 \,.\, 2888 = \pm 38 \text{ „},$$

und bei $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = \pm 0{,}010406 \,.\, 2888 = \pm 30 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \pm 0{,}015374 \,.\, 2888 = \pm 44 \text{ „}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 12 und 13 von Tabelle VIII berechnet.

Fügt man den in Kolumne 6 und 8 der Tabelle VIII gegebenen grössten Grenzwerthen der Normalspannungen bei normaler Temperatur die Normalspannungen gleichen Sinnes durch eine Temperaturänderung $\tau = \pm 25^0$ bei, so ergeben sich die grössten Gesammtspannungen. Wir erhalten bei $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = 816 + 20 = 836 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 929 + 38 = 967 \text{ „},$$

und bei $x = 5{,}190$ m:

Tabelle VIII. Resultirende Normalspannungen in kg per qcm (Einfluss der Strassenwalze siehe S. 283).

Querschnitt x	bei normaler Temperatur								$800\left(1+\frac{\varphi}{2}\right)$ für		für eine Temperaturänderung um $\pm 25^0$		Grösste Gesammtspannungen		für eine Aenderung der Spannweite um ± 1 cm		Querschnitt x
	für Eigengewicht allein		für Vollbelastung		Grenzwerthe (Druck)												
m	σ_o	σ_u	σ_o	σ_u	σ_o		σ_u		σ_o	σ_u	σ_o	σ_u	σ_o	σ_u	σ_o	σ_u	m
2,682	470	467	799	768	816	453	929	306	1022	932	∓ 20	± 38	836	967	± 14	∓ 28	2,682
5,190	354	353	610	573	734	230	783	143	925	873	∓ 30	± 44	764	827	± 22	∓ 32	5,190
7,698	351	351	612	562	809	154	855	58	876	827	∓ 45	± 60	854	915	± 33	∓ 43	7,698
10,206	349	349	615	552	843	120	886	15	857	807	∓ 59	± 74	902	960	± 43	∓ 53	10,206
12,714	347	347	617	543	863	101	865	26	847	812	∓ 71	± 86	934	951	± 51	∓ 62	12,714
15,222	347	347	622	538	855	114	814	71	853	835	∓ 82	± 97	937	911	± 59	∓ 70	15,222
17,730	347	348	627	535	804	170	760	122	885	864	∓ 91	± 106	895	866	± 66	∓ 77	17,730
20,238	348	349	632	533	745	235	678	203	926	920	∓ 99	± 114	844	792	± 71	∓ 83	20,238
22,746	350	350	637	532	693	295	656	226	970	938	∓ 104	± 120	797	776	± 75	∓ 87	22,746
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$$\sigma_o = 734 + 30 = 766 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = 783 + 44 = 827 \text{ „ }.$$

In derselben Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 14 und 15 der Tabelle VIII berechnet.

Die unteren Grenzwerthe der Gesammtspannungen pflegen selten zu interessiren, sie würden sich ergeben, wenn man zu den in Kolumne 7 und 9 der Tabelle VIII enthaltenen unteren Grenzspannungen bei normaler Temperatur die in Kolumne 12 und 13 gegebenen negativen Beiträge der Temperaturänderungen addirte. Die betreffenden Werthe sind übrigens in den Kolumnen 11 und 21 der Tabelle des § 11 (S.41) eingestellt.

Aenderungen der Spannweite sollen natürlich nicht eintreten. Indessen erschien es doch zweckmässig, über den eventuellen Einfluss derselben Rechenschaft zu geben. Der durch eine Aendernng Δl der Spannweite l bewirkte Horizontalschub ist nach der auf S. 267 erhaltenen Formel e):

$$H = -\ 4{,}6722\ E \frac{\Delta l}{l}.$$

Dieser Horizontalschub wie nach 2) auf S. 272 die davon herrührenden Normalspannungen sind also innerhalb der Gültigkeitsgrenzen unsrer Formeln proportional Δl und wir wollen dieselben für $\Delta l = \pm 1$ cm ausdrücken. Mit $E = 2150000$ kg per qm und $l = 4800$ cm wird dann:

$$H = \mp 2093 \text{ kg},$$

wonach bei Beachtung von Tabelle V (S. 273) für $x = 2{,}682$ m:

$$\sigma_o = \mp 0{,}006805 \,.\, 2093 = \mp 14 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \mp 0{,}013237 \,.\, 2093 = \mp 28 \text{ „ },$$

und für $x = 5{,}190$ m:

$$\sigma_o = \mp 0{,}010406 \,.\, 2093 = \mp 22 \text{ kg},$$
$$\sigma_u = \mp 0{,}015374 \,.\, 2093 = \mp 32 \text{ „ },$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werthe der Kolumnen 16 und 17 von Tabelle VIII berechnet.

K. Bemerkungen zu den resultirenden Normalspannungen. Belastung durch die Strassenwalze. Knickwirkung. Winddruck.

Die wichtigsten Ergebnisse betreffend die resultirenden Normalspannungen sind in Tabelle VIII (S. 281) zusammengestellt.

Nach dem Bauprogramme sollte die Dimensionirung der Eisenkonstruktion auf Grund einer zulässigen Beanspruchung von

$$b = 800\left(1 + \frac{\psi}{2}\right) = 800 + 400\,\psi \text{ kg}$$

per qcm mit der oberen Grenze 1000 kg erfolgen (ψ Verhältniss der numerisch kleineren zur numerisch grösseren Grenzspannung mit Berücksichtigung der Vorzeichen). Aus diesem Grunde sind den Grenzspannungen bei normaler Temperatur in den Kolumnen 10 und 11 die entsprechenden $800\left(1 + \frac{\psi}{2}\right)$ beigesetzt, also z. B. bei $x = 2{,}682$ m:

für σ_o $\quad 800 + 400\,\frac{453}{816} = 1022$ kg.

„ σ_u $\quad 800 + 400\,\frac{306}{929} = 932$ „ .

Man sieht, dass die Grenzspannungen nur an wenigen Stellen etwas grösser als $800\left(1+\frac{\psi}{2}\right)$ sind, worüber um so eher weggesehen werden konnte, als der Einfluss der Spannungswechsel bei Strassenbrücken der langsamen Bewegung der Lasten wegen jedenfalls weit geringer als bei Eisenbahnbrücken ist. Die ebenfalls in der Tabelle angeführten grössten Gesammtspannungen, mit Einschluss des Beitrags der Temperaturänderungen überschreiten den vorgeschriebenen Maximalwerth von 1000 kg an keiner Stelle. Die vereinbarten, unserer Berechnung zu Grunde gelegten Dimensionen (vergl S. 259) wurden demnach in der hier betrachteten Oeffnung beibehalten.

Nach dem Bauprogramm war für die Berechnung der Eisenkonstruktion „als grösste Einzellast eine Dampfwalze mit 20 Tonnen Dienstgewicht" entsprechend Fig. 145 anzunehmen, wenn durch dieselbe eine grössere Beanspruchung als durch die vorgeschriebenen Belastungen durch Menschengedränge erzeugt werden sollte. Bei der vorläufigen Berechnung wurden die Fahrbahntheile und Vertikalständer für Belastung durch die Strassenwalze, die Bogen für Belastung durch Menschengedränge berechnet. Für die definitive Berechnung bedarf letzteres Verfahren einer Begründung.

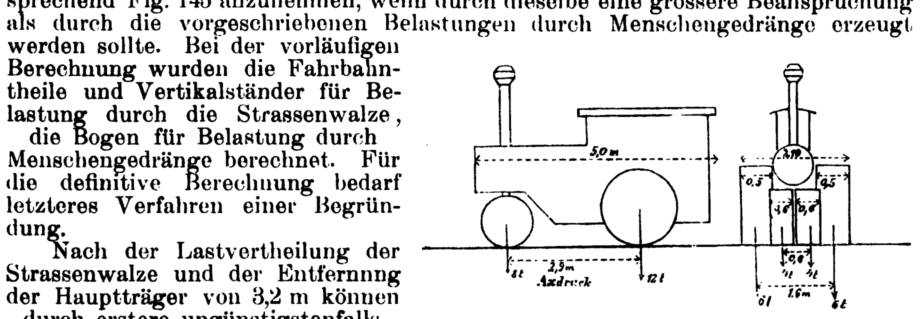


Fig. 145

Nach der Lastvertheilung der Strassenwalze und der Entfernnng der Hauptträger von 3,2 m können durch erstere ungünstigstenfalls 2 Lasten von 9 und 7,25 *t* in Entfernung von 2,9 m auf einen Bogen kommen (Beisp. 11). Die der Berechnung zu Grunde gelegte Verkehrslast durch Menschengedränge beträgt 1390 kg per m. Die Belastung eines Bogens durch die Strassenwalze entspricht also, abgesehen von der Koncentration der Lasten $\frac{16250}{1390}$ = ca. 12 m Belastung durch Menschengedränge. Da die Belastungsstrecken für die Grenzspannungen meist weit grösser sind (vergl. die Tafel), so konnte die übliche Berechnung der Hauptträger für Menschengedränge im Allgemeinen beibehalten werden. Nur für die σ_o, σ_u an den Trägerenden und besonders um die Trägermitte kommen kleinere Belastungsstrecken vor, welche gleichwohl noch eine Strassenwalze aufnehmen können. Hier wurden aber auch die Querschnitte auf Grund der vorläufigen Berechnung so gewählt, dass die grössten Gesammtspannungen wesentlich unter der zulässigen Grenze von 1000 kg bleiben. Die Berechnung der grössten Gesammtspannungen in der Trägermitte ergab (Beisp. 11) für die Strassenwalze ohne Menschengedränge $\sigma_o = 823$ kg, $\sigma_u = 771$ kg, für die Strassenwalze mit Menschengedränge (soweit der Raum reicht) $\sigma_o = 901$ kg, $\sigma_u = 900$ kg. Da auch kleine Aenderungen der Spannweite in der Mitte am meisten zur Geltung kommen, so erkennt man, dass die ursprünglich beabsichtigt gewesene Unterbrechung der horizontalen Verstärkungsplatten auf eine Strecke von 6,6 m um die Bogenmitten (S. 259) nicht berechtigt gewesen wäre (in Oeffnung V können selbst mit diesen Platten grösste Gesammtspannungen bis 1000 kg in der Mitte entstehen).

Dem Bauprogramm zufolge waren die Querschnitte von Stäben mit axialem Druck aus

$$F = (1 + \mu)\, F_d$$

zu berechnen, worin $F_d = \frac{D}{d}$ der dem Maximaldrucke D bei einer zulässigen Beanspruchung ohne Rücksicht auf Knickwirkung von d per Quadrateinheit entsprechenden Querschnitt und

$$\mu = \frac{F\, l^2}{J\, \sigma}$$

mit l Stablänge, J Trägheitsmoment, $\sigma = 24000$.* Bei Brückenbogen pflegte allerdings bisher eine Zerknickungsgefahr nicht angenommen zu werden. Da jedoch die Axialkraft N_x bedeutende Werthe annehmen kann, so wurde (schon bei der ursprünglichen Berechnung) ein seitliches Einknicken in Betracht gezogen.

Da nach S. 285 die grösste Horizontalreaktion und Vertikalreaktion:

$$H = 235970 \text{ kg}, \qquad V = 83082 \text{ kg},$$

so wird im ersten Felde die grösste Vertikalkraft (vergl. S. 268 und Fig. 146):

$$V_x = 83082 - (2040 + 1390)\frac{2 \,.\, 2{,}508}{3} = 77347 \text{ kg},$$

und nach

$$N_x = (V_x \operatorname{tg}\varphi + H)\cos\varphi$$

die grösste Axialkraft:

$$N_x = \left(77347\frac{0{,}885}{2{,}508} + 235970\right)\frac{2{,}508}{2{,}660} = 248219 \text{ kg}.$$

Für reinen Druck wäre mit dem hier massgebenden Grenzwerth $d = 1000$ kg (vergl. S. 282):

$$F_d = \frac{248219}{1000} = 248{,}219 \text{ qcm}.$$

Weiter hat man nach S. 265: $F = 295$ qcm,

$$J = \frac{2}{3}(2 \,.\, 1{,}4 \,.\, 19^3 + 2 \,.\, 1{,}2 \,.\, 9{,}6^3 + 2 \,.\, 7{,}8 \,.\, 1{,}8^3 + 72 \,.\, 0{,}6^3) = 14290,$$

$$\mu = \frac{295 \,.\, 266^2}{14290 \,.\, 24000} = 0{,}06086,$$

Fig. 146

sodass der verlangte wirkliche Querschnitt (S. 283):

$$F = 1{,}06086 \,.\, 248{,}219 = 263{,}33 \text{ qcm},$$

während der thatsächliche Querschnitt mindestens 295 qcm, durchschnittlich aber wegen der nach den Auflagern hin angebrachten Verstärkungen noch grösser ist.

Man könnte noch fragen, ob nicht durch die Transversalkraft T_x übermässige Beanspruchungen entstehen. Dies pflegt für Bogenträger nicht der Fall zu sein, weshalb man T_x hier gewöhnlich unberücksichtigt lässt. Wollte man sich jedoch durch Rechnung davon überzeugen, so würde die Untersuchung einzelner geeigneter Belastungsfälle genügen. In Beisp. 8 sind die grössten Längs- und Querschubspannungen τ der Neckarbrücke berechnet *a*) für Vollbelastung des ganzen Bogens, *b*) für Verkehrslast auf der ersten Bogenhälfte, *c*) für Verkehrslast auf der zweiten Bogenhälfte. Die erhaltenen τ (in der Axschicht) schwanken zwischen 0 und ± 82 kg per qcm (Tabelle S. 36).

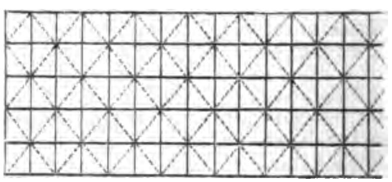


Fig. 147

Der Winddruck, welcher nach dem Bauprogramm zu 150 kg per qm getroffener Fläche anzunehmen war, blieb bei Berechnung der B o g e n ausser Betracht. Da zwei Horizontalverbände der in Fig. 147 angedeuteten Art in Höhe der Fahrbahn und des Obergurts der Bogen die sechs Tragwände verbinden, und der Zoreseisenbelag der Brücke einen dritten Horizontalverband bildet, so sind die Beanspruchungen der einzelnen Bogen durch den Winddruck gering. Am

* Vergl. W e y r a u c h, Die Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionenberechnung von Eisen- und Stahlkonstruktionen, Leipzig 1889, S. 31 33. — Andere Berücksichtigung der Knickspannungen siehe IV *O, P*:

ehesten kommen sie für die Stirnbogen in Betracht, welche aber durch die Winkeleisen von 10/10/1 cm zur Befestigung der Vertikalen eine bei Berechnung der obigen Normalspannungen nicht berücksichtigte Verstärkung erhalten haben. Auch dürften stärkste Winddruckfälle kaum jemals mit ungünstigsten Belastungsfällen und Temperaturfällen gleichzeitig eintreffen.

L. Kämpferdrücke. Auflager.

In IV *C* (S. 269) ergaben sich die Vertikalreaktionen und Horizontalreaktionen der Kämpfer durch die gesammte feste Last:

$$V = 49379 \text{ kg}, \qquad H = 128491 \text{ kg},$$

und durch die Verkehrslast allein bei Vollbelastung des Bogens:

$$V = 33703 \text{ kg}, \qquad H = 87531 \text{ kg}.$$

Nach S. 272 beträgt der künstliche Horizontalschub $K = 1950$ kg und nach S. 280 können durch die in Betracht gezogenen Temperaturänderungen bis $\pm 25^0$ Horizontalschübe von $H = \pm 2888$ kg entstehen.

Demnach erhalten wir die grösste Vertikalreaktion im Ganzen, bei Vollbelastung:

$$V = 49379 + 33703 = 83082 \text{ kg},$$

die kleinste Vertikalreaktion, für Eigengewicht allein:

$$V = 49379 \text{ kg},$$

den grössten Horizontalschub, bei Vollbelastung und Temperaturänderung um $\tau = 25^0$:

$$H = 128491 + 87531 + 1950 + 2888 = 220860 \text{ kg},$$

den kleinsten Horizontalschub, für Eigengewicht allein und Temperaturänderung um $\tau = -25^0$:

$$H = 128491 + 1950 - 2888 = 127553 \text{ kg},$$

und den Horizontalschub für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$H = 128491 + 1950 = 130441 \text{ kg};$$

ferner die grösste resultirende Kämpferreaktion, bei Vollbelastung und Temperaturänderung um $\tau = 25^0$:

$$R = \sqrt{83082^2 + 220860^2} = 235970 \text{ kg},$$

die kleinste resultierende Kämpferreaktion, für Eigengewicht allein und Temperaturänderung um $\tau = -25^0$:

$$R = \sqrt{49379^2 + 127553^2} = 136777 \text{ kg},$$

und die resultirende Kämpferreaktion für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$R = \sqrt{49379^2 + 130441^2} = 139470 \text{ kg}.$$

Die Auflager sind entsprechend Fig. 148, 149 auf S. 286 angeordnet. Gelenkstück, Keile und oberer Theil des Lagerstuhls bestehen aus hartem Martinstahl, der untere Theil der letzteren aus Gusseisen. Die Gelenkstücke haben $l = 25$ cm wirksame Länge und 12 cm Durchmesser. Mit Rücksicht auf die soeben berechneten Kämpferdrücke R erhält man die mittlere Beanspruchung per qcm Längsschnitt des Gelenkstückes aus

$$\sigma_m = \frac{R}{2\,r\,l} \tag{1}$$

im Maximum:

$$\sigma_m = \frac{235970}{12 \, . \, 24} = 819 \text{ kg},$$

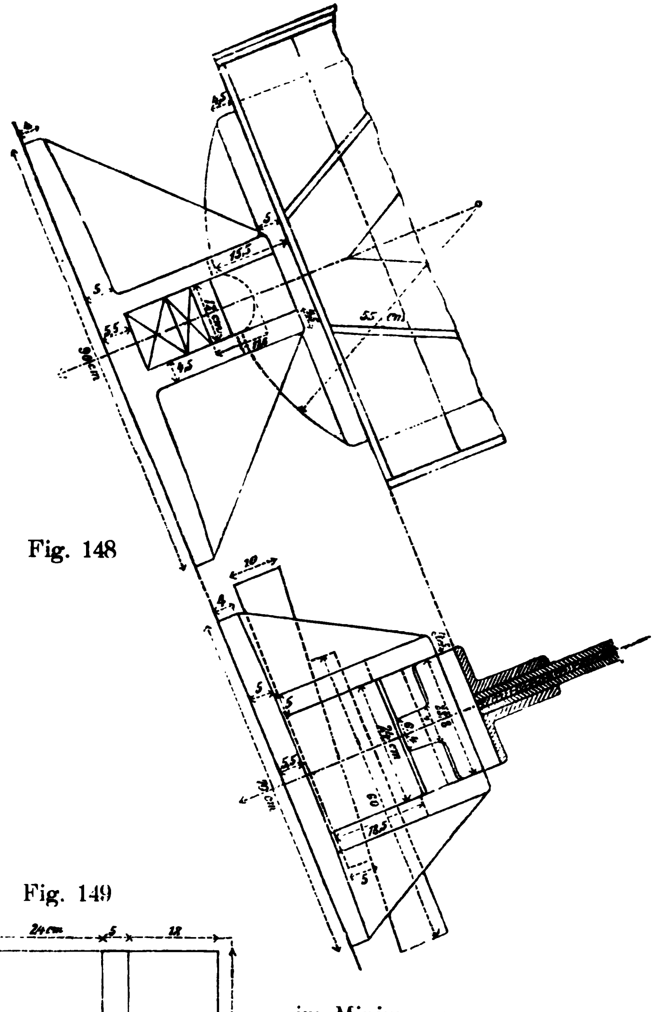


Fig. 148

Fig. 149

im Minimum:

$$\sigma_m = \frac{136777}{288} = 475 \text{ kg},$$

für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur;

$$\sigma_m = \frac{139470}{288} = 484 \text{ kg}.$$

Die Beanspruchung σ_m bleibt unter der grössten Beanspruchung des Gelenkstücks. Diese tritt in der Richtungslinie von R ein und lässt sich unter den Voraussetzungen des § 13 nach § 13, 7) setzen:

$$\sigma = \frac{4\,R}{5\,r\,l}, \qquad 2)$$

wonach ermittelt wurden: als Maximum:

$$\sigma = \frac{4 \,.\, 235970}{5 \,.\, 6 \,.\, 24} = 1311 \text{ kg},$$

als Minimum:

$$\sigma = \frac{136777}{180} = 760 \text{ kg},$$

für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$\sigma = \frac{139470}{180} = 775 \text{ kg}.$$

Da die Richtung der grössten resultirenden Kämpferreaktion fast genau mit der Richtung der Bogenaxe beim Kämpfer zusammenfällt (Tangenten der Richtungswinkel gegen die Horizontale 0,3764 und 0,3754), so erscheint bei der geringen Höhe des Auflagers in unserm Falle (vom Gelenkmittelpunkt bis Grundfläche etwa 30 cm) die übliche Annahme gleichmässiger Vertheilung des grössten Kämpferdrucks auf die getroffene Fläche des Auflagersteins gerechtfertigt. Das gleiche gilt für den kleinsten Kämpferdruck, und da sich übersehen lässt, dass auch bei andern Belastungen keine ungünstigere Beanspruchung des Auflagersteins entstehen, so erhalten wir, bei 90/70 cm Grundfläche des Lagerstuhls (Fig. 149) den Druck per qcm Auflagerstein im Maximum:

$$\frac{235970}{6300} = 37{,}5 \text{ kg},$$

im Minimum:

$$\frac{136777}{6300} = 21{,}7 \text{ kg},$$

für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$\frac{139470}{6300} = 22{,}1 \text{ kg}.$$

M. Einsenkungen.

Zur Berechnung der Einsenkungen symmetrischer Parabelbogen mit Kämpfergelenken reichen im Allgemeinen die entsprechenden Formeln des § 16 aus (vergl. Beisp. 20, 42) für welche im Gegensatze zu den dort gegebenen Ausdrücken des Horizontalschubs die Grössen β, ζ (§ 28) vernachlässigt wurden. Wir wollen jedoch hier mit möglichster Genauigkeit vorgehen. Die Zulässigkeit jener Vernachlässigungen für die meisten Fälle (§ 28) wird dabei umso sicherer hervortreten.

Sollte zwar nicht β, aber doch ζ vernachlässigt werden, so wären von den Formeln § 30, 8) 9) auszugehen. Wir werden jedoch auch ζ berücksichtigen, und demgemäss die Gleichungen § 30) 4) 5) zur Verwendung bringen, in welchen für Bogen mit Kämpfergelenken $M = M' = 0$ ist.

Nach § 30, 5) ist die von einer beliebigen zur Trägermitte symmetrischen Belastung herrührende Einsenkung des Bogenscheitels wegen $\Delta \varphi_m = 0$:

$$e = \frac{1}{24\,E\,c}\left[\sum_0^m P\,a\,(3\,l^2 - 4\,a^2) + 12\,\zeta\,l \sum_0^m P\,a\,(l - a) - \left(1 - \frac{4\,\beta}{5}\right)\frac{5\,f\,l^2}{2}\,H\right], \qquad 1)$$

worin H durch § 16, 7) bestimmt. Speziell für eine auf die ganze Spannweite gleichmässig vertheilte Last von g per Längeneinheit hat man nach § 4 in 1):

$$\sum_0^m P\,a\,(3\,l^2 - 4\,a^2) = \frac{5\,g\,l^4}{16}, \qquad \sum_0^m P\,a\,(l - a) = \frac{g\,l^3}{12}, \qquad 2)$$

sodass wir auch schreiben können;

$$e = \left(1 + \frac{16\,\zeta}{5}\right)\frac{5\,g\,l^4}{384\,E\,c} - \left(1 - \frac{4\,\beta}{5}\right)\frac{5\,f\,l^2}{48\,E\,c}\,H, \qquad 3)$$

während H durch § 16, 21) ausgedrückt ist.

Weiter liefert § 30, 5) für eine beliebige Temperaturänderung τ allein:

$$e = -\left(1-\frac{4\beta}{5}\right)\frac{5fl^2}{48Ec}H - \alpha\tau f \tag{4}$$

mit H nach § 16, 8), und für einen beliebigen Horizontalschub H allein:

$$e = -\left(1-\frac{4\beta}{5}\right)\frac{5fl^2}{48Ec}H. \tag{5}$$

Diese Gleichung gilt also beispielsweise auch für den künstlichen Horizontalschub $H = K$, sowie für den durch eine Aenderung der Spannweite um Δl bedingten Horizontalschub, welcher durch § 16, 9) bestimmt ist.

Da im vorliegenden Falle nach IV B (S. 266) $\beta = 0{,}001411$ und mit $\gamma = 1504{,}74$ qcm $r = 6618{,}1$ cm:

$$\zeta = \frac{\gamma}{r^2} = \frac{1504{,}74}{6618{,}1^2} = 0{,}000034,$$

so erkennt man schon, dass in ähnlichen Fällen β und ganz besonders ζ vernachlässigt werden dürfen. Weiter erhalten wir für cm als Längeneinheit und kg als Gewichtseinheit (vergl. IV B, J):

$$24\,E\,c = 24 \,.\, 2150000 \,.\, 539827 = 278551 \,.\, 10^8,$$

$$\frac{\zeta l}{2Ec} = \frac{12 \,.\, 1504{,}74 \,.\, 4800}{6618{,}1^2 \,.\, 278551 \,.\, 10^8} = \frac{1}{140763 \,.\, 10^8},$$

$$\left(1-\frac{4\beta}{5}\right)\frac{5fl^2}{48Ec} = \frac{0{,}99887 \,.\, 5 \,.\, 450{,}5 \,.\, 4800}{48 \,.\, 2150000 \,.\, 539827} = 0{,}00093051,$$

$$\frac{5\,l^4}{16} = \frac{5}{16}4800^4 = 1658880 \,.\, 10^8 \qquad \frac{l^3}{12} = \frac{4800^3}{12} = 9216 \,.\, 10^6.$$

Mit diesen Werthen folgt aus 1) die Einsenkung durch eine beliebige symmetrische Belastung:

$$e = \frac{\sum\limits_0^m P\,a\,(3\,l^2 - 4\,a^2)}{278551 \,.\, 10^8} + \frac{\sum\limits_0^m P\,a\,(l-a)}{140763 \,.\, 10^8} - 0{,}00093051\,H.$$

Für lauter gleiche Lasten P bei den Vertikalen (bei den Kämpfervertikalen $^2/_3\,P$, vergl. S. 268) ist mit Rücksicht auf Tabelle III (S. 269) zufolge der S. 267 erhaltenen Formeln b) der Horizontalschub:

$$H = \frac{2 \,.\, 10127183}{806754}P = 25{,}1060\,P,$$

und die Einsenkung

$$e = \frac{660149}{278551}\frac{P}{100} + \frac{36{,}6579}{140763}\frac{P}{100} - 0{,}00093051 \,.\, 25{,}1060\,P,$$

$$e = (2{,}36994 + 0{,}00026 - 2{,}33614)\frac{P}{100} = 0{,}03406\frac{P}{100}.$$

Beispielsweise erhält man durch das koncentrirte Eigengewicht mit $P = 4264$ kg:

$$e = 0{,}03406 \,.\, 42{,}64 = 1{,}452 \text{ cm}.$$

und durch die Verkehrslast bei Vollbelastung des ganzen Bogens mit $P = 3486$ kg:

$$e = 0{,}03406 \,.\, 34{,}86 = 1{,}187 \text{ cm}.$$

Eine beliebige gleichmässig vertheilte Last von g per Meter, oder $\frac{g}{100}$ per Centimeter Spannweite erzeugt nach 1) 2) mit Rücksicht auf Formel c) auf S. 267:

$$e = \frac{1658880}{278551}\frac{g}{100} + \frac{92{,}16}{140763}\frac{g}{100} - 0{,}00093051 \,.\, 63{,}093\,g,$$

$$e = (5{,}95539 + 0{,}00065 - 5{,}87087)\frac{g}{100} = 0{,}08517\frac{g}{100},$$

also beispielsweise das Eigengewicht der Bogen allein von $g = 340$ kg:

$$e = 0{,}08517 \,.\, 3{,}4 = 0{,}290 \text{ cm}.$$

Bei Vernachlässigung von ζ wären in den vorstehenden Klammerausdrücken für koncentrirte und gleichmässig vertheilte Lasten die Summanden 0,00026 und 0,00065 weggefallen, womit sich in beiden Fällen e um 0,76 % kleiner ergeben hätte. In den Ausdrücken von e durch Temperaturänderungen und einen beliebigen Horizontalschub, also auch durch Aenderungen der Spannweite, kommt ζ überhaupt nicht vor.

Für eine beliebige Temperaturänderung allein erhält man nach 4) mit Rücksicht auf S. 280:

$$e = -\,0{,}00093051 \,.\, 115{,}520\,\tau - 0{,}0000115 \,.\, 450{,}5\,\tau = -\,0{,}11267\,\tau,$$

woraus für $\tau = \pm 25^{\circ}$:

$$e = \mp\, 2{,}817 \text{ cm}.$$

Durch einen beliebigen Horizontalschub H entsteht:

$$e = -\,0{,}00093051\, H,$$

also beispielsweise durch den künstlichen Horizontalschub $H = K = 1950$ kg:

$$e = -\,1{,}814 \text{ cm},$$

und durch eine Aenderung der Spannweite um $\Delta\, l$ wegen Formel e) auf S. 267:

$$e = 0{,}00093051 \,.\, 4{,}6722\, \frac{2150000}{4800}\, \Delta\, l = 1{,}9473\, \Delta\, l,$$

das heisst für jeden Millimeter Vergrösserung oder Verkleinerung der Spannweite ($\Delta\, l$ positiv oder negativ) 1,947 mm Einsenkung oder Erhebung des Bogenscheitels. Dieser verhältnissmässig grosse Einfluss kleiner Aenderungen der Spannweite erklärt die Empfindungen des Schwankens, welche auf manchen Bogenbrücken mit mehreren Oeffnungen beim Ueberfahren von Lasten für den Fussgänger eintreten. Die Bewegungen e für bestimmte $\Delta\, l$ wachsen mit dem Verhältniss $l : f$, sind also umso grösser, je flacher der Bogen, während die Grösse der Trägheitsmomente bei Bogen mit drei Gelenken gar keinen, bei Bogen mit zwei Gelenken einen unwesentlichen, bei Bogen ohne Gelenk einen etwas grösseren Einfluss auf Verringerung der e ausübt (vergl. die Formeln 10)—12) der Aufg. 7 in welchen die Trägheitsmomente zufolge § 15, 40)—42) durch ε zur Geltung kommen). Ueber den Einfluss von $\Delta\, l$ auf die Beanspruchungen in unserm Falle siehe S. 281, 282.

Die resultierende Einsenkung ist bei Belastung durch das Eigengewicht der Konstruktion allein und normaler Temperatur:

$$e = 1{,}452 + 0{,}290 - 1{,}814 = -\,0{,}072 \text{ cm},$$

für Eigengewicht allein bei $\tau = -\,25^{\circ}$:

$$e = -\,0{,}072 + 2{,}817 = 2{,}74 \text{ cm};$$

sie erreicht ihren kleinsten Werth für Eigengewicht allein bei $\tau = 25^{\circ}$:

$$e = -\,0{,}072 - 2{,}817 = -\,2{,}89 \text{ cm},$$

ihren grössten Werth für Vollbelastung bei $\tau = -\,25^{\circ}$:

$$e = -\,0{,}072 + 1{,}187 + 2{,}817 = 3{,}93 \text{ cm}.$$

Bei Beurtheilung dieser resultirenden Einsenkungen ist zu beachten, dass Vollbelastung einer Oeffnung (grösste Verkehrslast auf der ganzen Länge) nur selten vorkommt, und kaum jemals zugleich mit der niedrigsten Temperatur, dass ferner jede Verkehrslast nur vorübergehend wirkt. Von wesentlichem Interesse dagegen sind die Scheitelbewegungen für Eigengewicht allein, da die wirklichen Belastungen meist nicht viel von letzterem abweichen. Infolge des gewählten künstlichen Horizontalschubes liegt der Bogenscheitel für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur nur um 0,072 über der dem spannungslosen Zustande entsprechenden Bogenaxe (für geringe Verkehrsbelastungen etwa in derselben) und er bewegt sich bei höherer und niederer Temperatur um nahezu gleichviel nach oben und unten gegen diese Lage.

Ohne künstlichen Horizontalschub wäre dessen Beitrag $e = -1{,}814$ cm weggefallen, und damit für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur $e = 1{,}742$ cm, bei $\tau = \mp 25^0$ $e = 4{,}56$ cm, bezw. $e = 1{,}07$ cm geworden, die Bogenaxe wäre also immer unter ihrer normalen Lage geblieben. Bei Vollbelastung und $\tau = -25^0$ hätten wir $e = -5{,}75$ cm erhalten. Die Anwendung eines künstlichen Horizontalschubs ist also sowohl mit Rücksicht auf die Beanspruchungen (vergl. IV *E*, *J*) als auf die Einsenkungen zu empfehlen.

N. Reduktion der Normaltemperatur auf die Stuttgarter mittlere Temperatur. Ueberhöhung der Bogen.

Die Bogen wurden an Ort und Stelle in möglichst spannungslosem Zustande montirt, wobei alle Theile gehörig unterstützt und die Keile unter den Gelenkstücken der Auflager leicht angezogen waren. Es sollte dann die künstliche Ueberhöhung der Bogen entsprechend dem gewählten künstlichen Horizontalschub K (vergl. IV *E*) durch weiteres Vorrücken der Keile stattfinden. Die zur Erzeugung eines künstlichen Horizontalschubs K nöthige Verminderung $v = -\Delta l$ der Spannweite ist nach Aufgabe 10 (S. 92:

$$v = \frac{(1 + \varepsilon)\, 8\, l f^2}{15\, E c} K. \qquad 1)$$

Hätte man sich nun hiermit begnügt, so würde die Temperatur bei Erzeugung des künstlichen Horizontalschubs als Normaltemperatur der Bogen zu betrachten gewesen sein, wie ja bis jetzt immer die Montirungstemperatur der Bogen als Normaltemperatur derselben gegolten hat. Als späteste Aufstellungszeiten waren vorgeschrieben:

für die Oeffnungen	V	IV	III	II	I
Beginn*	1. 10. 92	1. 11. 92	1. 3. 93	1. 4. 93	1. 5. 93
Beendigung	1. 11. 92	1. 12. 92	1. 4. 93	1. 5. 93	1. 6. 93

Angenommen demgemäss, man hätte als Temperaturen bei Herstellung des künstlichen Horizontalschubs K gehabt

	5^0	0^0	5^0	15^0	25^0 C,

so würden durch die vorgenommene Berechnung mit Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 25^0$ die Temperatureinflüsse berücksichtigt sein:

von	-20^0	-25^0	-20^0	-10^0	0^0 C
bis	$+30^0$	$+25^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$ „.

Um solche für die wirklichen Beanspruchungen ungünstige Zufälligkeiten zu vermeiden, wurde nach dem Vorschlage des Verfassers bei der ohnehin vorgeschriebenen Ueberhöhung der Bogen (IV *E*) die Normaltemperatur der letzteren in allen Oeffnungen auf die Stuttgarter mittlere Temperatur reduzirt, welche zufolge Mittheilung der meteorologischen Centralstation in Stuttgart nach fünfzigjährigen Beobachtungen rund 10^0 ist (genau $9{,}8^0$).

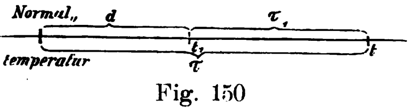


Fig. 150

Die für die fragliche Reduktion nöthigen Beziehungen sind für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ in Aufgabe 10, S. 92, abgeleitet. Die Temperatur t_1, bei Erzeugung des künstlichen Horizontalschubs differire um d^0 von der gewünschten Normaltemperatur (für welche ohne künstlichen Horizontalschub und ohne

* Die Eisenkonstruktion sollte ursprünglich unter Verwendung des gleichen Gerüstes für alle Oeffnungen aufgestellt werden. Wegen der alsdann nöthigen Vorkehrungen gegen die einseitigen Horizontalschübe auf die Pfeiler wurden jedoch alle Oeffnungen vor Beginn der Aufstellung eingerüstet, womit auch die obigen Aufstellungszeiten im Einzelnen nicht mehr eingehalten zu werden brauchten. Die Horizontalschübe aller Bogen liess man möglichst gleichzeitig zur Wirkung kommen. Siehe S. 292.

Belastung, d. h. auch bei normaler Spannweite ohne Belastung der spannungslose Zustand eintreten würde). Anstatt der Veringerung 1) der Spannweite ist dann eine solche

$$v = \frac{(1+\varepsilon)\, 8\, l f^2}{15\, E\, c} K + \alpha\, l\, d, \qquad 2)$$

vorzunehmen, womit nach S. 92 zwar der künstliche Horizontalschub bei Herstellung der Ueberhöhung den Werth

$$K_1 = K + \frac{15\, c}{(1+\varepsilon)\, 8 f^2} E\, \alpha\, d \qquad 3)$$

erlangt, bei normaler Temperatur aber den vorausbestimmten Werth K hat.

In unserm Falle erhält man mit Rücksicht auf $K = 1950$ kg und die schon in IV E und M verwendeten Werthe nach 2):

$$v = \frac{4800 \,.\, 1950}{4{,}6722 \,.\, 2150000} + 0{,}0000115 \,.\, 4800\, d,$$

$$v = 0{,}932 + 0{,}0552\, d \text{ cm.} \qquad \text{I}$$

Während dieser Verringerung der Spannweise entsteht nach 3) ein künstlicher Horizontalschub:

$$K_1 = 1950 + 4{,}6722 \,.\, 24{,}725\, d = 1950 + 115{,}520\, d \text{ kg.}$$

Derselbe bewirkt nach S. 289 eine negative Einsenkung, d. h. Hebung, des Bogenscheitels:

$$e' = -\, 0{,}00093051\, (1950 + 115{,}520\, d) = -\, 1{,}814 - 0{,}1075\, d \text{ cm.}$$

Diese Einsenkung kombinirt sich mit derjenigen durch das Eigengewicht der Konstruktion, welches mit dem Abheben der Bogen von den Unterstützungsflächen wirksam zu werden beginnt. Bezeichnet P das alsdann durch eine Vertikale auf den Bogen übertragene Eigengewicht, so hat man nach den vorstehend und S. 288, 289 erhaltenen Werthen die resultirende Einsenkung bei Herstellung der Ueberhöhung:

$$e = 0{,}290 + 0{,}0003406\, P - 1{,}814 - 0{,}1075\, d \text{ cm.}$$

Im vorliegenden Falle war während der letzteren das Eigengewicht der Konstruktion mit Belag durch Zoreseisen, aber ohne die übrigen Theile der Fahrbahn wirksam, also nach S. 268 $P = 1467$ kg, womit wir erhalten:

$$e = -\, 1{,}024 - 0{,}1075\, d \text{ cm.} \qquad \text{II}$$

Vor Herstellung der Ueberhöhung war die Eisenkonstruktion in möglichst spannungslosem Zustande soweit zu montiren, dass ein seitliches Ausweichen der Bogen nicht mehr stattfinden konnte, und andrerseits unkontrolirbare Spannungen in den Vertikalen und Obergurten der Tragwände durch die Ueberhöhung nicht in Betracht kamen. Sollte nun die Ueberhöhung für eine Oeffnung vorgenommen werden, so war zunächst die augenblickliche Temperatur t_1 und deren Differenz

$$d = t_1 - 10^\circ\ C$$

gegen die Stuttgarter mittlere Temperatur festzustellen. Die d sind positiv, je nachdem t_1 über oder unter der mittleren Temperatur liegt.

Die Ueberhöhungen hatten alsdann für alle Bogen einer Oeffnung möglichst gleichzeitig bis zu denjenigen Verringerungen der Spannweiten und Erhebungen (negative Einsenkungen) der Bogenscheitel zu erfolgen, welche durch die Gleichungen I, II und entsprechende Gleichungen für die übrigen Oeffnungen im Voraus bestimmt waren. Für $d = 15^\circ$ beispielsweise liefern die obigen Gleichungen:

$$v = 1{,}760 \text{ cm}, \qquad e = -\, 2{,}636 \text{ cm}, \qquad K_1 = 3683 \text{ kg.}$$

Bei Differenzen d bis 20° waren Verringerungen v bis etwa 2 cm zu erwarten, was bei Anordnung der Auflager von Interesse sein kann, da der Anlauf der Keile mit Rücksicht auf Erleichterung des Anziehens und Erschwerung des Zurückgehens nicht grösser als nöthig sein soll. Es empfiehlt sich, die Keile

zu gradieren und im Voraus zu ermitteln, welche Verringernng der Spannweite dem Vordringen der Keile um einen der betreffenden Grade entspricht, auch die schliessliche Stellung der Keile zu markiren, sodass deren richtige Stellung jederzeit kontrolirt und eventuell wieder hergestellt werden kann.

Die Herstellung der Ueberhöhung erfolgte für alle Bogen im Sommer 1893 unter Leitung des Oberingenieurs Kübler von der Esslinger Maschinenfabrik, und zwar durch die Arbeit der Sonnenwärme. Wenn sich in der wärmsten Tageszeit (Nachmittags) die Bogen infolge der Temperaturerhöhung von den als Unterlagen dienenden Holzkeilen abgehoben hatten, wurden die letzteren angezogen. Nachdem durch die Kühlung der Nacht eine Verkürzung der Bogen eingetreten war, wurden die Stahlkeile an den Auflagern nachgeschoben. Diese Procedur war so oft zu wiederholen, bis alle Bogen die den augenblicklichen t_1, d entsprechenden v, e erreicht hatten, was bezüglich v durch Feststellung der Verschiebung der Stahlkeile, bezüglich e durch genaue Nivellements und Entnahme der entsprechenden e' in geeigneten Zeitabschnitten kontrollirt wurde. Da der Anlauf der Keile $1/12$ betrug, so war für jede Verringerung der Spannweite um 1 cm ein Eintreiben der Keile an beiden Auflagern um $\frac{1}{2}\,12 = 6$ cm nöthig.

Das Ablassen der Bogen aller Oeffnungen erfolgte am 5. und 7. August 1893, wobei die Holzkeile unter den sechs Bogen einer Oeffnung von den Kämpfern gegen die Scheitel fortschreitend gelöst wurden, was ohne besondere Schwierigkeiten vor sich ging. Die Senkung des Bogenscheitels während des Ablassens hätte nach obigen Gleichungen bei konstanter Temperatur für Oeffnung IV betragen sollen:

$$e - e' = -\,1{,}024 + 1{,}814 = 0{,}79 \text{ cm},$$

Die Beobachtung ergab 0,6 cm. Diese Abweichung ist am einfachsten dadurch zu erklären, dass das Eigengewicht zum Theil schon vor dem Ablassen gewirkt hatte. Man ersieht daraus, dass die genaue Kontrolle der Verringerungen v der Spannweite wichtiger als diejenige der Scheitelsenkungen ist. — Die erzeugte Ueberhöhung war auch nach dem Ablassen der Bogen in der Flucht der Zoreseisen deutlich sichtbar.

Bemerkungen. Die von Kübler erdachte Verwendung der Sonnenwärme zur Herstellung der Ueberhöhung dürfte auch in Zukunft zu empfehlen sein. Unter Umständen (kleine Bogen, ungünstige Jahreszeit u. s. w.) kann in Frage kommen, die Ueberhöhung lediglich durch Eintreiben der Auflagerkeile herzustellen. Der hierbei zu überwindende Kämpferdruck ist umso grösser, je grösser das bereits wirksame Eigengewicht. Sein Werth per Bogen würde für die oben betrachtete Oeffnung zu Beginn des Anziehens wegen

$$V = 8160 + 41219\,\frac{1467}{4264} = 22341 \text{ kg},$$

$$H = 21439 + 107052\,\frac{1467}{4264} = 58270 \quad ,,$$

(vergl. S. 268, 269) betragen haben:

$$R = \sqrt{22341^2 + 58270^2} = 62403 \text{ kg}.$$

Mit dem Vorrücken der Keile wäre der zu überwindende Kämpferdruck um etwas weniger als den entstehenden künstlichen Horizontalschub K_1 gewachsen, im Falle $d = 15^0$ beispielsweise, mit $H = 58270 + K_1 = 61953$ kg, auf

$$R = \sqrt{22341^2 + 61953^2} = 65858 \text{ kg}.$$

Angesichts der bedeutenden Kräfte zum Eintreiben der Keile könnte man das letzterwähnte Verfahren durch Mitwirkung hydraulicher Pressen zu modificiren suchen, welche in den Bogenmitten einen Druck D von unten nach oben ausüben, doch gibt dann die Möglichkeit lokaler Schwächungen zu Bedenken Anlass. Wir bemerken desshalb nur, dass die Aenderung keinen Einfluss auf die oben festgestellten Verringerungen v der Spannweiten und Einsenkungen e der Bogen-

scheitel nach dem Absetzen der Pressen hätte, dass aber die Einsenkungen während des Wirkens von D um den diesem Drucke allein entsprechenden (negativen) Werth der Einsenkung geändert würden, während die Kämpferdrücke abnehmen, sodass das Eintreiben der Keile erleichtert wird. Für den oben betrachteten Fall ergab eine Berechnung die Scheitelsenkung unter Mitwirkung von D:

$$e = -1{,}024 - 0{,}1075\,d - 0{,}007416\,\frac{D}{100}\ \text{cm}$$

und die Auflagerreaktionen bei Beginn des Anziehens in kg

$$V = 22341 - \frac{D}{2}, \qquad H = 58270 - 2{,}0539\,D,$$

wonach zur vollständigen Aufhebung von H nöthig wäre:

$$D = \frac{58270}{2{,}0539} = 28370\ \text{kg},$$

und alsdann zu überwinden bliebe:

$$V = 22341 - \frac{28370}{2} = 8156\ \text{kg}.$$

O. Vertikalen der innern Bogen.

Zu den wichtigsten Konstruktionstheilen der Brücke gehören die Vertikalen (Vertikalständer), welche die Fahrbahnlast auf die Bogen übertragen. Bei ihrer Berechnung sind die auf S. 185 erwähnten Gesichtspunkte zu beachten. Die Vertikalen der Stirnbogen sollen im nächsten Paragraphen behandelt werden, während wir uns hier mit den Vertikalen der 4 innern Bogen beschäftigen.

Die ungünstigste Belastung einer solchen Vertikale tritt ein, wenn eines der beiden Hinterräder der Strassenwalze (Fig. 145, S. 283) gerade über die Vertikale gelangt. Der Druck durch die Strassenwalze ist alsdann, bei 3,2 m Entfernung der Tragwände:

$$6000 + 6000\,\frac{1{,}6}{3{,}2} = 9000\ \text{kg}.$$

Da vom Eigengewicht der Brücke auf eine Vertikale im Allgemeinen 4264 kg, für die Kämpfervertikalen jedoch $^2/_3$ soviel kommt (S. 268) so beträgt die grösste Gesammtbelastung für eine Kämpfervertikale:

$$9000 + \frac{2}{3}\,4264 = 11842\ \text{kg},$$

für eine der übrigen Vertikalen:

$$9000 + 4264 = 13264\ \text{kg}.$$

Indem jedoch diese Belastungen nur ganz ausnahmsweise und allmälig eintreten, kann die sonst vorgeschriebene (S. 282) Berücksichtigung der Spannungswechsel in diesem Falle unterbleiben.

Dagegen soll die Berechnung hier auf Grund neuerer Versuchsresultate von Tetmajer durchgeführt werden, wozu bemerkt sei, dass die Dimensionen auch nach der unter IV K erwähnten Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr reichlich genügen. Die Tetmajerschen Versuche führten für Flusseisenstäbe von etwa 4150 kg Zugfestigkeit zu folgenden Formeln für die Knickfestigkeit*, abgerundet:

wenn $\frac{l}{r} < 105$ $\quad k = 3200 - 11{,}6\,\frac{l}{r}$ per qcm, $\quad$ 1)

" $\frac{l}{r} > 105$ $\quad k = 22200000\left(\frac{l}{r}\right)^2$ " " . $\quad$ 2)

---

* Tetmajer, Mittheilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgen. Polytechnikum in Zürich, 4. Heft, Zürich 1890, S. 167.

worin l die „freie Knicklänge“ und

$$r = \sqrt{\frac{J}{F}} \qquad 3)$$

der kleinste in Betracht kommende Trägheitsradius für Axen durch den Schwerpunkt des Querschnitts bedeuten. Unter $\frac{l}{r} = 20{,}4$ traten überhaupt keine Knickerscheinungen ein. Gleichung 2) entspricht der Eulerschen Knickformel.

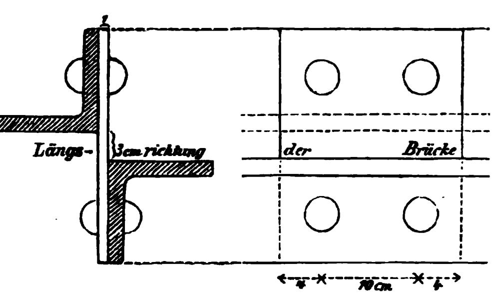


Fig. 151

Die Vertikalen der 4 innern Tragwände bestehen je aus 2 Winkeleisen, angeordnet nach Fig. 151, welche nach der Querrichtung der Brücke durch viernietige Zwischenplatten in Abständen von 76,5 cm verbunden sind (Entfernung zwischen den äussersten Nieten 66,5 cm, lichte Entfernung 58,5 cm). Die Verbindung mit den Obergurten der Tragwände bewirken je 4 Nieten in Anschlussblechen nach der Längsrichtung der Brücke (Fig. 152), wozu unten noch je 6 Niete in den Anschlussblechen der vertikalen Querkonstruktionen kommen (Fig. 153). Auch sitzen die Vertikalen

Fig. 152

Fig. 153

beiderseits auf. Für diese Endenhaltung werde die freie Knicklänge, welche bei frei drehbaren Enden gleich der Stablänge, bei vollkommen festgespannten Enden gleich der halben lichten Länge des Stabes wäre, gleich 0,75 der Totallänge zwischen den anschliessenden Gurtungsplatten, gemessen in der Vertikalenaxe, gesetzt, was mindestens 0,83 der Entfernung zwischen den äussersten Anschlussnieten und mindestens 0,85 der Entfernung zwischen den äussersten Kanten der Anschlussbleche ausmacht. Zur Bildung der Vertikalen sind 4 Winkeleisensorten verwendet und zwar (vergl. Fig. 142, S. 260).

für die Vertikale	Gesammtlänge	Winkeleisen
0	429,6 m	10/10/1,4 cm
1	339,6	10/10/1,2
2	258,1	10/10/1,0
3	187,1	9/ 9/1,0
17	210,9	9/ 9/1,0
18	286,3	10/10/1,0
19	370,2	10/10/1,2

Alle übrigen Vertikalen bestehen aus Winkeleisen von 9/9/1 cm. Die grössten Gesammtlängen für die verschiedenen Querschnitte sind aus vorstehender Zusammenstellung zu ersehen.

Bezeichnen für eine beliebige ebene Figur J_x, J_y die Trägheitsmomente in Hinsicht zweier zu einander senkrechter Axen x, y, und L das Centrifugalmoment in Hinsicht der letzteren, so ergeben sich bekanntlich die Winkel φ der entsprechenden Hauptträgheitsaxen mit der x-Axe aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2L}{J_x - J_y}, \qquad 4)$$

und mit

$$D = \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi - L \sin 2\varphi \qquad 5)$$

die Hauptträgheitsmomente selbst:

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + D, \qquad J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - D. \qquad 6)$$

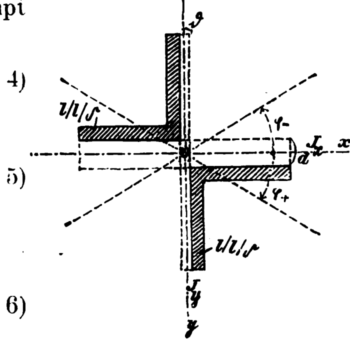


Fig. 154

Für den in Fig. 254 angedeuteten Querschnitt sind hinsichtlich der ersichtlichen Axen x, y:

$$J_x = \frac{2}{3}\left[(l-\delta)\left(\delta+\frac{d}{2}\right)^3 + \delta\left(l+\frac{d}{2}\right)^3 - l\left(\frac{d}{2}\right)^3\right], \qquad 7)$$

$$J_y = \frac{2}{3}\left[(l-\delta)\left(\delta+\frac{\mathfrak{d}}{2}\right)^3 + \delta\left(l+\frac{\mathfrak{d}}{2}\right)^3 - l\left(\frac{\mathfrak{d}}{2}\right)^3\right], \qquad 8)$$

$$L = \frac{l\delta}{2}\left[(l+d)(\delta+\mathfrak{d}) (l+\mathfrak{d})(\delta+d) - \frac{\delta}{2}(\delta+\mathfrak{d})(\delta+d)\right]. \qquad 9)$$

Man erhält beispielsweise für die Vertikalen aus Winkeleisen von 10/10/1,4 cm:

$$J_x = \frac{2}{3}(8{,}6 \,.\, 2{,}9^3 + 1{,}4 \,.\, 11{,}5^3 - 10 \,.\, 1{,}5^3) = 1537,$$

$$J_y = \frac{2}{3}(8{,}6 \,.\, 1{,}9^3 + 1{,}4 \,.\, 10{,}5^3 - 10 \,.\, 0{,}5^3) = 1119,$$

$$L = \frac{10 \,.\, 1{,}4}{2}(13 \,.\, 2{,}4 + 11 \,.\, 4{,}4 - 0{,}14 \,.\, 2{,}4 \,.\, 4{,}4) = 547,$$

$$\frac{J_x - J_y}{2} = 209, \qquad \frac{J_x + J_y}{2} = 1328,$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{547}{209}, \qquad 2\varphi = -69^0\,5'\,20'',$$

$$D = 209 \cos 2\varphi - 547 \sin 2\varphi = 586,$$

Hauptträgheitsmomente für die Richtungen φ und $\varphi + 90^0$:

$$J_1 = 1328 + 586 = 1914, \qquad J_2 = 1328 - 586 = 742.$$

Weiter folgen nun der Querschnitt:

$$F = 2 . 1,4 . 18,6 = 52,08 \text{ qcm}$$

der kleinste Trägheitsradius:

$$r = \sqrt{\frac{742}{52,08}} = 3,77 \text{ cm},$$

und mit der freien Knicklänge 0,75 . 429,6 das massgebende Verhältniss $l:r$:

$$\frac{l}{r} = \frac{3 . 429,6}{4 . 3,77} = 85,4.$$

Die Knickfestigkeit (mittlere Tragkraft mit Rücksicht auf Zerknickungsgefahr) liefert 1) per qcm:

$$k = 3200 - 11,6 . 85,4 = 2209 \text{ kg}.$$

Da nun die wirkliche mittlere Beanspruchung höchstens

$$\frac{11842}{52,08} = 227 \text{ kg},$$

so ist der Sicherheitsgrad:

$$\frac{2209}{227} = 9,7.$$

In gleicher Weise wie hier sind die übrigen Zahlen der folgenden Zusammenstellung berechnet, wobei jedoch als Belastung der Vertikalen 13294 kg anstatt 11842 kg anzunehmen war (siehe S. 295.)

Vertikalen aus		10/10/1,4	10/10/1,2	10/10/1	9/9/1	cm
Länge		429,6	339,6	286,3	210,9	cm
Querschnitt	$F =$	52,08	45,12	38	34	qcm
Trägheitsmoment	$J =$	742	656	562	403	cm^4
Trägheitsradius	$r =$	3,77	3,81	3,85	3,44	cm
Massgebendes $l:r$	$\frac{l}{r} =$	85,4	66,8	55,8	46	
Knickfestigkeit	$k =$	2209	2425	2553	2666	kg
Mittl. Beanspruchung		227	294	349	390	kg
Sicherheit	$m =$	9,7	8,2	7,3	6,8.	

Für die Endvertikalen 19 (Fig. 142) aus Winkeleisen von 10/10/1,2 cm ist zwar die Länge grösser als 339,6 cm, nämlich 370,2 cm, womit $\frac{l}{r} = 72,9$, $k = 2354$ kg; allein da die Belastung derselben nur 11842 kg erreicht, so werden die mittlere Beanspruchung und Sicherheit noch etwas günstiger als 294 kg und 8,2, nämlich 262 kg und 9,0. Durch die grosse Sicherheit der Endvertikalen ist auch den Erschütterungen beim Uebertritt konzentrirter Lasten von den Pfeilern auf die Eisenkonstruktion Rechnung getragen, welche allerdings bei chaussirten Strassenbrücken weit geringer als bei Eisenbahnbrücken sind.

B e m e r k u n g e n. Nach neueren Versuchen T e t m a j e r s* mit Kreuzstreben ähnlich den hier verwendeten, dürfte die Annahme des Zusammenwirkens der beiden Winkeleisen in Verbindung mit der hier getroffenen Wahl der freien Knicklänge den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen.** Wenn die Winkel-

* T e t m a j e r, Die Knickfestigkeit der mittleren Streben und der Gütewerth des Materials der Mönchensteiner Brücke. Schweizerische Bauzeitung 1893 I, S. 99.

** Beim Vergleiche mit den Resultaten T e t m a j e r s ist zu beachten, dass derselbe die freie Knicklänge bei günstigster Endenhaltung (kreuzweise Anschlussbleche, Vernietung der Vertikalen auch mit den Anschlusswinkeln dieser Bleche) gleich der halben Stablänge zwischen den äussersten Nieten setzte, bei ungünstiger Endenthalung (einfache Anschlussbleche, keine Vernietung mit den An-

eisen ganz für sich wirkten, wie dies ohne Verbindung durch Zwischenplatten zuträfe, wäre ein Einknicken senkrecht zu den Axen für die kleinsten Trägheitsmomente der einzeln Winkeleisen 'zu berücksichtigen (Fig. 155). Aber selbst in diesem hier jedenfalls nicht massgebenden Falle würden, wie ebenfalls rechnungsmässig festgestellt wurde, für die vier oben behandelten Vertikalen noch Sicherheiten von 3,6, — 4,3, — 5,4, — 5,6 bestehen, ein Einknicken also nicht zu befürchten sein.

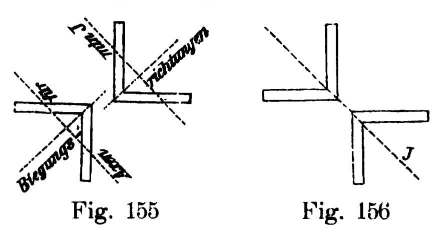


Fig. 155 Fig. 156

Für $d = \mathfrak{d}$ wäre bei gleichschenkligen Winkeleisen das kleinste Hauptträgheitsmoment J des Gesammtquerschnitts geich dem Doppelten des grössten Hauptträgheitsmoments jedes der beiden Winkeleisen (Fig. 156). Wir hätten in diesem Falle

für $l = 10$ cm und $\mathfrak{d} = 1{,}4$ 1,2 1,0 cm

nach dem deutschen Normalprofilbuch:

$J = 756$ 666 570,

während sich oben im Falle $d = 3$ cm, $\mathfrak{d} = 1$ cm ergaben:

$J = 742$ 656 562.

In vielen Fällen wird man sich also die Ableitung der Hauptträgheitsmomente auch bei verschiedenen d, $\mathfrak{d}$ ersparen können.

P. Vertikalen der Stirnbogen.

Die Vertikalen der Stirnbogen bestehen aus einer von Aussen allein sichtbaren Vertikalplatte von 30/1 cm und einem Winkeleisen von 12/8/1 cm, welche entsprechend Fig. 157 angeordnet und durch Niete in Abständen von 15,5 cm miteinander verbunden sind, sodass dieselben jedenfalls als Ganzes wirken. Die Befestigung erfolgt unten an Anschlussblechen in Quer- und Längsrichtung, oben an Anschlussblechen in der Querrichtung und den längslaufenden Obergurten der Tragwände derart, dass die Einspannung unten etwa ebenso günstig, oben etwas günstiger als bei den innern Bogen ist. Indessen soll die freie Knicklänge nur gleich 0,75 der Gesammtlänge bis zum Ende der Einspannung in der Querrichtung gesetzt werden, was mindestens 0,85 der Entfernung zwischen den äussersten Nieten oder 0,86 der Entfernung zwischen den nächstgelegenen Kanten der Anschlussbleche ausmacht.

Fig. 157

Wird das auf die Vertikalen kommende Eigengewicht für die Stirnbogen ebenso gross wie für die innern Bogen, und die Verkehrslast entsprechend Menschengedränge von 560 kg per qm auf die ganze Breite vom Brückengeländer bis zur Mitte zwischen den zwei äussersten Bogen angenommen (vergl. S. 268), so kommt auf eine Vertikale im Ganzen:

$$4264 + 560 \,.\, 2{,}508 \,,\, 2{,}7 = 8056 \text{ kg},$$

auf die Kämpfervertikalen jedoch (vergl. S. 268):

---

schlusswinkeln der letzteren) gleich der halben Stablänge zwischen jenen Nieten. Die Zwischenplatten folgten bei Tetmajer kreuzweise in Entfernungen von 110 cm (hier gleichgerichtet in Entfernungen von 76,5 cm), Totallänge bei Tetmajer 744 cm (hier bis 430 cm), Winkeleisen bei Tetmajer 10/10/1,4 cm (hier 10/10/1,4 cm bis 9/9/1 cm), bei Tetmajer $d = \mathfrak{d} = 1$ cm (hier $d = 3$ cm, $\mathfrak{d} = 1$ cm).

$$\frac{2}{3}\,8056 = 5370 \text{ kg}.$$

Für reinen Druck würde bei Wechseln zwischen 4264 kg und 8056 kg die Beanspruchung $800\left(1+\frac{\psi}{2}\right)$ grösser als 1000 kg, sodass letztere Zahl die zulässige Grenze wäre (S. 282) und die Spannungswechsel bei Berechnung der Vertikalen ausser Betracht bleiben können, wie dieselben ja auch bei Belastung durch Menschengedränge nur langsam vor sich gehen.

Im Folgenden ist der Nachweis genügender Querschnitte auf Grund neuerer Tetmajerscher Versuche über excentrische Druckbelastung von Stäben aus schmiedbarem Eisen durchgeführt. Auf Grund derselben setzt Tetmajer die zulässige mittlere Beanspruchung für excentrischen Druck*:

$$\sigma_e = \frac{\sigma_k}{1+\zeta\frac{h}{w}}, \tag{1}$$

worin σ_k die zulässige mittlere Beanspruchung für centrischen Druck mit Rücksicht auf Zerknickungsgefahr. Bezeichnen c die anfängliche Excentricität der parallel der Stabaxe wirkenden Druckkräfte P, l die freie Knicklänge, F den Stabquerschnitt, e die Entfernung des am weitesten nach Innen (auf der Seite von P) gelegenen Querschnittselements von der Stabaxe, J das Trägheitsmoment des Querschnitts hinsichtlich der zur Biegungsebene senkrechten Axe durch den Schwerpunkt, und E den Elasticitätsmodul, dann hat man weiter:

$$h = \frac{c}{\cos\frac{l}{2a}} \qquad \text{mit} \qquad a^2 = \frac{EJ}{P}, \tag{2}$$

$$w = \frac{J}{Fe}. \tag{3}$$

ζ ist ein Erfahrungskoefficient, welchen Tetmajer für schmiedbares Konstruktionseisen ausdrückt:

$$\text{wenn} \quad \frac{l}{r} < 112 \qquad \zeta = 0{,}877 - 0{,}0028\,\frac{l}{r}, \tag{4}$$

$$\text{„} \quad \frac{l}{r} > 112 \qquad \zeta = 7158\left(\frac{r}{l}\right)^2 + 5{,}87\,\frac{r}{l} - 0{,}058, \tag{5}$$

worin

$$r = \sqrt{\frac{J}{F}}. \tag{6}$$

Denkt man sich gegen centrische Knickung und excentrischen Druck die gleiche Sicherheit m gewählt, so entspricht zufolge 1) der centrischen Knickfestigkeit $k = m\,\sigma_k$ eine rechnungsmässige mittlere Festigkeit gegen excentrischen Druck:

$$d_e = m\,\sigma_e = \frac{k}{1+\zeta\frac{h}{w}} \tag{7}$$

Im vorliegenden Falle (Fig. 157) hat man den Gesammtquerschnitt $F = 49$ qcm. Entfernung e des Schwerpunkts von der 12 cm-Kante des Winkeleisens aus

$$Fe = 30 \,.\, 0 + 8 \,.\, 4 + 11 \,.\, 0{,}5 = 37{,}5 \text{ ccm};$$

$$e = \frac{37{,}5}{49} = 0{,}77 \text{ cm}.$$

---

* Tetmajer, Mittheilungen etc., 4. Heft, Zürich 1890, S. 179.

Entfernung e des Schwerpunktes von der 8 cm-Kante des Winkeleisens aus

$$Fe = 7 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 6 - 30 \cdot 0{,}5 = 60{,}5 \text{ ccm}:$$

$$e = \frac{60{,}5}{49} = 1{,}23 \text{ cm}.$$

Trägheitsmomente des Gesammtquerschnitts in Hinsicht dieser Kanten als Axen:

$$2\frac{1 \cdot 15^3}{3} + \frac{1 \cdot 8^3}{3} + \frac{11 \cdot 1^3}{3} = 2424,$$

$$\frac{30 \cdot 1^3}{3} + \frac{7 \cdot 1^3}{3} + \frac{1 \cdot 12^3}{3} = 588.$$

Trägheitsmomente für Axen, parallel den soeben verwendeten, jedoch durch den Schwerpunkt:

$$J_x = 2424 - 49 \cdot 0{,}77^2 = 2395,$$

$$J_y = 588 - 49 \cdot 1{,}23^2 = 514.$$

Centrifugalmoment hinsichtlich dieser letzten Axen, mit Rücksicht auf den Ausdruck desselben für ein Rechteck (Fig. 158):

$$L = \frac{1}{4}(x_2^2 - x_1^2)(y_2^2 - y_1^2):$$

$$L = \frac{1}{4}\left[(10{,}77^2 - 1{,}23^2)(0{,}23^2 - 0{,}77^2) + (0{,}23^2 - 1{,}23^2)(7{,}23^2 - 0{,}23^2) + (1{,}23^2 - 2{,}23^2)(14{,}23^2 - 15{,}77^2)\right] = 0{,}45.$$

Für die Richtungen der Hauptträgheitsaxen nach Formel 4) auf S. 295:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2 \cdot 0{,}45}{2395 - 514}, \qquad 2\varphi = -0^\circ 0' 49'',$$

wonach dieselben (wie vorauszusehen war) fast genau mit den zuletzt angenommenen Axen durch den Schwerpunkt zusammenfallen und $J_y = 514$ als kleinstes Trägheitsmoment gelten kann (die Berechnung ergibt 514,01).

Wir erhalten damit den kleinsten Trägheitsradius:

$$r = \sqrt{\frac{514}{49}} = 3{,}24 \text{ cm}.$$

Der Mittelpunkt der Druckbelastung liegt zufolge der konstruktiven Anordnung in der Ecke zwischen Winkeleisen und Platte, inmitten der letzteren, d. h. in Entfernung

$$\sqrt{1{,}23^2 + 0{,}77^2} = 1{,}45 \text{ cm}$$

Fig. 158

vom Schwerpunkt des Gesammtquerschnitts. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte fällt nicht mit der Richtung des kleinsten Trägheitsradius r zusammen, sodass eine einfache Biegung in der Vertikalebene durch letzteren nicht zu erwarten ist. Wir rechnen jedoch jedenfalls zu ungünstig, wenn wir unter Zugrundelegung einer solchen die anfängliche Excentricität setzen:

$$c = 1{,}45 \text{ cm}.$$

Nach 3) haben wir:

$$w = \frac{514}{49 \cdot 2{,}23} = 4{,}70 \text{ cm}.$$

Im Weiteren sind der verschiedenen Längen und Belastungen wegen die Kämpfervertikalen von den übrigen Vertikalen getrennt zu behandeln.

K ä m p f e r v e r t i k a l e n. Die längste Kämpfervertikale hat 4,60 cm Länge. Freie Knicklänge l 0,75 . 460 = 345 cm. Massgebendes Verhältniss l/r:

$$\frac{l}{r} = \frac{345}{3{,}24} = 106{,}5,$$

Knickfestigkeit nach Formel 2) auf S. 293:

$$k = \frac{22200000}{106{,}5^2} = 1957 \text{ kg.}$$

Aus 4) 2) folgen, mit $P = 5370$ kg (vergl. S. 298 oben):

$$\zeta = 0{,}877 - 0{,}0028 \,.\, 106{,}5 = 0{,}579,$$

$$a = \sqrt{\frac{2150000 \,.\, 514}{5370}} = 453{,}6.$$

$$\cos\frac{l}{2a} = \cos\frac{345}{2 \,.\, 453{,}6} = \cos\frac{345}{907{,}2}\frac{180^\circ}{\pi} = 0{,}9286.$$

$$h = \frac{1{,}45}{0{,}9286} = 1{,}56 \text{ cm.}$$

Die rechnungsmässige mittlere Druckfestigkeit gegen excentrischen Druck ist nach 7):

$$d_e = \frac{1957}{1 + 0{,}579\frac{1{,}56}{4{,}70}} = 1642 \text{ kg.}$$

Da nun die wirkliche mittlere Druckbeanspruchung:

$$\frac{P}{F} = \frac{5370}{49} = 110 \text{ kg,}$$

so folgt die Sicherheit:

$$m = \frac{1642}{110} = 14{,}9.$$

Bei Berechnung auf Zerknickung ohne Rücksicht auf Excentricität hätte sich die Sicherheit $\frac{1957}{110} = 17{,}8$ ergeben, bei Berechnung auf reinen Druck unter Annahme einer Druckfestigkeit von 4150 kg (gleich der vorgeschriebenen mittleren Zugfestigkeit, vergl. S. 280) $\frac{4050}{110} = 36{,}8$.

Zwischenvertikalen. Grösste Länge 3,70 cm. Massgebendes Verhältniss l/r bei $l = 0{,}75 \,.\, 370 = 277{,}5$ cm freier Knicklänge:

$$\frac{l}{r} = \frac{277{,}5}{3{,}24} = 85{,}6.$$

Knickfestigkeit nach Formel 1) auf S. 293:

$$k = 3200 - 11{,}6 \,.\, 85{,}6 = 2207.$$

Weiter folgen aus 4) 2), mit $P = 8056$ kg (vergl. S. 297 unten):

$$\zeta = 0{,}877 - 0{,}0028 \,.\, 85{,}6 = 0{,}637 \text{ kg.}$$

$$a = \sqrt{\frac{2150000 \,.\, 514}{8056}} = 370{,}4,$$

$$\cos\frac{l}{2a} = \cos\frac{277{,}5}{2 \,.\, 370{,}4} = \cos\frac{277{,}5}{740{,}8}\frac{180^\circ}{\pi} = 0{,}9307,$$

$$h = \frac{1{,}45}{0{,}9307} = 1{,}56 \text{ cm.}$$

Rechnungsmässige mittlere Festigkeit gegen excentrischen Druck nach 7):

$$d_e = \frac{2207}{1 + 0{,}637\frac{1{,}56}{4{,}70}} = 1822 \text{ kg.}$$

Wirkliche mittlere Druckbeanspruchung:

$$\frac{P}{F} = \frac{8056}{49} = 164 \text{ kg},$$

Sicherheit

$$m = \frac{1822}{164} = 11{,}1.$$

Ohne Rücksicht auf Exzentricität hätte sich die Sicherheit $\frac{2207}{164} = 13{,}5$ und bei Berechnung auf reinen Druck mit 4150 kg Druckfestigkeit $\frac{4050}{164} = 24{,}7$ ergeben.

Q. Weitere Berechnungen.

Neben den bis jetzt mitgetheilten Berechnungen waren noch manche andere vorzunehmen, welche jedoch im Allgemeinen auch bei andern Konstruktionen vorkommen, sodass wir sie hier übergehen können. Nur bezüglich der Querträger und der Obergurten der Haupttragwände sei noch Einiges beigefügt.

Für die Abschnitte dieser Obergurten zwischen zwei benachbarten Vertikalen (Fig. 159) ist in der Mitte eine durch einen Querträger übertragene feste Last von 2000 kg und ungünstigstenfalls eine Verkehrslast durch die Dampfwalze von 9000 kg anzunehmen (S. 293). Da die Obergurten durchlaufen und mit den Vertikalen, Querverbänden und Querträgern vernietet sind, so können sie nicht als frei aufliegend, aber auch nicht als vollkommen festgespannt gelten; die Wahrheit liegt zwischen diesen Extremen.

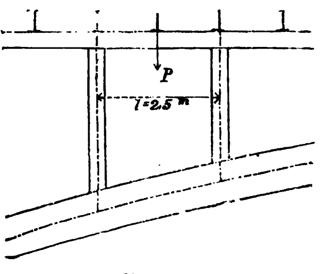


Fig. 159

In dem ungünstigsten Falle freier Auflagerung würde, abgesehen von dem geringen Eigengewicht der fraglichen Gurten selbst, das grösste Biegungsmoment:

$$M = \frac{P\,l}{4} = \frac{11000 \,.\, 2{,}5}{4} = 6875 \text{ mk},$$

während dasselbe bei vollkommener Festspannung halb so gross wäre. Da nun für den gewählten Gurtungsquerschnitt (Fig. 160) das Trägheitsmoment:

$$J = \frac{2}{3}\,(16 \,.\, 15^3 - 13 \,.\, 11^3 - 2 \,.\, 7{,}5^3) - 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 11^2 = 10204,$$

und das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{10204}{15} = 680 \text{ ccm},$$

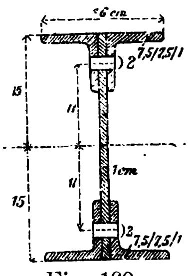


Fig. 160

so würde die grösste Beanspruchung per qcm bei freier Auflagerung:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6875 \,.\, 100}{680} = 1011 \text{ kg},$$

bei absoluter Festspannung

$$\frac{1011}{2} = 505 \text{ kg},$$

und in Wirklichkeit angesichts der guten Einspannung wohl eher kleiner als

$$\frac{1011 + 505}{2} = 758 \text{ kg},$$

während nach dem Bauprogramm zugelassen waren (S. 282):

$$800 + 400 \frac{2000}{11000} = 873 \text{ kg.}$$

Die Obergurten sind hiernach ausreichend dimensionirt.

Eine weitergehende Berechnung wäre zwar möglich, aber schon der Art der Einspannung wegen kaum zuverlässiger gewesen. Will man in Zweifelsfällen ganz sicher gehen, so braucht man nur die Querschnitte u. s. w. dem jeweils ungünstigsten der beiden Extreme anzupassen, besonders wenn aus konstruktiven Gründen ohnehin etwas kräftiger als nöthig dimensionirt werden soll (siehe den folgenden Fall).

Die Querträger liegen über den soeben betrachteten Gurtungen und laufen alternirend über 6 und 4 Hauptträger weg (Fig. 161, 162), sind also kontinuirliche Balken mit nicht ganz festliegenden Stützen und nicht ganz frei drehbaren Enden.

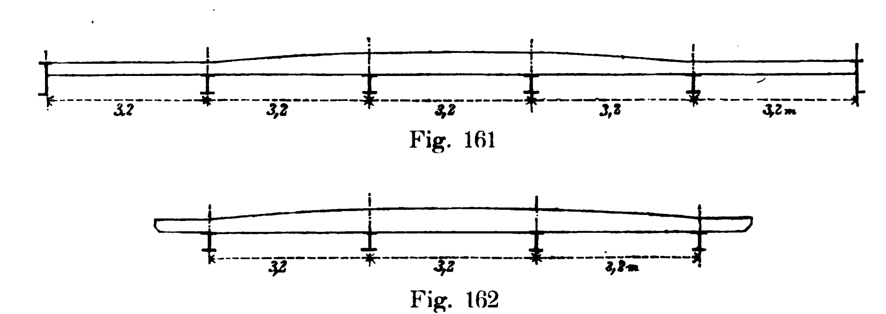


Fig. 161

Fig. 162

Die Trägerhöhe wechselt zwischen den vier innern Bogen, entsprechend der Wölbung der Fahrbahn, zwischen 25 und 41 cm.

Wird ein Abschnitt zwischen zwei Hauptträgern als einfacher Balken von $l = 3{,}2$ m Spannweite angesehen, so entstehen die numerisch grössten Momente durch zwei Lasten $P = 4000$ kg der Strassenwalze (S. 283), deren ungünstigste Stellung zu berücksichtigen ist. Das grösste positive Moment ergibt sich in der Trägermitte bei der in Fig. 163 angedeuteten Belastung, und zwar unter Voraussetzung frei aufliegender Enden:

$$M = \frac{g\, l^2}{8} + P\, a = \frac{570 \,.\, 3{,}2^2}{8} + 4000 \,.\, 1{,}3 = 730 + 5200 = 5930 \text{ mk},$$

unter Voraussetzung vollkommen festgespannter Enden:

$$M = \frac{g\, l^2}{24} + P \frac{a^2}{l} = 243 + 2113 = 2356 \text{ mk.}$$

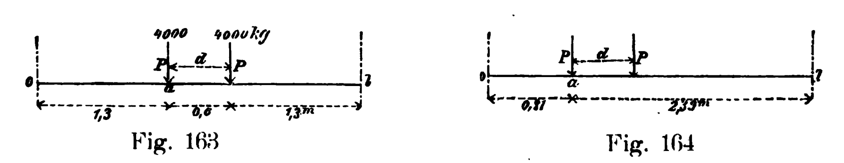


Fig. 163 Fig. 164

Das grösste negative Moment entsteht an den Enden; es ist für frei aufliegende Enden gleich Null bei vollkommener Festspannung aber (Fig. 164)

$$M = -\frac{g\, l^2}{12} - \frac{P}{l^2} \left[a\,(l-a)^2 + (a+d)\,(l-a-d)^2\right],$$

worin d die Entfernung der beiden gleichen Lasten P und

$$a = \frac{1}{6}\left(4\, l - 3\, d - \sqrt{4\, l^2 - 9\, d^2}\right).$$

Im vorliegenden Falle erhält man mit $l = 3{,}2$ m, $d = 0{,}6$ m zunächst $a =$ 0,810 m und sodann:

$$M = -\frac{570\,.\,3{,}2^2}{12} - \frac{4000}{3{,}2_2}\,(0{,}81\,.\,2{,}39^2 + 1{,}41\,.\,1{,}79^2) = -\,486 - 3572 = 4058 \text{ mk.}$$

Nun besteht der Trägerquerschnitt aus 4 Winkeleisen von 7,5/7,5/0,8 cm und einer Vertikalplatte, welche in der Mitte der betrachteten Trägerabschnitte mindestens die Höhe 35 cm hat. Daher entspricht den grössten positiven Biegungsmomenten, mit Rücksicht auf die Verschwächung durch zwei Nieten von 2 cm Durchmesser ein Trägheitsmoment:

$$J = \frac{2}{3}\,(15{,}8\,.\,17{,}5^3 - 13{,}4\,.\,16{,}7^3 - 1{,}6\,.\,10^3) - 2\,.\,2\,.\,2{,}4\,.\,14^2 = 12531,$$

und ein Widerstandsmoment

$$W = \frac{12531}{17{,}5} = 716 \text{ ccm},$$

wonach die grösste Normalspannung, selbst unter Voraussetzung frei aufliegender Enden:

$$\sigma = \frac{593000}{716} = 828 \text{ kg.}$$

während alsdann zulässig wären:

$$800 + 400\,\frac{730}{5930} = 849 \text{ kg.}$$

Gegenüber den negativen Momenten wären im angenommenen Falle die schwächsten Stellen über den zwei innern Bogen zunächst den Stirnbogen (Fig. 161, 162) wo die Querträgerhöhe nur 27 cm beträgt. Hier ergibt sich jedoch das Trägheitsmoment:

$$J = \frac{2}{3}\,(15{,}8\,.\,13{,}5^3 - 13{,}4\,.\,12{,}7^3 - 1{,}6\,.\,6^3) - 2\,.\,2\,.\,2{,}4\,.\,10^2 = 6427,$$

das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{6427}{13{,}5} = 476 \text{ ccm},$$

sodass die grösste Normalspannung, selbst unter Voraussetzung vollkommen festgespannter Enden:

$$\sigma = \frac{405800}{476} = 852 \text{ kg},$$

Fig. 165

während alsdann zulässig wären:

$$800 + 400\,\frac{486}{4058} = 848 \text{ kg.}$$

Die vorstehende Berechnung liefert ungünstigere Werthe, als wenn man die Querträger als gewöhnliche kontinuirliche Balken mit 5 Oeffnungen und festen Stützen berechnet hätte. Für solche würde die schwächste Stelle über dem zweiten Bogen liegen, und das numerisch grösste Moment daselbst bei der in Fig. 165 angedeuteten Belastung eintreten,*, unter den u gleichmässig vertheilte Lasten per m Träger verstanden. Es ergibt sich dann**

$$M = -\,735 - 1988 = -\,2723 \text{ mk},$$

womit die grösste Normalspannung nur

* Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuirlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, S. 40.

** Siehe die Formeln für M_1: Luegers Lexikon der gesammten Technik, I, Stuttgart 1895. Art. Balken, kontinuirliche, Gleichungen 29, 33.

$$\sigma = \frac{272300}{476} = 572 \text{ kg.}$$

Für die Endabschnitte der Querträger (Fig. 161) von 25 cm Höhe sind die gewählte Querschnitte, selbst unter Voraussetzung frei aufliegender Enden, mehr als genügend. Man erhält mit der nicht erreichten Belastung per m von

$$q = 2{,}5\,(400 + 560) = 2400 \text{ kg}$$

(vergl. S. 268) das Maximalmoment:

$$M = \frac{q\,l^2}{8} = 3072 \text{ mk,}$$

während $J = 5324$, $W = 426$. Die entsprechende Normalspannung ist

$$\sigma = \frac{307200}{426} = 720 \text{ kg.}$$

Fig. 166

Für die überragenden Enden (Fig. 166) der kürzeren Querträger ergibt sich, selbst wenn man sich die ganze Belastung von

$$1{,}25\,(400 + 560)\,1{,}6 = 1920 \text{ kg}$$

unter dem I = eisen koncentrirt angreifend denkt, das grösste Moment

$$M = -P\,l = -1920 \,.\, 0{,}9 = -1728 \text{ mk.}$$

und damit die grösste Normalspannung $\sigma = 363$ kg.

Buchstabenbezeichnungen.

(Bezeichnungen, welche nur in einem Paragraphen, einer Aufgabe oder einem Beispiele vorkommen, sind im Allgemeinen weggelassen. Die Seitenzahlen beziehen sich in der Regel auf das erste Auftreten der Bezeichnungen mit der angegebenen Bedeutung).

	Seite
a Abscisse des Angriffspunktes einer Last P	5
a_1, a_2, . . . Abscissen der Angriffspunkte von Lasten P_1, P_2, . . .	5
a Abscissen von Influenzlinien (Einflusslinien)	42
a Abscissen der Kämpferdrucklinie (Schnittlinie der Kämpferdrücke)	8
a, b oder a, c Halbaxen einer Ellipse	23, 35
b Ordinate des Angriffspunkts einer Last P	7
b_1, b_2, . . . Ordinaten der Angriffspunkte von Lasten P_1, P_2, . . .	7
b Ordinaten von Influenzlinien (Einflusslinien)	42
b Ordinaten der Kämpferdrucklinie (Schnittlinie der Kämpferdrücke)	8
b Breite eines Querschnitts, in Entfernung v von der Axschicht	21, 33
b, a oder c, a Halbaxen einer Ellipse	23, 35
c Mittelwerth von $J \cos \varphi$ bei parabolischen Bogen	63, 195, 221
$d = t_1 - t_n$ Differenz der Montirungstemperatur t_1 und der gewünschten Normaltemperatur t_n	92, 99
d_m Länge der Diagonale im m-ten Felde eines Ständerfachwerks	168
e Einsenkung der Bogenaxe in der Bogenmitte	63
e_o, e_u absolute Entfernungen des obersten und untersten Querschnittselements von der Axschicht, für symmetrisch zu letzterer angeordnete Querschnitte $e_o = e_u = e$	22, 27
f Pfeil der Axe eines Bogens, für symmetrisch zur Bogenmitte liegende Bogen Ordinate y für $x = m = l/2$	30, 45, 187
f Ordinate eines Zwischengelenks	58, 194
f_o, f_u Querschnitte des Obergurts und Untergurts eines Bogens, für gleiche Gurtungsquerschnitte $f_o = f_u = f$	29
$f(\alpha)$ Abkürzende Bezeichnung beim Ausdrucke des Horizontalschubs in gewissen Fällen	42
g Gleichmässig vertheiltes Eigengewicht per Längeneinheit eines Trägers	19
h Ganze Höhe eines Querschnitts, z. B. eines Rechtecks	20
h Entfernung der Gurtungsschwerpunkte	29
h Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit Zugstange und bei kontinuirlichen Bogen	158, 222, 163
h_m Länge der Vertikale eines Ständerfachwerks am Ende des m-ten Feldes	168
k Ordinate des Endpunktes der Bogenaxe in einer Oeffnung, für $x = l$ ist $y = k$	4
k Koefficient der Schubwirkung	22
k Mittelwerth von $F \cos \varphi$ bei parabolischen Bogen	64, 197, 221
k_o, k_u absolute Entfernungen des oberen und unteren Kernpunktes eines Querschnitts von der Bogenaxe, für symmetrisch zu letzterer angeordnete Querschnitte $k_o = k_u = k$	27, 28, 30

	Seite
l Spannweite, Abscisse x des Endpunkts der Bogenaxe in einer Oeffnung	4
l Wirksame Länge eines Zapfengelenkes	52
$m = l/2$ Abscisse der Bogenmitte für symmetrische Bogen	45
m Abscisse eines Zwischengelenks	58, 194
m Index eines beliebigen Feldes oder einer beliebigen Vertikale eines Ständerfachwerks und damit auch der betreffenden Stablängen und Stabkräfte	168
n Felderzahl eines Ständerfachwerks innerhalb einer Oeffnung, $l = n\,\lambda$	168
o Index von Grössen, welche sich auf den Obergurt u. s. w. beziehen	27, 29
p Gleichmässig vertheilte Verkehrslast per Längeneinheit Träger	19
$q = g + p$ Gleichmässig vertheilte Gesammtlast (Eigengewicht plus Verkehrslast) per Längeneinheit Träger	45
q Entfernung der Resultanten der positiven und negativen vom Momente M_x allein herrührenden Normalkräfte eines Querschnitts	29
r Krümmungsradius der Stabaxe, bei kreisförmiger Axe Halbmesser derselben	13, 59
r Radius eines Zapfengelenkes	52
r Abkürzende Bezeichnung	59, 196
s Bogenlänge, in der Axe gemessen	4, 14
s Grösster Normaldruck per Quadrateinheit auf ein Gelenk	52
t Temperatur (nach Celsius)	92, 99
t_1 Montirungstemperatur eines Bogens	92, 99
t_n Normaltemperatur eines Bogens	99
u, u' Abscissen der Umhüllungslinien U, U' der Kämpferdrücke R, R'	9
u, u' Gleichmässig vertheilte Lasten per Längeneinheit der Spannweite eines Trägers	53
u Index von Grössen, welche sich auf den Untergurt u. s. w. beziehen	27, 29
v Entfernung (positive und negative) eines Querschnittselements von der Axschicht	14
v Index von Grössen, welche sich auf die soeben erwähnte Entfernung beziehen	14
v, v' Ordinaten der Umhüllungslinien U, U' der Kämpferdrücke R, R'	9
v Verminderung der Spannweite bei künstlicher Ueberhöhung der Bogen und Reduktion der Normaltemperatur aut die mittlere Ortstemperatur	92, 99
v Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	80, 212, 214, 218
w, w' Ordinaten der Durchschnittspunkte der Kämpferreaktionen R, R' mit den Vertikalen 0 und l	9
w Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	80, 212, 214, 218
w_d, w_v Abkürzende Bezeichnungen (Ordinaten gewisser Durchschnittspunkte) bei Bogenfachwerken	170
x Abscisse des Axpunktes eines Querschnitts, Bezeichnung des Querschnitts	4, 25
x Index von Grössen, welche sich auf den Querschnitt x beziehen	5
x_1, x_2, . . . Mittelwerthe der Abscissen x in den Feldern 1, 2, . . . bei Bogen mit beliebiger Axe	79, 212
x_m Länge des Stabs der X-Gurtung im m-ten Felde eines Ständerfachwerks	168
y Ordinate des Axpunktes eines Querschnitts	4, 25
y_1, y_2, . . . Mittelwerthe der Ordinaten y in den Feldern 1, 2, . . . bei Bogen mit beliebiger Axe	79, 212
z Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	81, 213, 214, 218
z Länge der Zugstange bei Bogen mit Zugstange, für horizontale Zugstange $z = l$	158, 222
z_m Länge des Stabs der Z-Gurtung im m-ten Felde eines Ständerfachwerks	168
A Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	234
A, B, C, . . . Bezeichnung der Paragraphen im IV. Abschnitt	260
B Biegungsarbeit (Verschiebungsarbeit oder Deformationsarbeit bei der Biegung)	22
B Beanspruchung eines beliebigen Fachwerkstabes	164
B Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	238

	Seite
C Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	234
C' Abkürzende Bezeichnung beim Ausdrucke des Horizontalschubs in gewissen Fällen	42
D Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	234
D_m Beanspruchung der Diagonale eines Ständerfachwerks im m-ten Felde	168
E Elasticitätsmodul	15
F Querschnitt eines Bogens	15
F Influenzfläche (Einflussfläche)	44
F Querschnitt eines Fachwerkstabes	183
$F_1, F_2, \ldots$ Mittwerthe der Bogenquerschnitte in den Feldern 1, 2, ... eines Bogens mit beliebiger Axe	212
G Schubelasticitätsmodul	22
G Bezeichnung einer beliebigen Grösse	44
H Horizontalschub, eventuell auch nur von einer Einzellast P herrührend	6, 8
H, H' Horizontalreaktionen bei 0 und l (Horizontalkomponenten von R, R'), wenn nur vertikale Aktivkräfte wirken ist $H' = H$	5, 6
H_x Horizontalkraft im Querschnitt x, d. h. Horizontalkomponente der resultierenden Schnittkraft R_x	5, 6, 7
H_0, H_l Werthe von H_x für $x = 0$ und l, $H_0 = H$, $H_l = H'$	6, 7, 8
J Trägheitsmoment	20
$J_1, J_2, \ldots$ Mittelwerthe der Trägheitsmomente in den Feldern 1, 2, ... eines Bogens mit beliebiger Axe	79, 212
K Krümmungsmoment	16, 20
K Künstlicher Horizontalschub	91, 98
K_1 Künstlicher Horizontalschub bei der Herstellung desselben im Falle einer Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur	92, 99
L Summe der Spannweite kontinuirlicher Bogen	162
M, M' Endmomente (Stützenmomente) in einer Oeffnung, Werthe von M_x für $x = 0$ und l	5, 6, 7
M_x Schnittmoment oder Angriffsmoment im Querschnitt x, d. h. Moment der resultirenden Schnittkraft R_x oder der Normalkraft N_x in Hinsicht des Axpunktes des Querschnitts	5, 6, 7, 15
N_x Normalkraft im Querschnitt x, d. h. Komponente der resultirenden Schnittkraft R_x normal dem Querschnitt	5, 6, 7, 15
O Ganze Beanspruchung des Obergurts	29
P Einzellast (koncentrirte Last)	5, 8
$P_1, P_2, \ldots$ Folge beliebiger Einzellasten	5
$P_1, P_2, \ldots$ Vertikalkomponenten beliebig gerichteter Aktivkräfte $R_1, R_2, \ldots$	7
P_x Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	212, 215
Q Vom Momente M_x allein herrührende Theile der Gurtungsbeanspruchungen	29
$Q_1, Q_2, \ldots$ Horizontalkomponenten beliebig gerichteter Aktivkräfte $R_1, R_2, \ldots$	7
Q_x Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	215
R, R' Reaktionen bei 0 und l (der Stützen und etwaiger angrenzender Stababschnitte), eventuell auch nur von einer Einzellast P herrührend	4, 8
R Resultirender Druck auf ein Gelenk	51
$R_1, R_2, \ldots$ Aktivkräfte beliebiger Richtungen	7
R_x Resultirende Schnittkraft im Querschnitt x	5
S Bezeichnung der Kämpferdrucklinie (Schnittlinie der Kämpferdrücke)	9
S Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	215, 234
S_0 Statisches Moment des oberhalb oder unterhalb der Axschicht gelegenen Querschnittstheils in Bezug auf die Axschicht	29
S_x Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Axe	79, 212
T_x Transversalkraft (Querkraft) im Querschnitt x, d. h. Kompenente der resultirenden Schnittkraft R_x längs des Querschnitts	5, 6, 7

Wortverzeichniss.

(Die Seitenzahlen beziehen sich im Allgemeinen auf das erste Auftreten der Bezeichnungen. §, A, B in Klammern sind Abkürzungen für Paragraph, Aufgabe, Beispiel, IV mit einem Buchstaben entspricht dem betreffenden Theile des IV. Abschnitts).

Fehlerverzeichniss.

S. 5. Das letzte Wort des ersten Absatzes soll ein, nicht aus heissen.
S. 69. In der letzten Zeile soll x nicht nach § 8, 1). sondern vor dem Worte Fuge stehen.
S. 73. In Formel 12) ist 128 durch 64 zu ersetzen.
S. 80. Zeile 15 von oben ist 1,04% für 0,44% zu setzen.
S. 85. Formel 52) hat vor dem Bruch ein Minuszeichen zu erhalten.
S. 87. In Zeile 3 der Bemerkungen zu Beisp. 16 haben 1984,21 und 1685960 an Stelle von 1963,16 und 1668074 zu treten; in der nächsten Zeile ist 0,64% kleiner durch 0,43% grösser zu ersetzen.
S. 111. Zeile 6 der Bemerkungen ist Beisp. 33 anstatt Beisp. 43 anzuführen.
S. 112. In der letzten Zeile ist die Klammer nach 35 zu schliessen.
S. 117. In den Ausdrücken von σ_o, σ_u Zeile 23 und 24 sind die Zeichen — und + vor den Brüchen zu vertauschen.
S. 127. Letzte Zeile vor der Fussnote ist §§ 17, 34, 35 für §§ 18, 34, 35 zu setzen.
S. 149. Zweite Zeile von Beisp. 35 ist die Klammer vor Wiener statt nach Wiener einzufügen.
S. 151 soll die letzte Kolumne der Tabelle mit 11,879 statt mit 11,870 überschrieben sein.
S. 179. Zeile 4 von oben hat das erste K den Index o, nicht 0, zu erhalten.
S. 183. Vierte Zeile von oben, ist nebenstehende für folgende zu setzen.
S. 187. Fig 129 ist irrthümlich auf den Kopf gestellt.
S. 187. Formel 2) soll mit $\frac{d\,M_x}{d\,s}$ anstatt mit $\frac{d\,M_x}{d\,x}$ beginnen.
S. 256. In Zeile 2 ist die Vergleiche für diese Vergleiche zu setzen.

max Dr
max po
min Dr

max D
max p
min D

max D
max p
min D

max D
max p
min D

max D
max p
min D

max D
max p
min D

max D
max p
min D

max D
max p
min D

max D
max p
min D

Kämpfergelenk


89078557535
B89078557535A
357 07/04 5
38038
BUI